TU Bergakademie Freiberg
Institut für Angewandte Analysis
Prof. Dr. M. Reissig
Dr. G. Semmler

22. 3. 2017

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Klausur – Lösungen

1. a) $0 = u_{tt} + \triangle^2 u = u_{tt} + u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}$

   b) Polarkoordinaten r, φ

   c) $u(0, r, \varphi) = u_1(r, \varphi)$, $u_t(0, r, \varphi) = u_2(r, \varphi)$,

   d) 2 Randbedingungen: $u(t, R, \varphi) = u_3(t, \varphi)$, $u_r(t, R, \varphi) = u_4(t, \varphi)$,
   auch möglich ist $u(t, R, \varphi) = u_3(t, \varphi)$, $\triangle u(t, R, \varphi) = u_4(t, \varphi)$,

   e) 2 Schritte: $u(t, r, \varphi) = T(t)w(r, \varphi)$, $w(r, \varphi) = \varrho(r)\Phi(\varphi)$

   f) stationäres Modell existiert, wenn Randbedingungen zeitunabhängig sind:

$$\triangle^2 u = 0, \qquad u(R, \varphi) = u_3(\varphi), \qquad u_r(R, \varphi) = u_4(\varphi)$$

2. a) Saitenschwingungsgleichung mit Dämpfung

   b) $f(0) = f(\pi) = 0$, $g(0) = g(\pi) = 0$

   c) Ansatz: $u(x, t) = X(x)T(t)$

$$\begin{aligned} X(x)T''(t) - a^2X''(x)T(t) + 2kX(x)T'(t) &= 0 \\ X(T'' + 2kT') &= a^2X''T \\ \frac{X''}{X} &= \frac{T'' + 2kT'}{a^2T} = \lambda \end{aligned}$$

gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$X'' - \lambda X = 0 \qquad (1)$$
$$T'' + 2kT' - a^2\lambda T = 0 \qquad (2)$$

Lösen zuerst (1) unter den Randbedingungen $X(0) = X(\pi) = 0$. Die übliche Fallunterscheidung ergibt, daß es nur für $\lambda < 0$ Lösungen gibt, die allgemeine Lösung in diesem Fall ist

$$X(x) = C\cos(\sqrt{-\lambda}x) + D\sin(\sqrt{-\lambda}x),$$

Einsetzen der Randbedingungen führt auf $0 = X(0) = C$ und

$$0 = X(\pi) = D\sin(\sqrt{-\lambda}\pi),$$

daher $\sqrt{-\lambda}\pi = n\pi$, wir haben also die Eigenwerte

$$\lambda_n = -n^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

und die Eigenfunktionen

$$X_n(x) = \sin(nx), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Damit lautet nun (2)

$$T'' + 2kT' + a^2n^2T = 0,$$

wir lösen die Gleichung mit dem Ansatz $T(t) = e^{\mu t}$, was auf die charakteristische Gleichung

$$\mu^2 + 2k\mu + a^2n^2 = 0$$

führt. Die Lösungen lauten

$$\mu_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - a^2n^2} = -k \pm i\sqrt{a^2n^2 - k^2}.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\delta_n := \sqrt{a^2n^2 - k^2}$, erhalten wir

$$T_n(t) = e^{-kt}\left(C_n \cos \delta_n t + D_n \sin \delta_n t\right).$$

Also sind

$$u_n(x,t) = \sin(nx)\, e^{-kt}\left(C_n \cos \delta_n t + D_n \sin \delta_n t\right)$$

die Produktlösungen und Superposition ergibt

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\, e^{-kt}\left(C_n \cos \delta_n t + D_n \sin \delta_n t\right).$$

Einsetzen der ersten Anfangsbedingung:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx),$$

also sind die Fourierkoeffizienten

$$C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Einsetzen der zweiten Anfangsbedingung:

$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)(-kC_n + \delta_n D_n),$$

und damit

$$-kC_n + \delta_n D_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx \qquad \Rightarrow \qquad D_n = \frac{kC_n}{\delta_n} + \frac{2}{\pi\delta_n}\int_0^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx.$$

3. a) Wärmeleitung im Zylinder, instationär, ohne Quelle

   b) Zylinderkoordinaten r, φ, h

   c) eine Randbedingung, RB erster Art modellieren vorgegebene Temperaturverteilung auf dem Rand:

   $$u(t,r,\varphi,0) = u_1(t,r,\varphi), \qquad u(t,r,\varphi,H) = u_2(t,r,\varphi) \qquad u(t,R,\varphi,h) = u_3(t,\varphi,h)$$

   RB dritter Art modellieren freien Wärmeübergang:

   $$\begin{aligned} u_h(t,r,\varphi,0) + a(t,r,\varphi)u(t,r,\varphi,0) &= u_1(t,r,\varphi), \\ u_h(t,r,\varphi,H) + b(t,r,\varphi)u(t,r,\varphi,H) &= u_2(t,r,\varphi), \\ u_r(t,R,\varphi,h) + c(t,\varphi,h)u(t,R,\varphi,h) &= u_3(t,\varphi,h) \end{aligned}$$

d) eine Anfangsbedingung: $u(0, r, \varphi, h) = u_4(r, \varphi, h)$

4. Wir wenden die partielle Fouriertransformation bezüglich x an. Sei $v(\xi, y) = F_x(u)$, Transformation der Laplacegleichung ergibt
$$-\xi^2 v + v_{yy} = 0.$$
Bei festgehaltenem ξ ist dies eine gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, wir lösen sie mit dem Ansatz $v = e^{\lambda y}$, charakteristische Gleichung
$$-\xi^2 + \lambda^2 = 0,$$
damit $\lambda = \pm\xi$ und $v(\xi, y) = C(\xi)e^{\xi y} + D(\xi)e^{-\xi y}$. Transformation der Abklingbedingung ergibt
$$\lim_{y\to\infty} v(\xi, y) = 0,$$
damit $C(\xi) = 0$ für $\xi > 0$ und $D(\xi) = 0$ für $\xi < 0$. Also ist
$$v(\xi, y) = A(\xi)e^{-|\xi|y}, \qquad A(\xi) = \begin{cases} C(\xi), & \xi < 0, \\ D(\xi), & \xi > 0, \end{cases}$$
Transformation der Randbedingung liefert
$$v(\xi, 0) - v_y(\xi, 0) = Ff(\xi),$$
also $A(\xi) + |\xi|A(\xi) = Ff(\xi)$ und
$$A(\xi) = \frac{Ff(\xi)}{1 + |\xi|}, \qquad v(\xi, y) = \frac{e^{-|\xi|y}}{1 + |\xi|}Ff(\xi).$$
Rücktransformation:
$$u(x, y) = F_\xi^{-1}\left(\frac{e^{-|\xi|y}}{1 + |\xi|}\right) * f$$