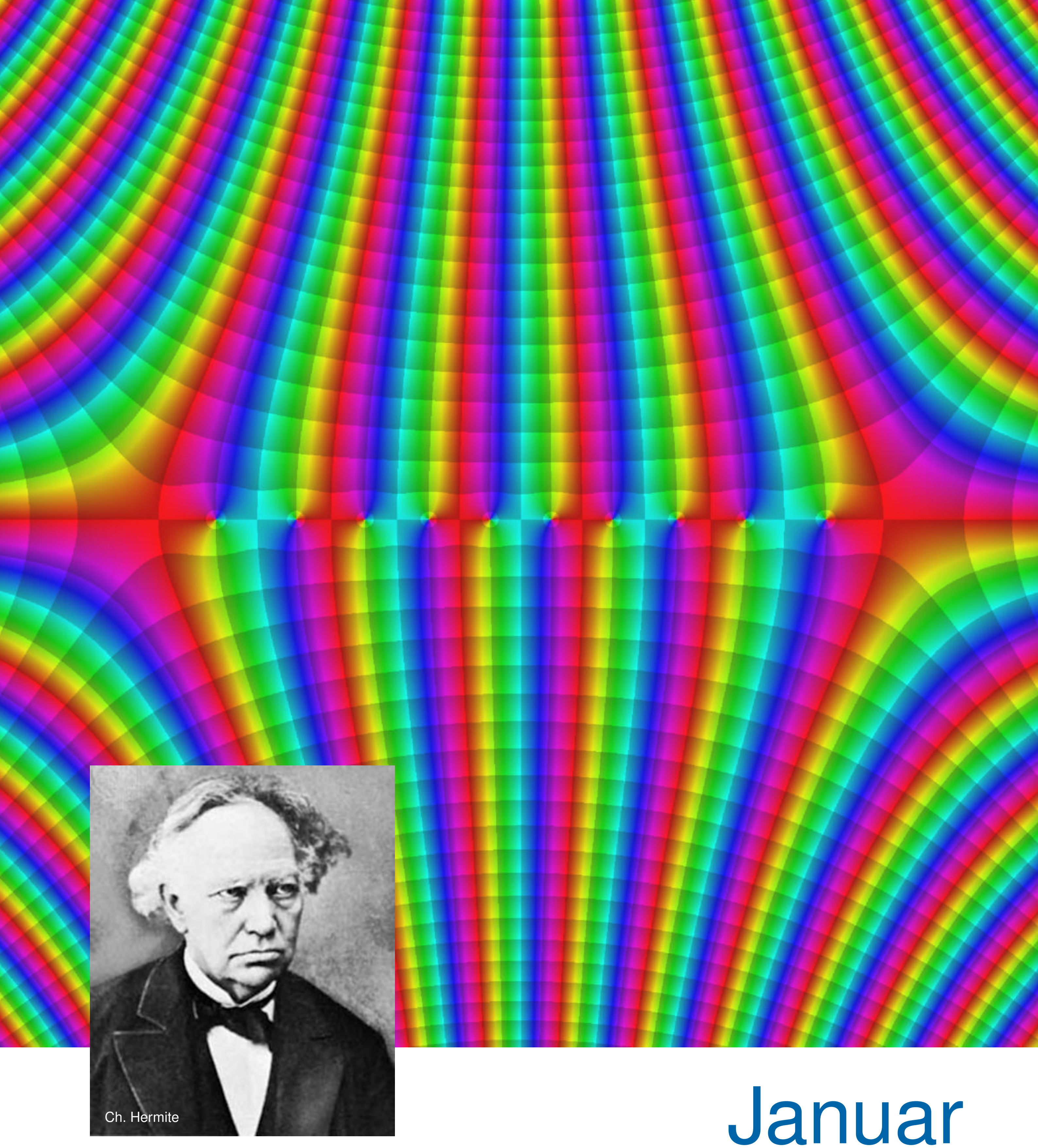


Ch. Hermite

Januar

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31									

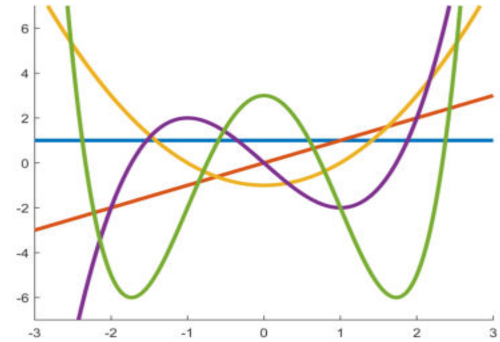
Die Hermite-Polynome

Hermite-Polynome wurden bereits 1810 von Pierre-Simon Laplace eingeführt und 1859 von Pafnuty Tschebyschow untersucht. 1864 schrieb Hermite in seiner Arbeit *Sur un nouveau développement en série de fonctions* über sie. Obwohl diese Polynome nicht neu waren, war Hermite der erste, der sie auch im Mehrdimensionalen betrachtete. Das *Hermite-Polynom* n-ten Grades kann durch

