Prof. E. Wegert, Dr. G. Semmler
TU Bergakademie Freiberg
Sommersemester 2018

Analysis II

2. Aufgabenblatt: Topologische Grundbegriffe, Konvergenz und Vollständigkeit

1. Man untersuche, ob folgende Mengen in den metrischen Räumen $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $(0, \infty)$ (mit Euklidischer Metrik) jeweils offen oder abgeschlossen sind und gebe ihren Rand, ihr Inneres und ihre Abschließung in jedem Raum an.

   (a) $[1, 2]$,

   (b) $(0, 1]$,

   (c) $[1, \infty)$,

   (d) $(0, \infty)$.

2. Im Raum $\mathbb{R}^2$ versehen mit der üblichen Euklidischen Metrik bestimme man das Innere, den Rand, die Ableitung, die Abschließung und die isolierten Punkte folgender Mengen. Welche dieser Mengen sind offen oder abgeschlossen?

   (a) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$,

   (b) $\left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) : m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$.

3. Man gebe auf $\mathbb{R}$ versehen mit Euklidischer Metrik Beispiele für zwei offene Mengen A und B so an, dass die vier Mengen

   $$A \cap \overline{B}, \quad \overline{A} \cap B, \quad \overline{A \cap B}, \quad \overline{A} \cap \overline{B}$$

   paarweise voneinander verschieden sind.

4. Welche der folgenden Rechenregeln für Ableitung und Abschließung gelten für alle Teilmengen A, B eines beliebigen metrischen Raumes (X, d)? Beweisen oder widerlegen Sie!

   (a) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

   (b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

   (c) $A'' = A'$

   (d) $\overline{A}' = A'$

5. Welche der folgenden Aussagen gelten in allen metrischen Räumen (X, d)? Beweisen oder widerlegen Sie!

   (a) Der Rand ∂A jeder Teilmenge A eines metrischen Raumes ist abgeschlossen.

   (b) Die Menge der isolierten Punkte jeder Teilmenge A eines metrischen Raumes ist abgeschlossen.

   (c) Die Abschließung $\overline{A}$ jeder Teilmenge A eines metrischen Raumes ist gleich dem Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.

   (d) Die Abschließung $\overline{A}$ jeder Teilmenge A eines metrischen Raumes ist gleich dem Durchschnitt aller offenen Mengen, die A enthalten.

6. Im Raum $\mathbb{R}^n$ wird durch

$$d(x,y) := \begin{cases} d_2(x,0) + d_2(y,0), & x \neq y \\ \\ 0 & x = y \end{cases}$$

eine Metrik gegeben (Nachweis!). Man charakterisiere alle offenen und abgeschlossenen Mengen in $(\mathbb{R}^n, d)$.

7. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X, \varepsilon > 0$. Zeigen Sie

$$\partial U_\varepsilon(x_0) \subset \{x \in X : d(x, x_0) = \varepsilon\}.$$

Geben Sie ein Beispiel an, in dem beide Mengen nicht gleich sind.

8. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Man zeige für $r > 0$ und $x \in X$

$$\overline{U_r(x)} \subset B_r(x).$$

Gilt hier sogar Gleichheit?

9. In einem metrischen Raum (X, d) gelte für gewisse $x, y \in X$ und $\delta, \varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon(x) = U_\delta(y).$$

Folgt dann $x = y$? Oder $\delta = \varepsilon$?

10. Man gebe einen metrischen Raum (X, d) an, in dem abgeschlossene Kugeln $B_r(a)$ und $B_R(b)$ mit $a, b \in X, 0 < r < R$ und $B_R(b) \subsetneqq B_r(a)$ existieren.

11. Man zeige, daß ein abgeschlossener Teilraum eines vollständigen metrischen Raumes vollständig ist.

12. Wir betrachten noch einmal den Raum X aller Folgen $x = (x_k)_{k \geq 1}$ mit der Metrik

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \min(|x_k - y_k|, 1), \qquad x, y \in X.$$

Zeigen Sie, daß eine Folge $x^{(n)} = (x_k^{(n)})$ genau dann gegen $x = (x_k)$ konvergiert, wenn $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ für alle $k = 1, 2, \ldots$ gilt.