Stochastische Finanzmarktmodelle Teil 1
Abschnitt 2: Endliche stochastische Finanzmarktmodelle

Prof. Dr. Hans-Jörg Starkloff

TU Bergakademie Freiberg
Institut für Stochastik

Oktober/November 2017

2 Endliche stochastische Finanzmarktmodelle
2.1 Finanzmarktmodelle

- Endliche Finanzmarktmodelle: endlich viele Marktzustände und endlich viele Handelszeitpunkte $t = 0, 1, \ldots, T-1$ sowie einen Endzeitpunkt $T \in \mathbb{N}$.
- Nicht vorherberechenbare Größen werden als Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ modelliert.
- $d+1$ Anlagemöglichkeiten:
  - Risikoloses Wertpapier mit einem deterministischen Preisprozess
    $$(B_t) = (B_0, \ldots, B_T) \quad \text{mit} \quad B_0 = 1\,,\ B_{t+1} \geq B_t > 0\,,\ t = 1, \ldots, T\,.$$
  - d risikobehaftete Wertpapiere mit stochastischen Preisprozessen
    $$(S_t^k) = (S_0^k, \ldots, S_T^k)\,, k = 1, \ldots, d\,, \quad \text{mit} \quad S_t^k = S_t^k(\omega) > 0\,,$$
    für alle k, t, ω. Für $t = 0, 1, \ldots, T$ sei
    $$\mathbf{S}_t := (S_t^1, \ldots, S_t^d)\,.$$

Exkurs: Zufallsfunktion (stochastischer Prozess)

- **Def. 2.1 (Zufallsfunktion, stochastischer Prozess)**
  - **Geg.** Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; messbarer Raum $(\mathbb{X}, \mathcal{A}_{\mathbb{X}})$; nichtleere Menge (üblicherweise unendlich) $\mathbb{T}$.
  - Eine mit den Elementen der Menge $\mathbb{T}$ indizierte Familie von $(\mathbb{X}, \mathcal{A}_{\mathbb{X}})-$wertigen Zufallsvariablen, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt $(\mathbb{X}, \mathcal{A}_{\mathbb{X}})-$wertige Zufallsfunktion oder Zufallsfunktion (oder auch stochastischer Prozess) mit Zustandsraum $(\mathbb{X}, \mathcal{A}_{\mathbb{X}})$ und Parametermenge (Indexmenge) $\mathbb{T}$.
- **Bez.:** $(\xi_t\,; t \in \mathbb{T})$, $(\xi(t)\,; t \in \mathbb{T})$, $(X_t\,; t \in \mathbb{T})$, $(X(t)\,; t \in \mathbb{T})$, ...
- **Def. 2.2 (Realisierungen einer Zufallsfunktion)**
  - **Geg.** $(\xi_t\,; t \in \mathbb{T})$ Zufallsfunktion auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Parametermenge $\mathbb{T}$ und Zustandsraum $(\mathbb{X}, \mathcal{A}_{\mathbb{X}})$.
  - Die für beliebige feste $\omega \in \Omega$ definierten Funktionen

$$\xi_\bullet(\omega) \,:\, \mathbb{T} \to \mathbb{X},\ \mathbb{T} \ni t \mapsto \xi_t(\omega) \in \mathbb{X}$$

    nennt man Realisierungen (auch Trajektorien, Pfade oder Stichprobenfunktionen) der Zufallsfunktion $(\xi_t\,; t \in \mathbb{T})$.

Fortsetzung Exkurs: Zufallsfunktion

- **Def. 2.3 (Endlichdim. Verteilungen einer Zufallsfunktion)**
  Geg. $n \in \mathbb{N}$, $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{T}^n$, Zufallsfunktion $(\xi_t\,;\, t \in \mathbb{T})$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum $(\mathbb{X}, \mathcal{A}_{\mathbb{X}})$.
  Die Verteilung des Zufallsvektors $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_n})$ mit Werten in $(\mathbb{X}^n, \otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_{\mathbb{X}})$ wird eine endlichdimensionale Verteilung (konkreter eine $n-$dimensionale Verteilung) der Zufallsfunktion genannt.
- **Bez.** $\mathbb{P}_{(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_n})}$ (oder ähnlich).
- **Bem.**
  (i) Man kann sich in der Definition auf Parametervektoren $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ mit paarweise verschiedenen Komponenten beschränken.
  (ii) Wählt man $n \in \mathbb{N}$ und $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{T}^n$ beliebig, erhält man das System der endlichdimensionalen Verteilungen der Zufallsfunktion. Es bestimmt gewissermaßen die Verteilung der Zufallsfunktion.
  (iii) Im Fall $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ werden im Allgemeinen die $n-$dimensionalen Verteilungen durch $n-$dimensionale Verteilungsfunktionen und im Fall von absolut stetigen Verteilungen durch $n-$dimensionale Verteilungsdichten definiert.

