Dr. G. Semmler
TU Bergakademie Freiberg

Klausur Gewöhnliche Differentialgleichungen für Naturwissenschaftler

15. 3. 2018

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$t \ln t \cdot x' - x = 3t^3 \ln^2 t$$

für $t > 0$.

Lösung: Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Wir lösen zuerst die zugehörige homogene Gleichung durch Trennung der Veränderlichen:

$$\begin{aligned} t \ln t \cdot x' - x &= 0 \\ t \ln t \cdot \frac{dx}{dt} &= x \\ \frac{dx}{x} &= \frac{dt}{t \ln t} \\ \int \frac{dx}{x} &= \int \frac{dt}{t \ln t} \end{aligned}$$

Zur Lösung des rechten Integrals substituieren wir $s = \ln t$, damit $ds = \frac{dt}{t}$, und erhalten

$$\begin{aligned} \ln|x| &= \int \frac{ds}{s} = \ln|s| + C = \ln|\ln t| + C \\ x &= C \ln t. \end{aligned}$$

In die inhomogene Gleichung gehen wir nun mit dem Ansatz $x(t) = C(t) \ln t$ zur Variation der Konstanten ein:

$$\begin{aligned} t \ln t \left(C' \ln t + C \frac{1}{t} \right) - C \ln t &= 3t^3 \ln^2 t \\ C' t \ln^2 t &= 3t^3 \ln^2 t \\ C' &= 3t^2 \\ C(t) &= \int 3t^2 \, dt = t^3 + D \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also

$$x(t) = (t^3 + D) \ln t.$$

2. Gegeben sei das homogene Differentialgleichungssystem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} x.$$

(a) Finden Sie die allgemeine Lösung dieses Differentialgleichungssystems.

(b) Klassifizieren Sie den Gleichgewichtspunkt im Ursprung hinsichtlich seines Stabilitätscharakters. Wie verhalten sich die Lösungen für $t \to +\infty$?

Lösung:

(a) Wir ermitteln zuerst die Eigenwerte der Systemmatrix:

$$0 = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (7+\lambda)(5+\lambda) + 2 = \lambda^2 + 12\lambda + 37$$

hat die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36-37} = -6 \pm i.$$

Ein Eigenvektor v_1 zu $\lambda_1 = -6 + i$ ist Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}.$$

Trennt man die komplexwertige Lösung

$$e^{(-6+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = e^{-6t}(\cos t + i \sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = e^{-6t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + i e^{-6t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix} \tag{1}$$

in Real- und Imaginärteil, erhält man ein reellwertiges Fundamentalsystem und damit als allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1 e^{-6t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2 e^{-6t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}.$$

(λ_2 liefert nur die zu (1) komplex-konjugierte Lösung und braucht daher nicht weiter betrachtet werden.)

(b) Wegen $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = -6 < 0$ ist der Ursprung asymptotisch stabil, genauer gesagt handelt es sich um einen stabilen Strudel. Für $t \to +\infty$ konvergieren alle Lösungen gegen $(0,0)$.

3. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x'' + 3x' + 2x = f(t), \qquad x(0) = x'(0) = 0$$

mit der rechten Seite

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 10, \\ 0, & t \ge 10 \end{cases}$$

mit Hilfe der Laplacetransformation.

Lösung: Benutzen wir die bekannte Hilfsfunktion

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t \ge c, \end{cases}$$

so finden wir als Laplacetransformierte der rechten Seite

$$(\mathcal{L}f)(s) = \mathcal{L}(u_0(t) - u_{10}(t))(s) = \mathcal{L}(1)(s) - e^{-10s}\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1-e^{-10s}}{s}.$$

Damit können wir nun die ganze Differentialgleichung transformieren, wobei $F(s) = (\mathcal{L}x)(s)$ bezeichnet sei:

$$\begin{aligned} s^2F(s) + 3sF(s) + 2F(s) &= \frac{1-e^{-10s}}{s} \\ F(s) &= \frac{1-e^{-10s}}{s(s^2+3s+2)} \end{aligned}$$

Zur Gewinnung der Rücktransformation führen wir zunächst eine Partialbruchzerlegung aus:

$$\frac{1}{s(s^2+3s+2)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

ergibt nach Multiplikation mit dem Hauptnenner

$$\begin{aligned} 1 &= A(s+1)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s+1) = A(s^2+3s+2) + B(s^2+2s) + C(s^2+s) \\ &= (A+B+C)s^2 + (3A+2B+C)s + 2A, \end{aligned}$$

und nach Koeffizientenvergleich

$$A+B+C = 0, \qquad 3A+2B+C = 0, \qquad 2A = 1.$$

Wir ermitteln $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$. Nun kann die Rücktransformation ausgeführt werden:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{e^{-10s}}{2s} + \frac{e^{-10s}}{s+1} - \frac{e^{-10s}}{2(s+2)}\right)(t) \\ &= \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}u_{10}(t) + u_{10}(t)e^{-(t-10)} - \frac{1}{2}u_{10}(t)e^{-2(t-10)} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}, & 0 \le t < 10, \\ -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-t+10} - \frac{1}{2}e^{-2t+20}, & t \ge 10. \end{cases} \end{aligned}$$

4. Gegeben sei das nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 - xy^2 \\ y' &= -2x^2y - y^3. \end{aligned}$$

   (a) Finden Sie alle Fixpunkte dieses Systems.

   (b) Untersuchen Sie die Fixpunkte auf Stabilität. Wenden Sie dazu die Methode der Lyapunovfunktion an.

   Lösung:

   (a) Die Fixpunkte ergeben sich als Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 0 &= -x^3 - xy^2 = -x(x^2+y^2) \\ 0 &= -2x^2y - y^3 = -y(2x^2+y^2). \end{aligned}$$

   Es folgt $(x, y) = (0, 0)$, daher ist der Ursprung der einzige Fixpunkt.

   (b) Wir wollen zeigen, dass $V(x, y) = x^2 + y^2$ eine strenge Lyapunov-Funktion ist. Es gilt:

   - $V(0, 0) = 0$
   - $V(x, y) > 0$ *für* $(x, y) \neq (0, 0)$
   - *für* $(x, y) \neq (0, 0)$ *ist*

$$\operatorname{grad} V(x, y) \cdot f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x^3 - xy^2 \\ -2x^2y - y^3 \end{pmatrix} = -2x^4 - 6x^2y^2 - 2y^4 < 0.$$

   Aus der Existenz einer strengen Lyapunov-Funktion folgt, dass der Fixpunkt asymptotisch stabil ist.