TU Bergakademie Freiberg
Institut für Angewandte Analysis
Prof. Dr. M. Reissig
Dr. G. Semmler

16. 7. 2013

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Klausur

1. Wir wollen die Wärmeleitung in einem Würfel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ betrachten. Es liegt eine Quelle vor.
   a) Schreiben Sie die zu betrachtende partielle Differentialgleichung auf.
   b) Wie sieht eine geeignete Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$ aus?
   c) Formulieren Sie die Randbedingung für alle Zeiten $t > 0$ für alle 6 Seitenflächen! Dabei sind vier dieser Seitenflächen vollständig isoliert, an den beiden anderen erfolgt freier Wärmeübergang mit bekannter relativer Wärmeübergangszahl h und Außentemperatur T_0.
   d) Wieviele Schritte sind bei der Methode des Separationsansatzes notwendig? Schreiben Sie die entsprechenden Ansätze auf.

2. Wir wollen die Laplacegleichung im halbunendlichen Streifen

$$\triangle u = 0, \qquad x > 0, \quad 0 < y < 1$$

   unter den Randbedingungen

$$\begin{aligned} &u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \qquad x > 0 \\ &u(0, y) = g(y), \qquad 0 < y < 1 \\ &\lim_{x \to +\infty} u(x, y) = 0, \qquad 0 < y < 1 \end{aligned}$$

   betrachten. Dabei ist $g(y)$ eine gegebene Vergleichsfunktion, für die der Entwicklungssatz gilt.
   a) Was wird durch diese Gleichungen modelliert?
   b) Lösen Sie die Laplacegleichung unter den gegebenen Randbedingungen mit Hilfe der Fourierschen Methode (Separationsansatz und Superposition der Produktlösungen)!

3. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} = \triangle u - k u_t\ , \quad \triangle = \partial_x^2 + \partial_y^2\ ,$$

   im Kreis $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < R^2\}$.
   a) Was wird durch diese partielle Differentialgleichung modelliert?
   b) Welche angepaßten Koordinaten sind für dieses Problem zu verwenden?

c) Wie viele Anfangsbedingungen lassen sich stellen? Formulieren Sie sie in angepaßten Koordinaten.

d) Schreiben Sie mindestens zwei Arten von Randbedingungen in angepaßten Koordinaten auf.

e) Geben Sie das zugehörige stationäre Problem an.

4. Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Wenden Sie die Definition der Fouriertransformierten einer Funktion zur Berechnung von $F(g)(\xi)$ an.

b) Lösen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation das Cauchy-Problem

$$u_t = u_{xx} + g(x), \qquad u(0,x) = f(x), \qquad t > 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

(Falls a) nicht gelöst wurde, kann hier auch mit einer allgemeinen Fouriertransformierten $F(g)(\xi)$ gerechnet werden.)