Fortsetzung: endliches Finanzmarktmodell

- Für unser endliches Finanzmarktmodell:
  $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$, endliche Menge von Zeitpunkten.
- Stochastischer Prozess: $d-$ oder $(d+1)-$dimensionaler Prozess
  $(\mathbf{S}_t)_{t\in\mathbb{T}} := \big((S_t^1, \ldots, S_t^d)\big)_{t\in\mathbb{T}}$ bzw.
  $(B_t, \mathbf{S}_t)_{t\in\mathbb{T}} := \big((B_t, S_t^1, \ldots, S_t^d)\big)_{t\in\mathbb{T}}$ (oft auch $S_t^0 := B_t\,, t \in \mathbb{T}$).
- Endlicher Wahrscheinlichkeitsraum: Ω ist eine endliche Menge und wir können annehmen, dass gilt

$$\forall\, \omega \in \Omega \,:\, \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0 \quad \text{sowie} \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)\,.$$

- Aus dieser Voraussetzung folgt unter anderem, dass alle betrachteten Zufallsgrößen diskrete Verteilungen mit endlich vielen möglichen Werten besitzen.

Informationsstruktur – Filtrierung

- Für bestimmte Fragestellungen spielen Messbarkeitsbedingungen der betrachteten Zufallsvariablen bezüglich kleinerer $\sigma-$Algebren eine große Rolle. Deshalb setzen wir voraus, dass wir mit einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ arbeiten.
- **Def. 2.4 (Filtrierung, Filtration)**
  Geg. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum, $\varnothing \neq \mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ Indexmenge.
  Die Familie $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ von Teil$-\sigma-$Algebren von $\mathcal{F}$ wird Filtrierung (oder Filtration) genannt, falls sie monoton wachsend ist, d.h.

$$\forall (s,t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}, \; s < t \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \,.$$

  Das Quadrupel $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ wird dann filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum genannt.

Erzeugte Filtrierung

- Filtrierungen können durch stochastische Prozesse erzeugt werden.
- **Def. 2.5 (Erzeugte Filtrierung)**
  Geg. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum, $\varnothing \neq \mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ Indexmenge, $(\xi_t)_{t \in \mathbb{T}}$ stochastischer Prozess.
  Dann wird durch

$$\mathcal{F}_t^\xi := \sigma\left(\xi_s \,:\, s \leq t\,,\ s \in \mathbb{T}\right), \quad t \in \mathbb{T},$$

  eine Filtrierung definiert, welche die durch den stochastischen Prozess $(\xi_t)_{t \in \mathbb{T}}$ erzeugte Filtrierung genannt wird.
- **Bsp.** $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3\}$

$\xi_t(\omega)$	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
ω_1	0	0	1	1
ω_2	0	0	2	2
ω_3	0	1	3	3
ω_4	0	1	3	4

Adaptierter stochastischer Prozess

- **Def. 2.6 (Adaptierter stochastischer Prozess)**
  Geg. $\emptyset \neq \mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ Indexmenge, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, $(\xi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ stochastischer Prozess.
  Der stochastische Prozess $(\xi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ heißt adaptiert (an die Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$), falls für beliebige $t \in \mathbb{T}$ die Zufallsvariable ξ_t messbar bezüglich $\mathcal{F}_t$ ist.
- Eine äquivalente Bedingung dafür ist:
  $$\forall\, t \in \mathbb{T} : \mathcal{F}_t^{\xi} \subseteq \mathcal{F}_t \,.$$
- Erinnerung: **Faktorisierungssatz 2.7**
  Geg. $(\Omega, \mathcal{F})$ Messraum, $\xi, \eta : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar.
  Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
  (i) ξ ist $(\sigma(\eta), \mathcal{B})-$messbar.
  (ii) Es existiert eine messbare Abbildung (Funktion) $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit $\xi = h(\eta)$.

