TU Bergakademie Freiberg
Institut für Angewandte Analysis
Prof. Dr. M. Reissig
Dr. G. Semmler

22. 3. 2017

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Klausur

1. Wir betrachten eine kreisförmige, schwingende Platte mit dem Radius R ohne äußere Krafteinwirkung.
   a) Schreiben Sie die zu betrachtende partielle Differentialgleichung in kartesischen Koordinaten auf.
   b) Welche Koordinaten sind hier am günstigsten zu verwenden?
   c) Wie sehen geeignete Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ aus? Formulieren Sie diese in angepassten Koordinaten.
   d) Wieviele Randbedingungen lassen sich stellen? Geben Sie eine Art von Randbedingungen in angepassten Koordinaten an.
   e) Wieviele Schritte erfordert ein Separationsverfahren zur Lösung dieser partiellen Differentialgleichung? Geben Sie die entsprechenden Ansätze an.
   f) Unter welchen Voraussetzungen existiert das zugehörige stationäre Modell? Geben Sie es an.

2. Wir betrachten für $u = u(x,t)$ mit $0 < x < \pi$, $t > 0$ die Anfangs-Randwert-Aufgabe

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + 2k u_t = 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$
$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x).$$

   Dabei seien a und k Parameter mit $0 < k < a$.
   a) Was wird durch diese Gleichungen modelliert?
   b) Welche Verträglichkeitsannahmen sollten f und g erfüllen?
   c) Lösen Sie die Differentialgleichung unter den gegebenen Nebenbedingungen mit Hilfe eines Separationsansatzes!

3. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_t - \triangle u = 0\ , \quad \triangle = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\ ,$$

   im Zylinder $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 < R^2, 0 < z < H\}$.
   a) Was wird durch diese partielle Differentialgleichung modelliert?

b) Welche angepassten Koordinaten sind für dieses Problem zu verwenden?

c) Wieviele Randbedingungen darf man stellen? Schreiben Sie zwei Arten möglicher Randbedingungen für die jeweils drei Teile des Randes in angepassten Koordinaten auf. Was wird durch sie modelliert?

d) Wie viele Anfangsbedingungen lassen sich stellen? Formulieren Sie diese wieder in angepassten Koordinaten.

4. Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Fouriertransformation die Lösung der Laplacegleichung mit Randbedingungen 3. Art in der Halbebene:

$$u_{xx}+u_{yy}=0, \qquad u(x,0)-u_y(x,0)=f(x), \qquad \lim_{y\to\infty} u(x,y)=0, \qquad -\infty<x<\infty,\ y>0.$$

Die Transformierbarkeit von f sei hier vorausgesetzt.