

COMPLEX BEAUTIES

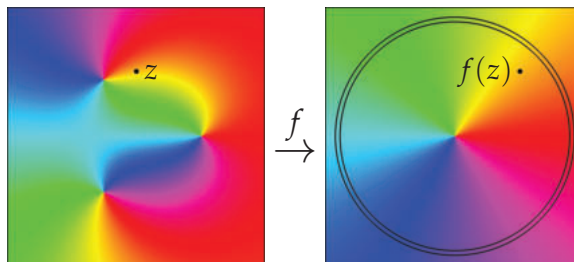
The image is a complex fractal artwork. The central focus is a large, multi-petaled flower-like shape with a vibrant rainbow gradient, transitioning from yellow and green at the top to red and purple at the bottom. This central motif is surrounded by smaller, similar fractal patterns that branch out towards the corners. The background consists of a light blue field with fine, concentric radial lines emanating from the center, creating a sense of depth and movement. The overall composition is highly detailed and colorful.

2020

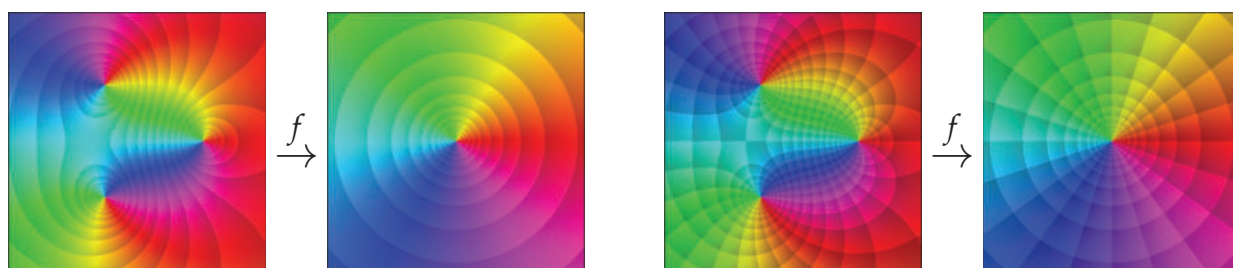
Komplexe Zahlen und Farben

In diesem Jahr feiern wir ein Jubiläum: Die *Complex Beauties* erscheinen zum zehnten Mal! Aus diesem Anlass haben wir uns erlaubt, das Phasenporträt des Titelbilds etwas zu verfremden, um Strukturen der dargestellten Funktion hervorzuheben und die Wirkung des Bildes zu verstärken. Ansonsten folgen wir der bewährten Tradition: Auf jedem Kalenderblatt wird eine spezielle Funktion vorgestellt; die Vorderseite zeigt ihr „Phasenporträt“, auf der Rückseite wird der mathematische Hintergrund erläutert. Wir versuchen dabei, auch ambitionierten Laien einen Einblick in klassische und moderne mathematische Themen zu geben, was mitunter durchaus eine Herausforderung ist. Auch wer nicht die Energie aufbringt, diese Texte zu lesen, kann sich hoffentlich an den Bildern erfreuen und vielleicht eine Vorstellung von den zugrundeliegenden mathematischen Strukturen entwickeln. Neben den fachlichen Erklärungen gibt es auch biographische Informationen über Mathematiker(innen), deren Forschungen mit den abgebildeten Funktionen im Zusammenhang stehen.

Die Konstruktion eines *Phasenporträts* beruht auf der Interpretation komplexer Zahlen als Punkte einer Ebene. Die horizontale Koordinate x eines Punktes, der die Zahl z repräsentiert, wird *Realteil* von z genannt, seine vertikale Koordinate y heißt *Imaginärteil* von z , und man schreibt $z = x + iy$. Alternativ lässt sich die Lage des Punktes auch durch seinen Abstand vom Koordinatenursprung ($|z|$, *Betrag* von z) und einen Winkel (*Argument* von z) angeben. Das Phasenporträt (im linken Bild) einer komplexen Funktion $w = f(z)$ entsteht, indem alle Punkte z ihres Definitionsbereiches nach dem Argument des Funktionswertes $f(z)$ gefärbt werden. Das kann man sich so vorstellen, dass zunächst die Farben des Farbkreises strahlenförmig vom Koordinatenursprung aus auf die Punkte der komplexen w -Ebene übertragen werden (rechtes Bild). Punkte mit gleichem Argument (oder gleicher *Phase* $w/|w|$) sind also gleich gefärbt. Im zweiten Schritt erhält dann jeder Punkt z des Definitionsbereichs von f die Farbe seines Funktionswertes $f(z)$ in der w -Ebene.



Das Phasenporträt kann als Fingerabdruck der Funktion betrachtet werden. Obwohl es nur einen Teil der Daten kodiert (das Argument) und den Betrag unterdrückt, können Funktionen einer wichtigen Klasse (*analytische* und allgemeiner *meromorphe* Funktionen) bis auf einen positiven Faktor aus ihrem Phasenporträt eindeutig rekonstruiert werden.



Mit Hilfe verschiedener Modifikationen der Farbkodierung lassen sich Eigenschaften der Funktion leichter ablesen. In diesem Kalender werden in der Regel drei Farbschemata verwendet: das oben erklärte Phasenporträt und die beiden in der unteren Abbildung gezeigten Varianten. Die linke Version bezieht auch den Betrag der Funktion in die Darstellung ein, die rechte verdeutlicht außerdem, dass die Funktion eine *winkeltreue Abbildung* vermittelt.

Eine mit Phasenporträts illustrierte Einführung in die Funktionentheorie gibt E. Wegert, *Visual Complex Functions – An Introduction with Phase Portraits*, Springer Basel 2012. Weitergehende Informationen zum Kalender (auch frühere Jahrgänge) und zum Buch findet man unter

www.mathe-kalender.de, www.visual.wegert.com.

Wir danken allen treuen Lesern und dem Verein der Freunde und Förderer der TU Bergakademie Freiberg e. V. für ihre wertvolle Unterstützung des Projekts. Unser besonderer Dank gilt Felix Ballani für hilfreiche Diskussionen zu den Themen der Monate Juni und September.