Stochastische Finanzmarktmodelle Teil 1
Abschnitt 1: Organisatorisches und Einleitung

Prof. Dr. Hans-Jörg Starkloff

TU Bergakademie Freiberg
Institut für Stochastik

Oktober 2017

1. Organisatorisches und Einleitung

- **Vorlesungen und Übungen:**
  Mo., wöchentlich, 14:00-15:30, MIB-1108.
  Fr., ungerade Wochen, 9:15-10:45, PRÜ-1104.
- **Informationen für Vorlesungen und Übungen:**
  `http://www.mathe.tu-freiberg.de/sto/mitarbeiter/hans-joerg-starkloff/lehre/lehrveranstaltungen`
- **Prüfung:** mündliche Prüfung nach dem 2. Modulteil Sommersemester 2018.

Inhalt

- Zeitdiskrete stochastische Finanzmarktmodelle.
  - Finanzderivate.
  - Portfolio, Handelsstrategien, Arbitrage, Arbitragefreiheit.
  - Einperioden- und Mehrperiodenmodelle.
  - Cox-Ross-Rubinstein-Modell.
  - Vollständige Finanzmarktmodelle.
- **Ausblick 2. Modulteil Sommersemester 2018:**
  Zeitstetige stochastische Finanzmarktmodelle.

Hintergrund

- Anspruchsvolle stochastische Theorie ermöglicht geeignete mathematische Modellierung, die auch in der Praxis genutzt wird.
- Black, Scholes (1973) und Merton (1973): grundlegende Arbeiten zur Preisfestsetzung und Absicherung von Finanzderivaten, diese haben die Theorie und Praxis der Finanzmärkte entscheidend geprägt.
- Robert Carhart Merton und Myron S. Scholes: 1997 Preisträger des Preises der schwedischen Reichsbank für Wirtschaftswissenschaften in Gedenken an Alfred Nobel (Nobelpreis).

Literatur

- Albrecht Irle, Finanzmathematik: Die Bewertung von Derivaten, Vieweg+Teubner Verlag, 2012, 3. Auflage (E-Book TU Freiberg).
- Albrecht Irle, Claas Prelle, Übungsbuch Finanzmathematik: Leitfaden, Aufgaben und Lösungen zur Derivatbewertung, Teubner Verlag, 2007 (E-Book TU Freiberg).
- Nicole Bäuerle, Ulrich Rieder, Finanzmathematik in diskreter Zeit, Springer Spektrum, 2017 (E-Book TU Freiberg).

Einleitung

- Handel mit Rohstoffen, wie Gold, Erdöl, etc. oder Energie $\Rightarrow$ Warenmärkte.
- Handel mit Finanzgütern, wie Aktien, Anleihen, etc. $\Rightarrow$ Finanzmärkte.
- Weitere Einteilung in
  - Devisenmärkte (Tausch von unterschiedlichen Währungen);
  - Geldmärkte (Handel von Wertpapieren und Krediten mit Laufzeiten bis maximal ein Jahr);
  - Kapitalmärkte (Handel von Wertpapieren und Krediten mit Laufzeiten über einem Jahr);
    hier unter anderem:
    - Rentenmärkte (Handel mit festverzinslichen Wertpapieren);
    - Aktienmärkte (Handel mit Aktien).

Kassa- und Termingeschäfte; derivative Finanzprodukte

- Neben Kassageschäften (spätestens zwei Handelstage nach Geschäftsabschluss von beiden Vertragsparteien zu erfüllen) gibt es noch Termingeschäfte, bei denen die Erfüllung auf einen späteren Zeitpunkt verschoben wird.
- Neben Basisgütern (z.B. Aktien) werden derivative Finanzgüter (Finanzderivate, Derivate) gehandelt, die wichtigsten Typen sind
  - Optionen und
  - Futures.

