

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Klausur

- Wir wollen die Wärmeleitung in einem Zylinder $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq H\}$ mit Radius R und Höhe H betrachten, der vollständig isoliert ist. Es liegt eine Quelle vor.
 - Welche Differentialgleichung müssen wir benutzen? Sie kann in kartesischen Koordinaten angegeben werden.
 - Welche angepaßten Koordinaten sind zu wählen?
 - Wie sieht eine geeignete Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$ in angepaßten Koordinaten aus?
 - Formulieren Sie die Randbedingung für alle Zeiten $t \geq 0$ in angepaßten Koordinaten für die verschiedenen Teile des Randes!
 - Auf welche Verträglichkeitsbedingung ist zu achten?
 - Wieviele Schritte sind bei der Methode des Separationsansatzes notwendig? Schreiben Sie für jeden Schritt den Separationsansatz auf.

- Wir betrachten eine schwingende Saite auf dem Intervall $[0, 1]$, beschrieben durch die Gleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

unter den Randbedingungen

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad (t \geq 0).$$

- Was wird durch die Randbedingungen modelliert?
- Lösen Sie die Gleichung unter den gegebenen Randbedingungen mit Hilfe eines Separationsansatzes!
- Wie sieht die Lösung aus, wenn zusätzlich die Anfangsbedingungen

$$u(0, x) = \sin(\pi x), \quad u_t(0, x) = \sin(2\pi x)$$

vorgegeben sind?

- Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$\Delta^2 u = 0, \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2,$$

in einer rechteckigen Geometrie $G = \{(x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}$, $a, b > 0$.

- a) Was wird durch diese partielle Differentialgleichung modelliert?
 b) Geben Sie zwei Arten möglicher Randbedingungen an! Was wird durch sie jeweils modelliert?
 c) Für welche $c, d \in \mathbb{R}$ ist

$$u_p(x, y) = \sin(cx) \sin(dy)$$

eine Lösung des Eigenwertproblems

$$\Delta^2 u = \lambda u$$

$$u_p(0, y) = u_p(a, y) = 0, \quad \partial_x^2 u_p(0, y) = \partial_x^2 u_p(a, y) = 0, \quad (y \in [0, b]),$$

$$u_p(x, 0) = u_p(x, b) = 0, \quad \partial_y^2 u_p(x, 0) = \partial_y^2 u_p(x, b) = 0, \quad (x \in [0, a])?$$

4. Gegeben sei das Cauchy-Problem

$$u_t = e^{-t} u_{xx}, \quad u(0, x) = f(x), \quad t \geq 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Leiten Sie mit Hilfe der partiellen Fouriertransformation eine Lösungsdarstellung her!