Handelsstrategie, Portfolio

Def. 2.8 (Handelsstrategie, Portfolio)
Geg. zeitdiskretes Finanzmarktmodell $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T \in \mathbb{N}\}$; $\mathbb{R}^{d+1}-$wertiger, $(\mathcal{F}_t)-$adaptierter stochastischer Prozess der Anlagemöglichkeiten $(B_t, \mathbf{S}_t)_{t \in \mathbb{T}}$.
Eine Handelsstrategie oder ein Portfolio ist ein $\mathbb{R}^{d+1}-$wertiger $(\mathcal{F}_t)-$adaptierter stochastischer Prozess

$$\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_{T-1}) \quad \text{mit} \quad \varphi_t = (\alpha_t, \beta_t)\,, \; t = 0, \ldots, T-1\,.$$

Dabei sind

- β_t die Stückzahl des risikolosen Wertpapiers, die während des Zeitraums $[t, t+1)$ gehalten werden und
- $\alpha_t = (\alpha_t^1, \ldots, \alpha_t^d)$ mit α_t^k die Stückzahl des risikobehafteten Wertpapiers k, die während des Zeitraums $[t, t+1)$ gehalten wird.

Es bezeichne $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_{T-1})$ und $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{T-1})$.

Bemerkung

Bem.
Ist die Handelsstrategie sogar $(\mathcal{F}_t^{\mathbf{S}})-$adaptiert, sind nach dem Faktorisierungssatz 2.7 die Werte der Anzahlfunktionen deterministische (messbare) Funktionen der zufälligen Preise der Wertpapiere bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt,

$$\beta_t = \beta_t^*(\mathbf{S}_0, \ldots, \mathbf{S}_t)\,, \quad \alpha_t = \alpha_t^*(\mathbf{S}_0, \ldots, \mathbf{S}_t)\,, \quad t = 0, \ldots, T-1\,.$$

Dann erfolgt die Auswahl der Anzahlen deterministisch nur auf Basis der vergangenen und gegenwärtigen Preise der Anlagemöglichkeiten. Im Allgemeinen kann aber die Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ noch mehr Informationen enthalten als die Wertpapierpreise, z.B. Informationen über ökonomische Indikatoren.

Wert der Handelsstrategie

Def. 2.9 (Wert der Handelsstrategie)
Geg. zeitdiskretes Finanzmarktmodell $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T \in \mathbb{N}\}$; $\mathbb{R}^{d+1}-$wertiger, $(\mathcal{F}_t)-$adaptierter stochastischer Prozess der Anlagemöglichkeiten $(B_t, \mathbf{S}_t)_{t\in\mathbb{T}}$; Handelsstrategie $\varphi_t = (\alpha_t, \beta_t)\,,\ t = 0, \ldots, T-1\,.$

Der Wert der Handelsstrategie φ zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{T} \setminus \{T\}$ ist gegeben durch

$$V_t^\varphi := \beta_t B_t + \sum_{k=1}^{d} \alpha_t^k S_t^k =: \beta_t B_t + \alpha_t \bullet \mathbf{S}_t\,.$$

Außerdem wird definiert

$$V_T^\varphi := \beta_{T-1} B_T + \alpha_{T-1} \bullet \mathbf{S}_T\,.$$

Bem. $\beta_t B_t + \alpha_t \bullet \mathbf{S}_t$ ist der Wert des Portfolios direkt nachdem es zur Zeit $t \in \mathbb{T} \setminus \{T\}$ neu zusammengestellt wurde.

Selbstfinanzierende Handelsstrategie

Def. 2.10 (Selbstfinanzierende Handelsstrategie)
Geg. zeitdiskretes Finanzmarktmodell mit stochastischem Prozess der Anlagemöglichkeiten und Handelsstrategie gemäß Def. 2.9.
Die Handelsstrategie $(\varphi_t)_{t=0,\dots,T-1} = ((\alpha_t, \beta_t))_{t=0,\dots,T-1}$ heißt selbstfinanzierend, falls für $t = 1, \dots, T-1$ gilt

$$\beta_{t-1} B_t + \alpha_{t-1} \bullet \mathbf{S}_t = \beta_t B_t + \alpha_t \bullet \mathbf{S}_t \,.$$

Bem.