  Dies geschieht u.a. auf Optionsmärkten bzw. Futuremärkten.
- Prinzipiell können derartige Handelsgeschäfte auf organisierten Märkten (Börsen), bei denen die Erfüllung des Geschäfts durch Marktmechanismen garantiert wird, durchgeführt werden.
- Daneben können auch Kontrakte zwischen zwei Parteien ohne Markteinschaltung geschlossen werden (außerbörslicher Handel, Direkthandel, "over the counter", OTC).

Forwards und Futures

- Forwards und Futures sind Kontrakte, ein Basisgut ("underlying") zu einem zukünftigen Erfüllungszeitpunkt ("expiry date") T (oder in einem zukünftigen Erfüllungszeitraum $[T, T']$) zu einem heute festgelegten Erfüllungspreis ("strike price") F zu kaufen bzw. zu verkaufen.
- Man spricht von einer long position beim Eingehen eines Kaufkontraktes und von einer short position beim Eingehen eines Verkaufkontraktes.
- Futures werden auf entsprechenden Finanzmärkten (Futuremärkten) gehandelt, dies beinhaltet eine Absicherung ihrer Erfüllung.
- Forwards sind Kontrakte zwischen zwei Parteien ohne Markteinschaltung, basierend auf individuellen Absprachen.
- **Frage:** Welcher Erfüllungspreis F sollte bei einem Forward bzw. Future vereinbart werden? (Der zukünftige Preis des Basisguts kann nicht vorausberechnet werden!)

Optionen

- Optionen ("options") sind Kontrakte, die dem Käufer das Recht aber nicht die Pflicht einräumen, ein Basisgut ("underlying") zu einem zukünftigen Verfallszeitpunkt (oder Laufzeitende, "expiry date") T (oder während der gesamten Laufzeit) zu einem heute festgelegten Ausübungspreis (auch Basispreis, "strike price") K zu kaufen bzw. zu verkaufen.
- Das Kaufsrecht wird als Kaufoption oder Call bzw. Call-Option bezeichnet, das Verkaufsrecht entsprechend als Verkaufoption, Put oder Put-Option.
- Bei einer europäischen Option kann nur am Ende der Laufzeit ausgeübt werden, bei einer amerikanischen Option innerhalb der gesamten Laufzeit.
  Daneben gibt es weitere Formen von Optionen, die oft als exotische Optionen bezeichnet werden.

Optionen - Fortsetzung

- Man spricht von einer long position beim Käufer einer Option und von einer short position beim Verkäufer (auch Stillhalter genannt) einer Option.
- Optionen können vom Käufer weiterverkauft werden (es gibt einen Optionsmarkt), sie besitzen zu jedem Zeitpunkt einen Preis.
- Optionen gibt es schon lange im Wirtschaftsgeschehen, ein starkes Wachstum des Handels mit Optionen begann 1973 mit der Eröffnung der Chicago Board Options Exchange. In Deutschland nahm 1990 die Deutsche Terminbörse (DTB) den Handel mit Optionen auf. 1998 erfolgte die Fusion der DTB mit der Schweizerischen Terminbörse SDFEX zur EUREX.
- **Fragen : u.a.**
  - Was ist ein fairer Preis für eine Option ? (Der zukünftige Preis des Basisguts kann nicht vorausberechnet werden !)
  - Wie kann man sich gegen mögliche Verluste absichern ("hedging") ?

Festverzinsliche Wertpapiere

- Sie werden u.a. auch (risikolose) Anleihen oder Bonds genannt.
- B_0 Startkapital zum Zeitpunkt $t = 0$.
- Formeln unten für den Fall, dass außer Zinsen keine weiteren Einlagen oder Entnahmen getätigt werden.
- Bei Zinsrate (Zinssatz) r pro Jahr: Kapital nach $t = n$ Jahren: $B_t = B_0(1 + r)^n$.
- Bei Zinsrate r/k pro $1/k$ Jahre: Kapital nach $t = n$ Jahren: $B_t = B_0(1 + r/k)^{n \cdot k}$.
- Bei Momentanzins ("short rate") $r = r(s), s \geq 0$: Kapital zum Zeitpunkt $t \geq 0$:

$$B_t = B_0 \mathrm{e}^{\int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s},$$

insbesondere bei konstantem Momentanzins r: $B_t = B_0 \mathrm{e}^{rt}$.

