Prof. E. Wegert, Dr. G. Semmler
TU Bergakademie Freiberg
Sommersemester 2018

Analysis II

7. Aufgabenblatt: Lineare Abbildungen, Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

1. Seien $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Wir betrachten den linearen Operator $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $Ax = y$ falls
$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \qquad i = 1, \ldots, m.$$
Zeigen Sie nun:
   (a) Falls man $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ mit den Summennormen
   $$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|, \qquad \|y\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |y_i|$$
   versieht, so gilt
   $$\|A\| = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$
   (b) Falls man $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ mit den Maximumsnormen
   $$\|x\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |x_j|, \qquad \|y\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} |y_i|$$
   versieht, so gilt
   $$\|A\| = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

2. Gegeben seien $0 \le x_1 < \ldots < x_n \le 1$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Man bestimme die Norm $\|A\|$ des linearen Operators $A : C[0,1] \to \mathbb{R}$ mit
$$Af := \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k), \qquad f \in C[0,1].$$

3. Man zeige, daß durch folgende Vorschriften für $f \in C[0,1]$ und $x \in [0,1]$ ein beschränkter linearer Operator $A : C[0,1] \to C[0,1]$ definiert wird, berechne seine Norm und beurteile seine Invertierbarkeit.
   (a) $(Af)(x) := f(1-x)$,
   (b) $(Af)(x) := xf(x)$,
   (c) $(Af)(x) = f(\varphi(x))$ mit fixiertem, stetigen $\varphi : [0,1] \to [0,1]$,
   (d) $(Af)(x) = \varphi(x)f(x)$ mit fixiertem $\varphi \in C[0,1]$.

4. Man berechne die partiellen Ableitungen folgender Funktionen nach jeder Variablen.

   (a) $f(x, y) = x^3 y - y^3 x$,

   (b) $f(x, y, z) = \ln(x + \ln y)$,

   (c) $f(x, y) = 2\sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{xy}}{1 + \sqrt{xy}}}$,

   (d) $f(x, y) = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$,

   (e) $f(x, y) = \arctan(x^2 y) + \arctan(xy^2)$.

5. Untersuchen Sie folgende Funktionen in $(0, 0)$ auf Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit:

   (a)
$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   (b)
$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y) \cos \frac{1}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6. Man zeige, daß folgende Funktionen F-differenzierbar in ihrem Definitionsbereich sind und berechne ihre Jacobi-Matrizen.

   (a) $f(x, y) = x^2 y - y^2 x$ auf $\mathbb{R}^2$,

   (b) $f(x) = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{x} \\ 1/\sqrt[3]{x} \\ \sqrt[x]{3} \end{pmatrix}$ für $x > 0$,

   (c) $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{xy^2} \\ \ln(xy) - e^{yz} \end{pmatrix}$ für $x, y > 0$,

   (d) $f(x, y, z) = \sin(xy^2) - \cos(xyz)$ auf $\mathbb{R}^3$.

7. Man untersuche die Funktion
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$
   im Punkt $(0, 0)$ auf partielle Differenzierbarkeit und F-Differenzierbarkeit.

8. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x, y) = \begin{cases} \left(1 - \cos \frac{x^2}{y}\right) \sqrt{x^2 + y^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$
   Zeigen Sie, daß f im Ursprung stetig ist, alle Richtungsableitungen existieren, aber f nicht F-differenzierbar ist.