(i) Bei einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie wird in den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T-1$ kein Vermögen konsumiert oder zusätzlich dem Portfolio hinzugefügt.

(ii) Die Änderung des Wertes eines Portfolios zum Zeitpunkt $t = 1, \dots, T-1$ nur durch Änderung der Preise ist

$$\beta_{t-1}(B_t - B_{t-1}) + \alpha_{t-1} \bullet (\mathbf{S}_t - \mathbf{S}_{t-1}) \,.$$

Bei einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie ist dieser Wert gleich $V_t^{\varphi} - V_{t-1}^{\varphi}$.

Anteile am risikolosen Wertpapier

- **Bez.**
  - Menge der Investitationsstrategien in risikobehaftete Wertpapiere

    $\mathfrak{A} := \{\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{T-1}) \,:\, \alpha_t$ ist $\mathcal{F}_t -$ messbar, $t = 0, \ldots, T-1\}$.
  - Für einen stochastischen Prozess X_t sei $\Delta X_t := X_t - X_{t-1}$, analog $\Delta\alpha_t := (\Delta\alpha_t^1, \ldots, \Delta\alpha_t^d)$, etc.
- **Lemma 2.11**

  Geg. zeitdiskretes Finanzmarktmodell mit stochastischem Prozess der Anlagemöglichkeiten und selbstfinanzierender Handelsstrategie gemäß Def. 2.10.

  Dann gilt

  $$\beta_t = \beta_0 - \sum_{n=1}^{t} \Delta\alpha_n \bullet \frac{\mathbf{S}_n}{B_n} = V_0^{\varphi} - \sum_{n=0}^{t} \Delta\alpha_n \bullet \frac{\mathbf{S}_n}{B_n}$$

  für $t = 0, 1, \ldots, T-1$, wobei $\Delta\alpha_0^k := \alpha_0^k$ für $k = 1, \ldots, d$.
- **Bem.** Kenntnis von $\varphi = (\alpha, \beta)$ ist äquivalent zu der von (V_0^{φ}, α).

Diskontierte Preisprozesse

- **Def. 2.12** Im betrachteten zeitdiskreten stochastischen Finanzmarktmodell sei
$$\tilde{S}_t^k := \frac{S_t^k}{B_t}\,, \quad t \in \mathbb{T}\,,\ k = 1, \ldots, d\,,$$
der diskontierte Preis des $k-$ten risikobehafteten Wertpapiers zur Zeit t, analog werden auch die Bezeichnungen $\tilde{\mathbf{S}}_t$ oder $\tilde{V}_t^\varphi$ genutzt.
- **Lemma 2.13**
Ist φ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie im betrachteten zeitdiskreten Finanzmarktmodell und $t \in \{1, \ldots, T\}$. Dann gilt
$$\tilde{V}_t^\varphi := \frac{V_t^\varphi}{B_t} = V_0^\varphi + \sum_{n=1}^{t} \alpha_{n-1} \bullet \Delta\tilde{\mathbf{S}}_n = \tilde{V}_0^\varphi + \sum_{n=1}^{t} \alpha_{n-1} \bullet \Delta\tilde{\mathbf{S}}_n\,.$$
- **Bem.** Man kann sich oft auf den Fall $B_t \equiv 1$ beschränken (wenn man mit diskontierten Wertprozessen arbeitet).

Gewinnprozess

- **Def. 2.14** Im betrachteten zeitdiskreten stochastischen Finanzmarktmodell ist der für $\alpha \in \mathfrak{A}$ definierte stochastische Prozess

$$\tilde{G}_t^{\alpha} := \sum_{n=1}^{t} \alpha_{n-1} \bullet \Delta\tilde{\mathbf{S}}_n \,, \quad t = 1, \ldots, T\,; \quad \tilde{G}_0^{\alpha} = 0\,,$$

der Gewinnprozess von α.

