Prof. E. Wegert, Dr. G. Semmler
TU Bergakademie Freiberg
Sommersemester 2018

Analysis III

8. Aufgabenblatt: Sätze von Baire und seine Konsequenzen

1. Zeigen Sie für eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d): A ist genau dann nirgends dicht, wenn für jede nichtleere, offene Menge $B \subset X$ die Menge $B \setminus \overline{A}$ nicht leer ist.

2. (a) Man zeige, daß die Menge der rationalen Zahlen im Raum $\mathbb{R}$ eine Menge erster Kategorie ist.

   (b) Man zeige, daß die Menge der irrationalen Zahlen im Raum $\mathbb{R}$ eine Menge zweiter Kategorie ist.

   (c) Man zeige, daß eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die an allen rationalen Punkten stetig und an allen irrationalen Punkten unstetig ist, nicht möglich ist.

   (d) Man gebe eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die an allen rationalen Punkten unstetig und an allen irrationalen Punkten stetig ist.

3. Begründen Sie: Jeder metrische Raum mit endlich vielen Punkten ist von zweiter Kategorie!

4. Man zeige, daß ein Banachraum unendlicher Dimension keine abzählbare (Vektorraum-)Basis besitzt. Folglich gibt es keine Norm, die den Polynomraum $\mathbb{R}[x]$ zu einem Banachraum macht.

5. Sei (a_n) eine reelle Folge, so daß für alle $(x_n) \in c_0$ (bzw. $(x_n) \in \ell^1$) die Reihe $\sum_n a_n x_n$ konvergiert. Man beweise, daß $(a_n) \in \ell^1$ (bzw. $(a_n) \in \ell^\infty$).

6. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, daß Fourierreihen stetiger, 2π-periodischer Funktionen nicht unbedingt in allen Punkten $t \in \mathbb{R}$ konvergieren. Dazu betrachte man die Funktionale $S_n : C_{2\pi}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, die jeder stetigen, 2π-periodischen Funktion f den Wert der n-ten Partialsumme im Nullpunkt zuordnet:

$$S_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k, \quad c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx.$$

   Aus der Vorlesung ist bekannt, daß $S_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) f(x)\, dx$, wobei

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}$$

   der Dirichlet-Kern ist. Man zeige nun:

   (a) $\|S_n\| = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx$

   (b) Konvergiert die Fourierreihe aller Funktionen $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, so ist $\sup_n \|S_n\| < \infty$

   (c) $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx = \infty$

   (d) Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt es eine Funktion $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, deren Fourierreihe im Punkt x_0 divergiert.

7. Sei E der normierte Raum aller finiten Folgen $x = (x_n)$, d.h. ab einem gewissen Index $n_0(x)$ verschwindem alle Folgeglieder x_n, versehen mit der Norm

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}.$$

Auf E ist durch

$$f_n(x) := n x_n$$

eine Folge von linearen Funktionalen gegeben. Man beweise die Beziehungen

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty \qquad \forall x \in E, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| = \infty.$$

Wie vereinbart sich das mit dem Satz von Banach-Steinhaus?

8. Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf dem linearen Raum E und sind die normierten Räume $(E, \|\cdot\|_1)$ und $(E, \|\cdot\|_2)$ vollständig, und gilt $\|x\|_2 \leq C\,\|x\|_1$ für alle $x \in E$, so sind beide Normen äquivalent.

9. Seien E, F, G Banachräume, $A : E \to F$ sei linear, $B : F \to G$ sei linear, beschränkt und injektiv, und BA sei ebenfalls beschränkt. Man zeige, daß auch A beschränkt ist.

   Hinweis: Satz vom abgeschlossenen Graphen