Prof. E. Wegert, Dr. G. Semmler
TU Bergakademie Freiberg
Sommersemester 2018

Analysis III

9. Aufgabenblatt: Kompakte Operatoren

1. Sei $A : X \to Y$ ein kompakter Operator von einem unendlichdimensionalen Banachraum X in den normierten Raum Y. Man zeige, daß es eine Folge (x_n) in X gibt mit $\|x_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\lim_{n\to\infty} Ax_n = 0$.

2. Jeder kompakte Operator $A : H \to H$ eines separablen Hilbertraumes H in sich ist Grenzwert endlichdimensionaler Operatoren.

3. Im Raum ℓ^p $(1 \le p < \infty)$ sei ein Operator A durch

$$A(x_n) = (a_n x_n) \quad (x_n) \in \ell^p$$

   gegeben, wobei (a_n) eine feste beschränkte Folge reeller Zahlen ist. Man zeige, daß A genau dann kompakt ist, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. Im Raum $C[0,1]$ ist ein linearer Operator A durch $Af(x) = xf(x)$ gegeben. Zeigen Sie: A ist beschränkt, aber nicht kompakt.

5. Sei E ein unendlichdimensionaler Banachraum und $A, B \in \mathcal{L}(E)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?
   (a) Ist AB kompakt, dann ist wenigstens einer der Operatoren A, B kompakt.
   (b) Gilt $A^2 = 0$, so ist A kompakt.
   (c) Gilt $A^n = I$ für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$, so ist A nicht kompakt.

Lösung zu Blatt 7:

2. (a) Wir gehen induktiv vor. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Ist die Darstellung für K^n bereits bewiesen, so finden wir für $f \in CL^2(a,b)$

$$\begin{aligned} K^{n+1}f(t) &= \int_a^b k(t,s)K^n f(s)\,ds = \int_a^b k(t,s)\int_a^b k_n(s,\tau)f(\tau)\,d\tau\,ds \\ &= \int_a^b\int_a^b k(t,s)k_n(s,\tau)\,ds\,f(\tau)\,d\tau = \int_a^b k_{n+1}(t,\tau)f(\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

(b) Wegen

$$\begin{aligned} \|k_n\|_2 &= \left\{\int_a^b\int_a^b |k_n(t,s)|^2\,dt\,ds\right\}^{1/2} = \left\{\int_a^b\int_a^b \left|\int_a^b k(t,\tau)k_{n-1}(\tau,s)\,d\tau\right|^2\,dt\,ds\right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{\int_a^b\int_a^b\int_a^b |k(t,\tau)|^2\,d\tau\int_a^b |k_{n-1}(\tau,s)|^2\,d\tau\,dt\,ds\right\}^{1/2} \\ &= \left\{\int_a^b\int_a^b |k(t,\tau)|^2\,d\tau\,dt\int_a^b\int_a^b |k_{n-1}(\tau,s)|^2\,d\tau\,ds\right\}^{1/2} = \|k\|_2\|k_{n-1}\|_2 \end{aligned}$$

folgt induktiv

$$\|k_n\|_2 \leq \|k\|_2^n, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Weil

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^n\|k_n\|_2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|\lambda|\|k\|_2)^n < \infty,$$

konvergiert die Reihe $\widetilde{k} := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n k_n$ in $L^2((a,b)^2)$ und stellt somit eine L^2-Funktion in diesem Raum dar. Andererseits finden wir nach dem Satz über die Neumannsche Reihe

$$(I - \lambda K)^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K^n.$$

Wir zeigen nun für $f \in L^2(a,b)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K^n f(t) = \int_a^b \widetilde{k}(t,s)f(s)\,ds. \tag{1}$$

Nach Aufgabe (a) ist klar daß

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda^n K^n f(t) = \int_a^b \sum_{n=1}^{N} \lambda^n k_n(t,s)f(s)\,ds.$$

Daher

$$\begin{aligned}
&\left\{\int_a^b \left|\int_a^b \widetilde{k}(t,s)f(s)\,ds - \sum_{n=1}^{N} \lambda^n K^n f(t)\right|^2 dt\right\}^{1/2} \\
&= \left\{\int_a^b \left|\int_a^b \widetilde{k}(t,s)f(s)\,ds - \int_a^b \sum_{n=1}^{N} \lambda^n k_n(t,s)f(s)\,ds\right|^2 dt\right\}^{1/2} \\
&= \left\{\int_a^b \left|\int_a^b \left(\widetilde{k}(t,s) - \sum_{n=1}^{N} \lambda^n k_n(t,s)\right) f(s)\,ds\right|^2 dt\right\}^{1/2} \\
&\leq \left\{\int_a^b \int_a^b \left|\widetilde{k}(t,s) - \sum_{n=1}^{N} \lambda^n k_n(t,s)\right|^2 ds\,dt\right\}^{1/2} \left\{\int_a^b |f(s)|^2\,ds\right\}^{1/2}
\end{aligned}$$

Wegen der L^2-Konvergenz der Reihe von $\widetilde{k}$ folgt für $N \to \infty$ die Behauptung (1). Also ist

$$f(t) = (I - \lambda K)^{-1} g(t) = g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K^n g(t) = g(t) + \int_a^b \widetilde{k}(t,s)\,g(s)\,ds.$$