$$He_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} = \left(x - \frac{d}{dx}\right)^n 1$$

definiert werden. Diese Polynome sind u.a. in der Stochastik und der Physik bedeutsam, wobei im zweiten Fall ihre Definition meist modifiziert wird: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (d^n/dx^n) e^{-x^2}$. Beide Definitionen unterscheiden sich nur durch eine Skalierung: $H_n(x) = 2^{n/2} He_n(\sqrt{2}x)$. In der probabilistischen Version erkennen wir die Dichtefunktion $w(x) = (1/\sqrt{2\pi})\, e^{-x^2/2}$ der Gaußschen Normalverteilung.

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen He_n für $n = 0, 1, 2, 3, 4$.



Die Hermite-Polynome sind orthogonal bezüglich des Skalarprodukts, dessen Gewichtsfunktion die Dichtefunktion w der Gaußschen Normalverteilung ist; für natürliche Zahlen m, n mit $m \neq n$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} He_m(x)\, He_n(x)\, e^{-x^2/2} dx = 0.$$

Für $m = n$ ist dieser Wert gleich $\sqrt{2\pi}\, n!$.

Tatsächlich bilden die Hermite-Polynome eine Orthogonalbasis des Hilbertraums $L^2_w(\mathbb{R})$ der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f mit $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2/2} dx < \infty$. Auch als Eigenfunktionen gewöhnlicher Differentialgleichungen spielen sie eine wichtige Rolle: Die Hermitesche Differentialgleichung

$$u'' - x\,u' + \lambda u = 0$$

mit einer Konstanten λ besitzt genau dann eine von Null verschiedene Lösung (die im Unendlichen nicht schneller wächst als ein Polynom), wenn λ eine nichtnegative ganze Zahl ist. Die Lösung ist dann im Wesentlichen eindeutig bestimmt, nämlich $u(x) = c\, He_\lambda(x)$. Das Titelbild dieses Monats ist ein Phasenporträt der Funktion $w(z) = e^{-z^2/2}\, He_{10}(z)$.

Charles Hermite (1822 – 1901)

war eines von sieben Kindern. Er wurde mit einem deformierten rechten Fuß geboren, was in seinem Leben eine wichtige Rolle spielen sollte. Nach dem Besuch des Collège de Nancy wurde er am Collège Henri und am Collège Louis-le-Grand in Paris unterrichtet. Die École Polytechnique musste er nach einem Jahr verlassen, weil ihm wegen seines deformierten Fußes die Fortsetzung des Studiums verwehrt wurde. Obwohl diese Entscheidung später revidiert wurde, wurde dies von Bedingungen abhängig gemacht, die für Hermite nicht akzeptabel waren.

1842 veröffentlichte Hermite einen Beweis des Abelschen Satzes über die Nicht-Auflösbarkeit von Gleichungen fünften Grades. Er korrespondierte mit Jacobi und freundete sich mit Joseph Bertrand an, dessen Schwester er später heiratete. Hermite wurde 1848 als Lehrbeauftragter an die École Polytechnique berufen und dort 1869 zum Professor ernannt. Von 1876 bis zu seinem Tod war er an der Université de Paris tätig. Die französische Académie des Sciences wählte Hermite 1856 zu ihrem Mitglied; im gleichen Jahr erkrankte er an Pocken.

Zu Hermites wichtigsten Arbeitsgebieten gehören Zahlentheorie, Algebra, elliptische Funktionen und orthogonale Polynome. Sein Name lebt in den Begriffen Hermite-Polynome, Hermite-Interpolation und hermitesche Matrizen fort. Auch die *Rue Charles Hermite* und der *Square Charles Hermite* im 18-ten Arrondissement von Paris sowie ein Mondkrater sind nach ihm benannt.

https://en.wikipedia.org/wiki/Hermite_polynomials und https://www2.stetson.edu/~efriedma/periodictable/html/Ir.html, abgerufen am 11. August 2019