- **Folg. 2.15**
Nach Lemma 2.13 gilt dann für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\varphi = (\alpha, \beta)$

$$\tilde{V}_t^{\varphi} = \tilde{V}_0^{\varphi} + \tilde{G}_t^{\alpha}\,, \quad t \in \mathbb{T}\,.$$

- **Bem.**
Im Buch Bäuerle/Rieder (2017) wird die Bezeichnung G_t^{α} für $\tilde{G}_t^{\alpha}$ verwendet, $\tilde{V}_t^{\varphi}$ wird nicht genutzt.

Arbitragestrategie

- **Def. 2.16** Im betrachteten zeitdiskreten stochastischen Finanzmarktmodell wird eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ als Arbitragestrategie bezeichnet, falls gilt

$$V_0^\varphi = 0\,, \quad \mathbb{P}\left(V_T^\varphi \geq 0\right) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\left(V_T^\varphi > 0\right) > 0\,.$$

  Man sagt dass eine Arbitragemöglichkeit existiert, falls eine Arbitragestrategie existiert.

  (NA) bedeutet, dass keine Arbitragemöglichkeit existiert.

- **Bem.** Eine Arbitragemöglichkeit liegt genau dann vor, wenn eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\varphi = (\alpha, \beta)$ existiert mit

$$V_0^\varphi = 0\,, \quad \mathbb{P}\left(\tilde{G}_T^\alpha \geq 0\right) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\left(\tilde{G}_T^\alpha > 0\right) > 0\,.$$

- **Bem.** Für einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum ist $\mathbb{P}\left(V_T^\varphi > 0\right) > 0$ äquivalent zur Existenz eines $\omega \in \Omega$ mit $V_T^\varphi(\omega) > 0$ oder $\tilde{V}_T^\varphi(\omega) > 0$.

Globale und lokale Arbitragefreiheit

Satz 2.17

Im betrachteten zeitdiskreten stochastischen Finanzmarktmodell sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Es gibt eine Arbitragestrategie.

(ii) Es gibt ein $t \in \{1, \ldots, T\}$ und einen $\mathcal{F}_{t-1}$−messbaren Zufallsvektor $\eta : \Omega \to \mathbb{R}^d$, so dass

$$\mathbb{P}(\eta \bullet \Delta\tilde{\mathbf{S}}_t \geq 0) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(\eta \bullet \Delta\tilde{\mathbf{S}}_t > 0) > 0\,.$$

Bem.

Gilt die Bedingung in (ii) für ein $t \in \{1, \ldots, T\}$ nicht, kann man von Arbitragefreiheit für das entsprechende Einperiodenmodell und damit von einer lokalen Arbitragefreiheit sprechen. Gilt dies für alle betrachteten Zeitpunkte folgt daraus die globale Arbitragefreiheit (als Gegenteil zu (i)) und umgekehrt.

Beispiel 2.18 (arbitragefreies Finanzmarktmodell)

- $T = 2$.
- Risikoloses Wertpapier mit $B_0 = B_1 = B_2 = 1$.
- $\Omega = \{u_1, d_1\} \times \{u_2, d_2\}$.
- $d = 1$, d.h. eine Aktie mit

$$\begin{aligned} S_0 &= 4\,; \\ S_1(u_1) &= 6\,,\ S_1(d_1) = 3\,; \\ S_2(u_1,u_2) &= 8\,,\ S_2(u_1,d_2) = 5\,,\ S_2(d_1,u_2) = 4\,,\ S_2(d_1,d_2) = 2\,. \end{aligned}$$

2.2 Optionen und Zahlungsansprüche

- Optionen (und andere derivative Finanzprodukte) werden durch die durch sie erzeugten Zahlungsansprüche im Finanzmarktmodell modelliert.
- **Def. 2.19**
  Ein Zahlungsanspruch im betrachteten zeitdiskreten Finanzmarktmodell ist eine $\mathcal{F}_T-$messbare Zufallsgröße.
- **Def. 2.20**
  Geg. zeitdiskretes Finanzmarktmodell mit stochastischem Prozess der Anlagemöglichkeiten gemäß Def. 2.9.
  (i) Ein Zahlungsanspruch H heißt erreichbar, falls es eine selbstfinanzierende Handelstrategie φ gibt mit $V_T^\varphi = H$. Dann heißt $\pi(H) := V_0^\varphi$ ein Preis von H und φ eine Hedging-Strategie von H.
  (ii) Ein Finanzmarktmodell wird als vollständig bezeichnet, wenn jeder Zahlungsanspruch erreichbar ist.

