Prof. E. Wegert, Dr. G. Semmler
TU Bergakademie Freiberg
Sommersemester 2018

Analysis II

12. Aufgabenblatt: Koordinatentransformationen, Anwendungen der Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

1. Man berechne mit Hilfe geeigneter angepasster Koordinaten:

   (a) $\displaystyle\int\limits_G \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\, d(x,y)$ mit $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$,

   (b) $\displaystyle\int\limits_G (x^2+y^2)\, d(x,y,z)$ mit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -R \le x \le R,\ -\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2},\ 0 \le z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2}\}$.

2. Man berechne die Flächen, die von folgenden Kurven begrenzt werden:

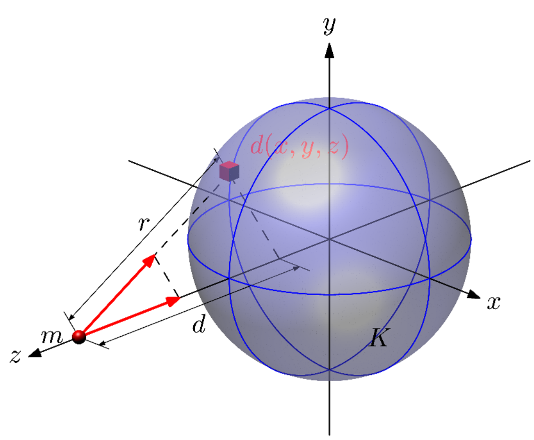
   (a) $r = a(1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $a > 0$ (Kardioide),

   (b) $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$, $-\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$, $a > 0$ (rechter Zweig der Lemniskate).

3. Man berechne die Koordinaten des Schwerpunkts des homogenen Körpers K, der von den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 3y = 12$ und dem Zylinder $z = y^2/2$ begrenzt wird. Hinweis: es gilt

$$x_s = \frac{1}{|K|}\int_K x\, d(x,y,z), \qquad y_s = \frac{1}{|K|}\int_K y\, d(x,y,z) \qquad z_s = \frac{1}{|K|}\int_K z\, d(x,y,z), \qquad |K| = \int_K d(x,y,z).$$

4. (a) Wir betrachten die von einer Kugel K auf eine Punktmasse m ausgeübte Gravitationskraft F. Die Kugel habe Radius R, homogen verteilte Masse M und der Mittelpunkt liege im Ursprung. Die Punktmasse liege im Punkt $(0,0,z_0)$ mit $z_0 > R$. Aus Symmetriegründen wirkt die Kraft auf m entlang der z-Achse.



Die Gravitationskraft zwischen m und einem Masseelement $dM = \varrho\, d(x,y,z)$ ist

$$\frac{\gamma m \varrho\, d(x,y,z)}{r^2},$$

wobei γ die Gravitationskonstante ist und r der Abstand zwischen (x,y,z) und $(0,0,z_0)$, also

$$r = \sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}.$$

Die Projektion dieser Kraft in Richtung z-Achse ist

$$\frac{d}{r}\frac{\gamma m\varrho\, d(x,y,z)}{r^2} = \frac{\gamma m\varrho(z_0 - z)\, d(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}^3}.$$

Wegen

$$\varrho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

erhalten wir schließlich als Gesamtkraft

$$F = \frac{3\gamma mM}{4\pi R^3}\int_K \frac{z_0 - z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}^3}\, d(x,y,z).$$

Berechnen Sie dieses Integral mit Hilfe von Kugelkoordinaten und zeigen Sie, daß die Kraftwirkung gleich der einer Punktmasse M im Ursprung ist.

(b) Was ist die Anziehungskraft, die eine Hohlkugel mit innerem Radius R_1 und äußerem Radius R_2 auf m ausübt? $(R_1 < R_2 < z_0)$

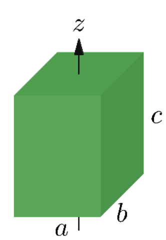
(c) Was ändert sich, wenn die Punktmasse im Inneren der Hohlkugel ist? $(z_0 < R_1 < R_2)$

5. Das Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers K mit Massendichte ϱ errechnet sich bei Rotation um die z-Achse nach der Formel

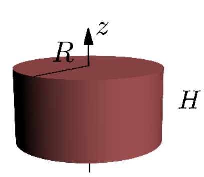
$$J = \int_K \varrho(x^2+y^2)\, d(x,y,z).$$

Berechnen Sie die Massenträgheitsmomente folgender Körper:

(a) Quader mit Seiten a, b, c und Masse m



(b) Vollzylinder mit Höhe H, Radius R und Masse m



(c) Kugel mit Radius R und Masse m