TU Bergakademie Freiberg
Institut für Angewandte Analysis
Prof. Dr. M. Reissig
Dr. G. Semmler

18. 7. 2017

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Klausur

1. Wir wollen als Modell die Wärmeleitung in einem kreisförmigen Draht mit Radius R und mit einem Quellterm betrachten.
   a) Schreiben Sie die zu betrachtende partielle Differentialgleichung in angepaßten Koordinaten auf. Was ist die Bedeutung des Quellterms?
   b) Nennen Sie mindestens zwei vereinfachende Annahmen unseres mathematischen Modells gegenüber einem realen Draht.
   c) Wie sieht eine geeignete Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$ in angepaßten Koordinaten aus?
   d) Was tritt an die Stelle der Randbedingungen? Schreiben Sie die entsprechende Zusatzbedingung auf.
   e) Wieviele Schritte erfordert ein Separationsverfahren? Geben Sie die Ansätze an.
   f) Unter welchen Voraussetzungen gibt es zu diesem Modell ein zugehöriges stationäres Modell? Geben Sie es gegebenenfalls an.

2. Wir wollen die Laplacegleichung im Quadrat

$$\triangle u = 0, \qquad 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi$$

   unter den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(x,0) = 0,\ u(x,\pi) = 0, \qquad & 0 < x < \pi \\ u(0,y) = f(y),\ u(\pi,y) = 0, \qquad & 0 < y < \pi \end{aligned}$$

   betrachten. Dabei sei f eine Vergleichsfunktion, für die der Entwicklungssatz gilt.
   a) Was wird durch diese Gleichungen modelliert?
   b) Lösen Sie die Laplacegleichung unter den gegebenen Randbedingungen mit Hilfe eines Separationsansatzes!

3. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} = \triangle u\ , \quad \triangle = \partial_x^2 + \partial_y^2\ ,$$

   in der **Halbkreisscheibe** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < R^2, y \geq 0\}$.

a) Was wird durch diese partielle Differentialgleichung modelliert?

b) Welche angepaßten Koordinaten sind für dieses Problem zu verwenden?

c) Wieviele Randbedingungen darf man stellen? Schreiben Sie eine Art möglicher Randbedingungen für die zwei Teile des Randes in angepaßten Koordinaten auf. Was wird durch sie modelliert?

d) Wieviele Anfangsbedingungen lassen sich stellen? Formulieren Sie diese in angepaßten Koordinaten.

4. Gegeben sei das gemischte Problem

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx} + t^2, \qquad x > 0, t > 0\\
&u(0,t) = 1, \qquad t > 0,\\
&u(x,0) = 1, \quad u_t(x,0) = 0, \qquad x > 0\\
&\lim_{x\to+\infty} u(x,t) \text{ ist endlich für jedes } t > 0.
\end{aligned}$$

Leiten Sie mit Hilfe der Laplacetransformation bezüglich der Variablen t eine Lösungsdarstellung her!

Hinweis: $L(t^2) = \dfrac{2}{s^3}$.