TU Bergakademie Freiberg
Institut für Angewandte Analysis
Prof. Dr. M. Reissig
Dr. G. Semmler

21. 3. 2018

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Klausur

1. Wir wollen die Wärmeleitung in einem Quader $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c\}$ mit $a, b, c > 0$ betrachten. Es liegt eine Quelle vor.
   a) Schreiben Sie die zu betrachtende partielle Differentialgleichung auf.
   b) Wie sieht eine geeignete Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$ aus?
   c) Die Temperatur auf der Grundfläche in der Ebene $z = 0$ werde konstant gleich T_1 gehalten, auf der Deckfläche in der Ebene $z = 1$ erfolgt freier Wärmeübergang mit bekannter relativer Wärmeübergangszahl h und Außentemperatur T_0, die übrigen Seitenflächen seien isoliert. Formulieren Sie die Randbedingung für alle Zeiten $t > 0$ für alle 6 Seitenflächen!
   d) Wieviele Schritte sind bei der Methode des Separationsansatzes notwendig? Schreiben Sie die entsprechenden Ansätze auf.

2. Wir betrachten Longitudinalschwingungen eines dünnen, zylindrischen Stabes der Länge l mit Dichte ϱ und Elastizitätsmodul E. Die Auslenkung $u(t, x)$ genügt den Gleichungen

$$
\begin{array}{lll}
u_{xx} = \dfrac{1}{a^2} u_{tt} & a = \sqrt{\dfrac{E}{\varrho}} & 0 < x < l, \quad t > 0, \\
u(t, 0) = 0, & u_x(t, l) = 0, & t > 0, \\
u(0, x) = f(x), & u_t(0, x) = g(x), & 0 < x < l.
\end{array}
$$

   Dabei sind f, g vorgegebene Funktionen, für die der Entwicklungssatz gilt.
   a) Berechnen Sie die Lösung dieser Anfangs-Randwert-Aufgabe mit Hilfe der Fourierschen Methode.
   b) Geben Sie eine Möglichkeit für die Wahl von f und g an, wenn der Stab zum Zeitpunkt $t = 0$ auf eine Länge $l_0 > l$ gedehnt und dann losgelassen wird. Achten Sie auf die Verträglichkeit zu den Randbedingungen.

3. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$\triangle^2 u = f$$

   im Halbkreis $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < R^2, y > 0\}$ mit einer gegebenen Funktion $f : H \to \mathbb{R}$.

a) Was wird durch diese partielle Differentialgleichung modelliert?

b) Welche angepassten Koordinaten sind für dieses Problem zu verwenden?

c) Geben Sie zwei Möglichkeiten von Randbedingungen (auf allen Teilen des Randes) an, so daß ein korrekt gestelltes Problem entsteht. Was ist die physikalische Interpretation Ihrer Randbedingungen?

4. Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Fouriertransformation die Lösung folgender Randwertaufgabe im unendlichen Streifen:

$$u_{xx}+u_{yy}-u=0, \qquad u_y(x,0)=0, \qquad u(x,1)=f(x), \qquad -\infty < x < \infty,\ 0 < y < 1.$$

Die Transformierbarkeit von f sei hier vorausgesetzt.