

## Analysis III

### 5. Aufgabenblatt: Klassische Fourierreihen

1. Zeigen Sie für den Dirichletkern

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt}$$

die Darstellung

$$D_n(t) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}.$$

2. Zeigen Sie für den Fejérkern

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \sum_{k=-j}^j e^{ikt}$$

die Darstellung

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin^2 \frac{t}{2}}.$$

3. Man bestimme die klassischen Fourierreihen folgender Funktionen (die man sich stets  $2\pi$ -periodisch fortgesetzt denken muß) und kommentiere ihr Konvergenzverhalten.

(a)  $f(x) = |x|$  für  $x \in (-\pi, \pi]$ ,

(b)  $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ .

4. Man beweise, daß sich die Fourierreihe jeder Funktion  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  über jedes reelle Intervall  $(\alpha, \beta) \subset (-\pi, \pi)$  gliedweise integrieren läßt, d.h. es gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx.$$