Aktuelle Themen aus der Stochastik
Wintersemester 2017/2018
Abschnitt 1: Organisatorisches und Einführung

Prof. Dr. Hans-Jörg Starkloff

TU Bergakademie Freiberg
Institut für Stochastik

Oktober 2017

1. Organisatorisches und Einführung

- **Vorlesungen:**
  Di., wöchentlich, 11:00-12:30, WER-1045.
  Do., ungerade Wochen, 14:00-15:30, MIB-1108.

  Keine Vorlesung am Do., 26.10.2017 !

- **Informationen für Vorlesungen:**
  `http://www.mathe.tu-freiberg.de/sto/mitarbeiter/hans-joerg-starkloff/lehre/lehrveranstaltungen`

- **Prüfung:** mündliche Prüfung.

Inhalt

- Einführung.
- Elemente der Wahrscheinlichkeitstheorie.
- Metrische und polnische Räume.
- $\sigma-$Algebren und messbare Abbildungen in metrischen Räumen.
- Maße in metrischen Räumen und schwache Konvergenz von Maßen.
- Stetige Zufallsprozesse.
- Lineare und normierte Räume.
- Zufallsvariable in BANACH- und HILBERT-Räumen.
- GAUSSsche Zufallsvariable und Maße in BANACH- und HILBERT-Räumen.

Ausgewählte Literatur

- H. Bauer, Maß- und Integrationstheorie, de Gruyter, 1992, 2. Auflage (E-Book TU Freiberg 2011).
- A. Klenke, Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer Spektrum, 2013, 3. Auflage (E-Book TU Freiberg).
- J. Dieudonne, Grundzüge der modernen Analysis Band 1, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1985, 3. Auflage.
- F. Hirzebruch, W. Scharlau, Einführung in die Funktionalanalysis, BI-Wissenschaftsverlag, 1988.
- K.R. Parthasarathy, Probability measures on metric spaces, Academic Press, 1967 (E-Book TU Freiberg).
- P. Billingsley, Convergence of Probability measures, Wiley, 1968.
- N.N. Vachania, V.I. Tarieladze, S.A. Čobanjan, Probability distributions on Banach spaces, Reidel, 1987.

Einführung

1.1. Bem.
Eine Zufallsfunktion $(\xi_t \,;\, t \in \mathbb{T})$ ist eine Familie von Zufallsgrößen $\xi_t : \Omega \to \mathbb{R}\,, t \in \mathbb{T}$, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Nun müssen häufig die Trajektorien (Pfade, Realisierungen), d.h. die für feste $\omega \in \Omega$ definierten Funktionen $\xi_\bullet(\omega) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, bestimmte Eigenschaften besitzen bzw. in bestimmten (Funktions-)Räumen liegen. Dann ist es angebracht, eine mit dieser Zufallsfunktion verbundene Zufallsvariable mit Werten in dem betrachteten Raum zu betrachten und zu untersuchen. Die Verteilung dieser Zufallsvariable ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf diesem Raum. So ergibt sich die Notwendigkeit, derartige Zufallsvariable und Maße ausführlicher zu untersuchen.

Funktionale von Zufallsfunktionen

1.2. Bem.

Ein wichtiger Sachverhalt in diesem Zusammenhang besteht darin, dass das System der endlichdimensionalen Verteilungen im Allgemeinen nicht die Verteilungen von interessierenden Funktionalen einer Zufallsfunktion bestimmen, häufig sind zusätzliche Regularitätsbedingungen (wie z.B. die Separabilität der Zufallsfunktion, die Stetigkeit der Trajektorien, etc.) notwendig.

1.3. Bsp.

$\Omega = [0,1]\,;\ \mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])\ \ \sigma-$Algebra der BORELmengen;
$\mathbb{P} = \lambda\!\!\lambda$ BOREL-LEBESGUE-Maß auf $\Omega = [0,1]\,;$
$\mathbb{T} = [0,1]\,;$

$\xi_t(\omega) = 0\,,\ t \in [0,1]\,,\ \omega \in \Omega\,;$

$$\eta_t(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \neq \omega\,; \\ 1, & \text{falls } t = \omega\,. \end{cases}$$

Analoge Situation mit Grenzwerten

1.4. Bsp.

$\Omega = [0,1]$; $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$ $\sigma-$Algebra der Borelmengen;

$\mathbb{P} = \lambda\!\!\lambda$ Borel-Lebesgue-Maß auf $\Omega = [0,1]$;

$\mathbb{T} = [0,1]$;

$\xi_t(\omega) = 0\,,\ t \in [0,1]\,,\ \omega \in \Omega\,;$

$$\xi_t^{(n)}(\omega) = \begin{cases} nt\,, & \text{falls } 0 \le t \le \frac{1}{n}\,; \\ 2 - nt\,, & \text{falls } \frac{1}{n} \le t \le \frac{2}{n}\,; \\ 0\,, & \text{falls } \frac{2}{n} \le t \le 1\,; \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Bemerkungen

1.5. Bem. Wenn die Konvergenz der Verteilungen von Funktionalen von Zufallsprozessen betrachtet wird, wobei die Funktionale von den Funktionswerten in allen Punkten des Definitionsbereiches abhängen, müssen zusätzlich zur Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen weitere Bedingungen gefordert werden, die gleichzeitig den gesamten Definitionsbereich beeinflussen. Realisiert werden kann dies unter anderem durch den Begriff der schwachen Konvergenz von (Wahrscheinlichkeits-)Maßen auf metrischen Räumen.

1.6. Bem. In der abstrakten Maßtheorie wird eine abstrakte Menge ohne zusätzlich gegebene Struktur zugrundegelegt. Bei der Definition der $\sigma-$Algebra der BORELmengen wird eine topologische (oder metrische) Struktur verwendet. Die historische Entwicklung verlief so, dass zuerst das LEBESGUE-Maß auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ genutzt wurde, also die Grundmenge eine topologische Struktur besaß; später erst erfolgte eine „Befreiung“ von den geometrischen Elementen (FRECHÉT, KOLMOGOROFF).