Arbitrage

- Arbitrage bezeichnet einen risikolosen Profit beim Handel mit Finanzgütern.
- Eine Arbitragemöglichkeit ist die Möglichkeit, risikolosen Profit zu erzielen.
- Ein Arbitrageur ist ein Marktteilnehmer auf der Suche nach risikolosem Profit.
- Leitmotiv für die Preistheorie von Derivaten in stochastischen Finanzmarktmodellen ist (hier) das No-Arbitrage-Prinzip:

  Preise werden so festgelegt, dass keine Arbitrage auftritt.

- Der Begriff Arbitrage und das entsprechende No-Arbitrage-Prinzip muss noch in den betrachteten stochastischen Finanzmarktmodellen mathematisch ausgedrückt werden.

Beispiel für Arbitrage

- Kurs einer Aktie in New York 100 USD, in Frankfurt 82 €.
- Wechselkurs 1 USD=0.8469 € (13.10.2017 14:26:00 Uhr). (Quelle: `http://www.finanzen.net/devisen/dollarkurs`)
- Arbitragemöglichkeit (keine Transaktionskosten etc.):
  - Kaufe 200 Aktien in Frankfurt.
  - Verkaufe diese Aktien in New York.
  - Wechsle USD in €.
  - Risikoloser Profit (in €): $200 \cdot (100 \cdot 0.8469 - 82) = 538$.
- Die Bedingung der Arbitragefreiheit der Finanzmärkte beruht u.a. auf der Überlegung, dass derartige Arbitragemöglichkeiten nur kurze Zeit bestehen können: die erhöhte Nachfrage in Frankfurt führt zu höheren Aktienpreisen in Frankfurt, das erhöhte Angebot in New York führt zu niedrigeren Aktienpreisen dort, so erfolgt ein Ausgleich.

Preisvereinbarung bei einem Forward

- Finanzgut mit Preis S_0 zum derzeitigen Zeitpunkt $t = 0$ und bekannter Dividendenausschüttung D zum Zeitpunkt $t_0,\ 0 < t_0 < T$, T ist der Erfüllungszeitpunkt eines Forwardkontraktes für dieses Finanzgut.
- Man kann festverzinslich (risikolos) Geld leihen oder anlegen bei stetiger Verzinsung mit konstanter Momentanzinsrate $r > 0$, es gibt keine Transaktionskosten etc.
- Dann folgt für den Erfüllungspreis F des Forwardkontrakts nach dem No-Arbitrage-Prinzip

$$F = (S_0 - I)\mathrm{e}^{rT} \qquad \text{mit} \quad I = D\mathrm{e}^{-rt_0}\,.$$

Folgerung aus der Arbitragefreiheitsbedingung

- Für zwei verschiedene Kombinationen von Finanzgütern aus dem Finanzmarkt, deren Werte V_T und W_T zu einem zukünftigen Zeitpunkt $T > 0$ mit Sicherheit übereinstimmen, folgt aus dem No-Arbitrage-Prinzip:

  die Werte V_0 und W_0 der beiden Kombinationen zum gegenwärtigen Zeitpunkt $t = 0$ stimmen ebenfalls überein, d.h. es gilt $V_0 = W_0$.

Wert eines Calls bzw. Puts zum Verfallszeitpunkt

- Wert zum Verfallszeitpunkt T eines europäischen Calls mit Ausübungspreis K auf ein Finanzgut mit Preis S_T zum Verfallszeitpunkt:
$$C_T = (S_T - K)^+ = \max\{S_T - K, 0\} = \max\{S_T, K\} - K\,.$$
- Wert zum Verfallszeitpunkt T eines europäischen Puts mit Ausübungspreis K auf ein Finanzgut mit Preis S_T zum Verfallszeitpunkt:
$$P_T = (K - S_T)^+ = \max\{K - S_T, 0\} = \max\{K, S_T\} - S_T\,.$$
- **Folgerung:** Es gilt für beide Optionstypen auf ein und dasselbe Finanzgut bei identischem Ausübungspreis K und Verfallszeitpunkt T die Beziehung $C_T + P_T = |K - S_T|\,.$
- Der Wert einer Option zum Verfallszeitpunkt T wird auch Auszahlung ("contingent claim") genannt.
- Für $0 < t \leq T$ sagt man im Fall $S_t < / = / > K$ die Call-Option ist out of / at / in the money (zum Zeitpunkt t).

