TU Bergakademie Freiberg
Institut für Angewandte Analysis
Prof. Dr. M. Reissig
Dr. G. Semmler

16. 3. 2016

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Klausur

1. Wir betrachten die Wärmeleitung im Simplex

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, \quad 0 \leq y, \quad 0 \leq z, \quad x + y + z \leq 1\}$$

bei Vorliegen einer Quelle $f(x, y, z)$.

a) Schreiben Sie die zu betrachtende partielle Differentialgleichung auf.

b) Wie sehen geeignete Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ aus?

c) Auf den Seitenflächen des Simplex, die in den Koordinatenebenen liegen, sei freier Wärmeübergang möglich, die schräge Seitenfläche sei isoliert. Schreiben Sie die entsprechenden Randbedingungen in kartesischen Koordinaten auf und benennen Sie Ihre Art.

d) Wieviele Schritte erfordert ein Separationsverfahren zur Lösung dieser partiellen Differentialgleichung? Geben Sie die entsprechenden Ansätze an.

e) Geben Sie das zugehörige stationäre Modell an, sofern es existiert.

2. Wir untersuchen die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} = \Delta u$$

für $u = u(t, r, \varphi, \vartheta)$ mit Koordinaten $R < r < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$, $t > 0$.

a) Was modelliert diese partielle Differentialgleichung? In welcher Geometrie ist sie gestellt?

b) Wieviele Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ kann man hier fordern? Formulieren Sie sie in den gegebenen Koordinaten.

c) Geben Sie eine mögliche Randbedingung an. Welche weitere Bedingung muß sinnvollerweise noch hinzugenommen werden?

d) Welche weitere Bedingung bezüglich φ ist zu berücksichtigen? Schreiben Sie diese ebenfalls auf.

3. Die Ladungsverteilung in einem eindimensionalen Halbleiter wird beschrieben durch die partielle Differentialgleichung

$$u_t = u_{xx} - u_x, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

mit den Nebenbedingungen

$$u(x, 0) = f(x), \qquad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

a) Die Gleichung soll durch einen Ansatz der Form

$$u(x, t) = e^{ax-bt} v(x, t)$$

mit $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$ gelöst werden. Welche partielle Differentialgleichung ergibt sich dabei für v?

b) Bestimmen Sie zu der erhaltenen Gleichung für v noch Anfangs- und Randbedingungen.

c) Lösen Sie nun diese Gleichung für v mittels der Fourierschen Methode und geben Sie anschließend die Lösung u der unsprünglichen Gleichung an.

4. Gegeben sei das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x), \qquad u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = 0, \qquad t > 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Leiten Sie mit Hilfe der partiellen Fouriertransformation eine Lösungsdarstellung her! Was ergibt sich speziell für $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$?