Beispiele für Zahlungsansprüche (Verfallszeitpunkt T)

(i) Europäische Call-Option mit Basispreis K: $H = (S_T - K)^+$.

(ii) Europäische Put-Option mit Basispreis K: $H = (K - S_T)^+$.

(iii) Down-and-Out-Call mit Basispreis K und Barriere B:
$H = (S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\min\{S_t\,;\,t\in\mathbb{T}\} > B\}}$.
Durch die zusätzliche Einschränkung ist dieser preiswerter als ein entsprechender Call ohne Barriere. Die Auszahlung hängt vom gesamten Kursverlauf ab, nicht nur von S_T.

(iv) Asiatische Call-Option: $H = \left(S_T - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} S_t \right)^+$.
Hier wird kein Basispreis festgelegt, er ergibt sich aus der Kursentwicklung.

(v) Digital-Call-Option mit Basispreis K: $H = \mathbf{1}_{\{S_T > K\}}$.

(vi) Future (Kaufkontrakt) mit Referenzpreis (Erfüllungspreis) K:
$H = S_T - K$.

Arbitragefreiheit und Eindeutigkeit der Preise

- **Beh. 2.21**
  Geg. zeitdiskretes (NA)-Finanzmarktmodell mit stochastischem Prozess der Anlagemöglichkeiten gemäß Def. 2.9. (d.h. ohne Arbitragemöglichkeit).
  Dann ist der Preis $\pi(H)$ für erreichbare Zahlungsansprüche eindeutig bestimmt und damit unabhängig von der Wahl einer Hedging-Strategie.

- **Bsp. 2.22**
  Finanzmarktmodell aus Beispiel 2.18 mit Digital-Option
  $H = \mathbf{1}_{\{S_2 \geq 5\}}$.
  Ges. Hedging-Strategie und Preis.

Übungsaufgaben

(Quelle: Bäuerle/Rieder, Kap. 2)

1. Gegeben ist ein einperiodiger Finanzmarkt, bestehend aus einem risikolosen Wertpapier und einer Aktie mit Preis $S_0 = 180$ zur Zeit $t = 0$ und $S_1(\omega_1) = 210$, $S_1(\omega_2) = 160$ zur Zeit $t = 1$. Weiter gibt es eine Option mit Auszahlung $H(\omega_1) = 105$ und $H(\omega_2) = 55$ zur Zeit $t = 1$, die zur Zeit $t = 0$ den Preis $\pi(H) = 80$ besitzt. Wie hoch ist der Zinssatz für das risikolose Wertpapier?

2. Betrachten Sie folgenden einperiodigen Finanzmarkt: Es gebe ein risikoloses Wertpapier mit $B_0 = B_1 = 1$ sowie eine Aktie mit Startpreis $S_0 = 1$. Der Endkurs S_1 sei binomialverteilt mit $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$. Untersuchen Sie den Markt auf Arbitragefreiheit!

Fortsetzung Übungsaufgaben

3. Gegeben sei ein arbitragefreier Finanzmarkt mit Zeithorizont $T > 0$. Zeigen Sie durch Arbitrageüberlegungen, dass für die Preise zweier europäischer Calls, die sich lediglich in den Basispreisen K_1 und K_2 unterscheiden, gilt:

$$K_1 \leq K_2 \quad \Rightarrow \quad \pi\left((S_T - K_2)^+\right) \leq \pi\left((S_T - K_1)^+\right) ,$$

d.h. der Call-Preis ist fallend im Basispreis.

4. Betrachten Sie einen beliebigen Zahlungsanspruch $H : \Omega \to \mathbb{R}$ im einstufigen Trinomialbaum, d.h. mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $T = 1$. Für das risikolose Wertpapier gelte $B_0 = B_1 = 1$ und die Aktie entwickle sich wie folgt:

$$S_0 = 10\,,\ S_1(\omega_1) = 15\,,\ S_1(\omega_2) = 12\,,\ S_1(\omega_3) = 8\,.$$

   a) Welche Zahlungsansprüche $H : \Omega \to \mathbb{R}$ sind erreichbar?
   b) Geben Sie einen nicht-erreichbaren Zahlungsanspruch an!