Put-Call-Parität

- Betrachtet werden ein europäischer Call und ein europäischer Put auf ein und dasselbe Finanzgut mit identischem Ausübungspreis K und Verfallszeitpunkt T.
- Man kann festverzinslich (risikolos) Geld leihen oder anlegen bei stetiger Verzinsung mit konstanter Momentanzinsrate $r > 0$, es gibt keine Transaktionskosten etc.
- Der Preis des Finanzguts zum Zeitpunkt t sei S_t, $t \in [0, T]$, der Wert des Calls C_t und der Wert des Puts P_t.
- Der Wert des Calls zum Zeitpunkt T beträgt $C_T = (S_T - K)^+$, des Puts entsprechend $P_T = (K - S_T)^+$.
- Aus der Folgerung aus dem No-Arbitrage-Prinzip folgen für die Werte zum derzeitigen Zeitpunkt $t = 0$:

$$S_0 + P_0 = C_0 + K\mathrm{e}^{-rT} \quad \text{und} \quad C_0 \geq (S_0 - K\mathrm{e}^{-rT})^+ .$$

(Da S_0, K, r, T bekannt sind, braucht man nur eine der Größen C_0 bzw. P_0 zu finden.)

Möglichkeiten der Nutzung von Optionen

- Engagement in Aktien ohne das Risiko eines größeren unvorhersehbaren Verlustes (keine Pflicht zum Kauf bei Call);
- Anteil haben an einer positiven Entwicklung des Basiswerts mit einem geringen Einsatz (Hebelwirkung);
- Absicherung gegen zu hohe Kursverluste durch Put-Optionen.

- Verkäufer eines Calls: Spekulation auf zukünftigen Aktienkurs kleiner als Ausübungspreis;
- Käufer eines Calls: Spekulation auf zukünftigen Aktienkurs höher als Ausübungspreis; Erwerb der Aktie mit höchstens Ausübungspreis;
- Verkäufer eines Puts: Spekulation auf zukünftigen Aktienkurs höher als Ausübungspreis;
- Käufer eines Puts: Spekulation auf zukünftigen Aktienkurs kleiner als Ausübungspreis; Verkauf der Aktie mit mindestens Ausübungspreis.

Typen von Handelsaktionen

- Absichern ("hedging") gegen Risiken ("Hedgers");
- Profit durch Wetten (Spekulanten);
- Profit durch simultane Transaktionen auf verschiedenen Märkten mit Kursdifferenzen (Arbitrageure).

Modellannahmen (vollkommener, perfekter Finanzmarkt)

- Reibungsloser Markt (auch friktionslos), d.h. keine Transaktionskosten, keine Steuern, freier Zugang aller Investoren, Kaufs- und Verkaufspreise sind identisch, keine Einschränkungen für Leerverkäufe ("short sales"; Verkauf von Gütern, die der Investor nicht selbst besitzt, sondern ausleihen muss und dann wieder dem Ausleiher zurückgeben muss; oft gibt es dafür Restriktionen);
- Soll- und Habenzinsen sind identisch; kein Ausfallrisiko;
- keine Dividendenzahlungen;
- Wettbewerbsmarkt: der Preis wird vom Markt und nicht einzelnen Marktakteuren bestimmt;
- Kapitalanlagen sind beliebig teilbar;
- Markttransparenz: alle Investoren verfügen über die gleiche Information;
- alle Marktteilnehmer sind rational und maximieren ihren Nutzen.

