TU Bergakademie Freiberg
Institut für Angewandte Analysis
Prof. Dr. M. Reissig
Dr. G. Semmler

31. 3. 2011

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Klausur

1. Wir wollen die Wärmeleitung im Würfel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ betrachten. Die in den Ebenen $z = 0$ und $z = 1$ liegenden Seitenflächen seien dabei vollständig isoliert, die restlichen vier Seitenflächen haben alle eine konstante Temperatur T_0. Es liegt keine Quelle vor.

   a) Schreiben Sie die zu betrachtende partielle Differentialgleichung auf.

   b) Zur Zeit $t = 0$ sei die Temperaturverteilung im Würfel bekannt. Formulieren Sie eine entsprechende Anfangsbedingung!

   c) Formulieren Sie die Randbedingung für alle Zeiten $t \geq 0$ für die verschiedenen Teile des Randes! Um welche Art von Randbedingung handelt es sich jeweils?

   d) Wieviele Schritte sind bei der Methode des Separationsansatzes notwendig? Schreiben Sie für jeden Schritt den Separationsansatz auf.

2. Wir wollen die Laplacegleichung im halbunendlichen Streifen

$$\triangle u = 0, \qquad 0 < y < 1, x > 0$$

   unter den Randbedingungen

$$\begin{aligned} &u(x,0) = u(x,1) = 0, \qquad x > 0 \\ &u(0,y) = f(y), \qquad 0 < y < 1 \\ &\lim_{x\to+\infty} u(x,y) = 0, \qquad 0 < y < 1 \end{aligned}$$

   betrachten. Dabei ist $f(y)$ eine gegebene Vergleichsfunktion, für die der Entwicklungssatz gilt.

   a) Was wird durch diese Gleichungen modelliert?

   b) Lösen Sie die Laplacegleichung unter den gegebenen Randbedingungen mit Hilfe der Fourierschen Methode!

3. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} = \triangle^2 u \ , \ \ \triangle = \partial_x^2 + \partial_y^2 \ ,$$

   in der Kreisscheibe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$.

   a) Was wird durch diese partielle Differentialgleichung modelliert?

b) Welche angepaßten Koordinaten sind für dieses Problem zu verwenden?

c) Schreiben Sie eine Art möglicher Randbedingungen in angepaßten Koordinaten auf. Was wird durch sie modelliert?

d) Wie viele Anfangsbedingungen lassen sich stellen? Formulieren Sie sie wieder in angepaßten Koordinaten.

4. Gegeben sei das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx} + t, \qquad x > 0, t > 0 \\
&u(0, t) = 0, \qquad t > 0, \\
&u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 1, \qquad x > 0 \\
&\lim_{x \to +\infty} u(x, t) \text{ ist endlich für jedes } t > 0.
\end{aligned}$$

Leiten Sie mit Hilfe der Laplacetransformation bezüglich der Variablen t eine Lösungsdarstellung her!

Hinweis: $L(t) = \dfrac{1}{s^2}$.