Diplom bzw. Masterarbeit zum Thema
Produktmethoden vom Lanczos-Typ

Hintergrund

Zu den populärsten Iterationsverfahren zur Lösung großer dünnbesetzter linearer Gleichungssysteme

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad A \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ invertierbar}, \ \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n,$$

gehören Krylow-Unterraumverfahren (wir interessieren uns hier ausschließlich für Systeme, deren Koeffizientenmatrizen nicht selbstadjungiert sind). Im m-ten Iterationsschritt wird eine Näherung $\boldsymbol{x}_m$ für die Lösung $A^{-1}\boldsymbol{b}$ konstruiert, die im translierten Krylow-Unterraum $\boldsymbol{x}_0 + \mathcal{K}_m(A, \boldsymbol{r}_0)$ enthalten ist. Der Krylow-Unterraum ist durch

$$\mathcal{K}_m(A, \boldsymbol{r}_0) := \text{span}\{\boldsymbol{r}_0, A\boldsymbol{r}_0, A^2\boldsymbol{r}_0, \ldots, A^{m-1}\boldsymbol{r}_0\}$$

definiert, $\boldsymbol{x}_0$ ist der (im Prinzip beliebige) Startvektor der Iteration und $\boldsymbol{r}_0 := \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_0$ ist das zugehörige Residuum. Welcher Vektor $\boldsymbol{x}_m \in \boldsymbol{x}_0 + \mathcal{K}_m(A, \boldsymbol{r}_0)$ letztlich als Näherungslösung gewählt wird, hängt vom konkreten Verfahren ab. Einen Überblick der in der Praxis gebräuchlichen Auswahlkriterien (und ihrer Beziehungen untereinander) findet man in [1]. Alle Krylow-Unterraumverfahren haben die Eigenschaft, dass sich das m-te Residuum $\boldsymbol{r}_m := \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_m$ in der Form

$$\boldsymbol{r}_m = p_m(A)\boldsymbol{r}_0$$

darstellen läßt. p_m ist ein (vom Verfahren abhängiges) Polynom (das sog. m-te Residualpolynom) vom Grad m, das der Bedingung $p_m(0) = 1$ genügt.

Die Lanczos-Verfahren basieren auf speziellen Basen der Krylow-Unterräume $\mathcal{K}_m(A, \boldsymbol{r}_0)$, die durch den sogenannten unsymmetrischen (oder zweiseitigen) Lanczos-Prozess erzeugt werden. Diese Basen haben den Vorteil, dass sie sich durch dreistufige Rekursionen (d.h. ohne großen Rechen- und Speicheraufwand) erzeugen lassen. Aus dem Lanczos-Prozess resultieren im wesentlichen zwei Verfahren, nämlich das Verfahren der bikonjugierten Gradienten und das quasi-minimal-residual Verfahren (BiCG und QMR in der Terminologie von [2]). Da es sich hier um Krylow-Verfahren handelt, gilt für z.B. die BiCG-Residuen

$$\boldsymbol{r}_m^{\text{BiCG}} = p_m^{\text{BiCG}}(A)(\boldsymbol{r}_0)$$

mit dem BiCG-Residualpolynom p_m^{BiCG}. Das Konvergenzverhalten des Verfahrens der bikonjugierten Gradienten ist nicht immer zufriedenstellend. Außerdem können sog. Breakdowns auftreten, das sind Indizes m, für die die Näherungslösung $\boldsymbol{x}_m$ nicht definiert ist.

Daher werden in letzter Zeit verschiedentlich Produktmethoden vom Lanczos-Typ untersucht. Es handelt sich hier um Krylow-Unterraumverfahren mit Residualpolynomen der Bauart

$$p_m^{\text{BiCG}}\, t_m, \qquad \text{grad}(t_m) = m,\ t_m(0) = 1,$$

wobei t_m zunächst (bis auf die Normierungsbedingung) beliebig ist.

Aufgabenstellung

- Knappe (aber vollständige) Darstellung des unsymmetrischen Lanczos-Prozesses und der daraus resultierenden Krylow-Verfahren [2, § 1–4] (mit Beweisen, wenn notwendig).
- Beschreibung der Idee der Lanczos-Produktmethoden, mit Betonung der bekanntesten Varianten (BiCGS, BiCGStab, . . . , vgl. [2]).
- Darstellung der Behandlung von Breakdowns im Zusammenhang mit Lanczos-Produktmethoden [3].
- Implementierung der Lanczos-Produktmethoden unter Matlab und Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit an repräsentativen Beispielen.

Literatur

[1] Michael Eiermann and Oliver G. Ernst, Geometric aspects of the theory of Krylov subspace methods, *Acta Numerica* 10 (2001), 251–312.

[2] Martin H. Gutknecht, Lanczos-type solvers for nonymmetric linear systems of equations, *Acta Numerica* 6 (1997), 271–397.

[3] M. H. Gutknecht and K. J. Ressel, Look-ahead procedures for Lanczos-type product methods based on three-term Lanczos recurrences. Research Report 99-20, Seminar für Angewandte Mathematik, ETH Zürich 1999.