Absicherung (Replikation, Hedging)

- Die Auszahlung einer Option wird mit anderen Finanzinstrumenten, z.B. Aktien und einem risikolosem Wertpapier abgesichert (repliziert). Das Anfangskapital, welches notwendig ist, um die Auszahlung zu replizieren, entspricht dem fairen Preis der Option. Anderenfalls entstehen Arbitragemöglichkeiten.
- Die Kombinationen der Finanzgüter, die zur Absicherung genutzt werden können, bilden ein Portfolio (mitunter auch Portefeuille). Das Portfolio wird durch die Anzahl der jeweiligen Finanzgüter in diesem Portfolio (für einen bestimmten Zeitabschnitt) bestimmt.

Beispiel eines Calls in einem einfachen Modell

- Zwei Zeitpunkte: $t = 0$ und $t = T > 0$.
- Aktie mit Preis (in €) S_0 für $t = 0$, bekannt;
  S_T für $t = T$, unbekannt (zufällig):
  z.B. $S_0 = 100$, $S_T(\omega) = \begin{cases} 150\,, & \omega = \omega_1\,, \quad \text{Wkt. } p > 0\,; \\ 90\,, & \omega = \omega_2\,, \quad \text{Wkt. } 1 - p > 0\,. \end{cases}$
- Call auf diese Aktie mit Ausübungspreis (in €) $K = 130$ und Laufzeitende T.
- Festverzinsliches Wertpapier mit Preis 1 € mit Zinssatz $r = 0$.
- Auszahlung des Calls $H = H(\omega)$, $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$.
- Handelsstrategie $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, α ist die Stückzahl der zum Zeitpunkt 0 gekauften Aktien, β die Stückzahl der zum Zeitpunkt 0 gekauften risikolosen Wertpapiere (bei $\beta < 0$ Kreditaufnahme).
- Wert des Portfolios:
  $V_0(\alpha, \beta) = \beta + \alpha S_0$ bzw. $V_T(\alpha, \beta; \omega) = \beta + \alpha S_T(\omega)$.

Aufgaben

1. Was ändert sich in dem Beispiel eines Calls in einem einfachen Modell, wenn ein Zinssatz von 1 % pro Jahr für das festverzinsliche Wertpapier gilt und auch das Laufzeitende T ein Jahr beträgt?
2. Ein Landwirt züchtet Ferkel und erzielt gegenwärtig einen Preis von 20 € pro Ferkel. Er befürchtet, dass bei Abbau von Subventionen der Ferkelpreis im kommenden Jahr auf 60 % des derzeitigen Wertes fallen könnte. Werden die Subventionen nicht gestrichen, so erwartet er eine Steigerung auf 120 %. Der Landwirt hat trotz des geringen Ferkelpreises noch 1 500 € zur Verfügung, die er investieren möchte, um sich in einem Jahr den gleichen Preis pro Ferkel zu sichern.

   Welches Derivat ist für den Landwirt geeignet, und für wie viele Ferkel reicht der Investitionsbetrag zur Preisabsicherung, wenn ein Zinssatz von 4 % pro Jahr angenommen wird? Die Bankfiliale in der Kreisstadt bietet ihm dieses Derivat zum Preis s an. Bei welchen Werten von s ergeben sich Arbitragemöglichkeiten?

Aufgaben - Fortsetzung

3. Betrachtet werde folgendes Einperiodenmodell für eine Aktie und eine festverzinsliche Anleihe. Der Anfangskurs sei jeweils 1. Die Verzinsung der Anleihe sei $r = 0.05$. Der Endkurs S_1 der Aktie sei gegeben durch $S_1(\omega_1) = 2$ und $S_1(\omega_2) = 0.5$.

   Es wird ein Derivat C angeboten mit der Auszahlung $C(\omega_1) = 3$, $C(\omega_2) = 0.2$. Wie verhalten Sie sich (in Abhängigkeit von dem angebotenen Preis des Derivats)? Überlegen Sie sich, wie Sie durch ein Portfolio aus der Anleihe und der Aktie die Auszahlung des Derivats erreichen können!