Diplom- bzw. Masterarbeit zum Thema
Eigenwerte der Laplace-Matrix

Hintergrund

Die Laplace-Matrix ist das diskrete Analogon der Laplace-Gleichung im d-dimensionalen Einheitswürfel $\Omega_d \subset \mathbb{R}^d$, wobei homogene Dirichlet-Randbedingungen vorgeschrieben werden: Diskretisiert man

$$\begin{aligned} -\Delta u &= -\textstyle\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f && \text{in } \Omega_d, \\ u &= 0 && \text{auf } \delta\Omega_d, \end{aligned}$$

durch zentrale Differenzen mit der Schrittweite $h = 1/(n+1)$ in jeder Koordinatenrichtung, so entsteht ein lineares Gleichungssystem der Form

$$A\boldsymbol{u} = h^2 \boldsymbol{f} \quad \text{mit } A = A_{d,n} \in \mathbb{R}^{n^d \times n^d}.$$

Die Matrix $A_{d,h}$ wird die d-dimensionale Laplace-Matrix (zur Schrittweite $h = 1/(n+1)$) genannt.

Im eindimensionalen Fall ist

$$A_{1,n} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

eine symmetrische Tridiagonalmatrix mit Toeplitz-Struktur. Ihre Eigenwerte sind

$$\lambda_{1,j} = 2 - 2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) = 4\sin^2\left(\frac{j\pi}{2(n+1)}\right) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Der d-dimensionale Fall lässt sich mit Hilfe des Kronecker-Produkts auf den eindimensionalen zurückführen:

$$A_{d+1,n} = A_{d,n} \otimes I_n + I_{n^d} \otimes A_{1,n} \in \mathbb{R}^{n^{d+1} \times n^{d+1}} \qquad (d = 1, 2, \ldots)$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_{d+1,j} = \lambda_{d,k} + \lambda_{1,\ell} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n^d,\ \ell = 1, 2, \ldots, n).$$

Mit anderen Worten: Die Eigenwerte von $A_{d,n}$ sind

$$\lambda_{1,j_1} + \lambda_{1,j_2} + \cdots + \lambda_{1,j_d},$$

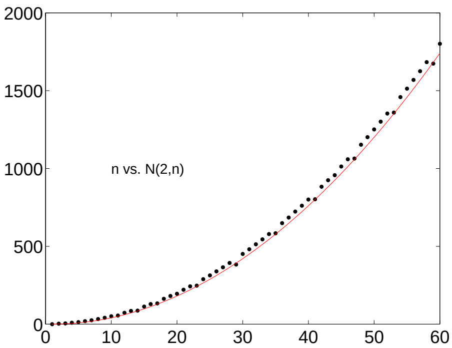
wobei die Indizes $j_1, j_2, \ldots, j_d$ (voneinander unabhängig) in $\{1, 2, \ldots, n\}$ variieren.

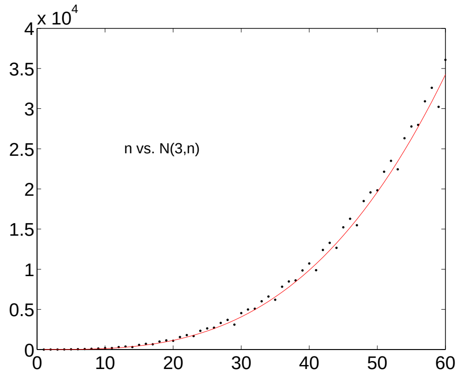
Während $A_{1,n}$ also n einfache Eigenwerte besitzt, ist die genaue Eigenstruktur von $A_{d,n}$ ($d > 1$) erstaunlicherweise unklar: Man erkennt schnell, dass $A_{2,d}$

den n-fachen Eigenwert $\lambda = 4$ besitzt und dass $A_{2,d}$ höchstens $1+n^2/2$ *verschiedene* Eigenwerte besitzen kann, von denen die meisten doppelt sind. Bezeichnet $N(d,n)$ die Anzahl der verschiedenen Eigenwerte von $A_{d,n}$, so legen die folgenden Abbildungen die Vermutungen

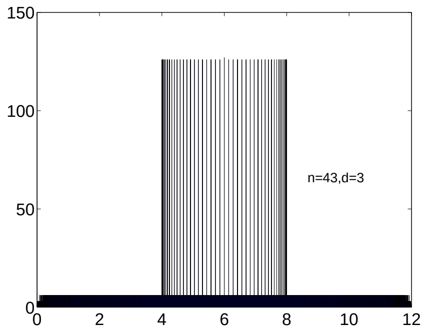
$$N(2,n) \approx \frac{1}{2}n^2 \quad \text{und} \quad N(3,n) \approx \frac{1}{6}n^3$$

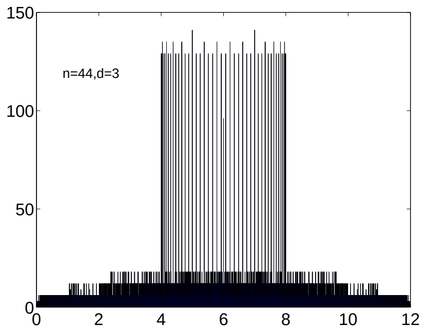
nahe.





Offenbar wächst $N(d,n)$ *nicht* monoton mit n. Noch schwieriger als den Wert von $N(d,n)$ zu bestimmen, scheint die Aufklärung der Vielfachheiten der einzelnen Eigenwerte zu sein:





Die Abbildungen zeigen die Vielfachheiten der 13287 bzw. 12665 verschiedenen Eigenwerte von $A_{3,43}$ bzw. $A_{3,44}$.

$A_{3,43}$:

Vielfachheit	1	3	6	126	127
# Eigenwerte	42	1722	11480	42	1

$A_{3,44}$:

Vielfachheit	1	3	6	9	12	18	96	129	135	141
# Eigenwerte	44	1720	9550	32	1068	206	1	30	12	2

Aufgabenstellung

- Beschreibung der Rolle, die die Laplace-Matrix in der numerischen linearen Algebra [2, Chapter 4], aber auch in Graphentheorie spielt [1, Chapter 1].
- Entwurf von Algorithmen, um die Eigenstruktur von $A_{d,n}$ (insbesondere für große d und n) aufzuklären.
- Ableitung von Abschätzungen für $N(d, n)$ und Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von $N(d, n)$ für $n \to \infty$.

Literatur

[1] Fan R. K. Chung, *Spectral Graph Theory*, American Mathematical Society, Providence (R.I.) 1991

[2] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge 1991.