



Die Ressourcenuniversität. Seit 1765.

Martin Reinhardt
angewandte Mathematik
8. Semester
Matrikel: 50108



ODE-Solver

11. Mai 2011



Inhalt

Einleitung

grundlegende Algorithmen

weiterführende Algorithmen

Einleitung

- Motivation
- mathematische Definitionen
- Reduktion mit Beispiel

grundlegende Algorithmen

- Eulerverfahren
- Modifikation und Verbesserung

weiterführende Algorithmen

- Idee
- Lineare Mehrschrittverfahren

Definition und Motivation

Was ist eine gewöhnliche Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung (DE) beschreibt eine Beziehung zwischen einer gesuchten Funktion y und ihren Ableitungen. Ist dabei $y = y(t)$ eine Funktion, die nur von einer Variablen - hier t - abhängt, so spricht man von einer gewöhnlichen Differentialgleichung (ODE).

warum numerische Löser

Da explizite Lösungen nur in wenigen Ausnahmefällen zur Verfügung stehen, ist der Einsatz numerischer Methoden bei der Lösung unvermeidbar.

Einen Ausdruck der Form

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{ODE})$$

mit einer Funktion $F : \mathbb{R}^{n+2} \supset M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung. Eine Funktion $y : \mathbb{R} \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lösung von (ODE) über dem Intervall I , wenn $y \in C^n(I)$ ist und

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I$$

gilt. (ODE) besitzt die Ordnung n , weil n die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung ist. Sie heißt gewöhnlich, weil die gesuchte Funktion y nur von einer Variablen abhängt. (ODE) heißt implizit - im Gegensatz zu einer expliziten ODE n -ter Ordnung, die nach der höchsten Ableitung von y aufgelöst ist: $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

zu betrachtende Probleme

Man betrachtet fast ausschließlich Systeme von expliziten ODEs erster Ordnung (warum man sich auf solche Probleme beschränkt, wird noch erklärt):

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (\text{ODE-S})$$

mit den unbekanntenen Funktionen y_1, y_2, \dots, y_n . Jedes System von n Funktionen $y = y_1(t), \dots, y_n = y_n(t) \in C^1(I)$, welches (ODE-S) für alle $t \in I$ erfüllt, heißt Lösung von (ODE-S) über I .

Für eine eindeutig bestimmte Lösung reicht ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung nicht aus. Dafür ist eine weitere Bedingung erforderlich, die sogenannte Anfangsbedingung zum Zeitpunkt t_0 .

Allgemein: Das Problem, eine Lösung von (ODE-S) zu finden, welche die Anfangsbedingung

$$y_1(t_0) = y_{0,1}, \dots, y_n(t_0) = y_{0,n} \quad (\text{AB})$$

erfüllt, heißt Anfangswertproblem (AWP) für das Differentialgleichungssystem (ODE-S).

Kurzschreibweise

$$\text{Mit } y := \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, f := \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, y_0 := \begin{bmatrix} y_{0,1} \\ \vdots \\ y_{0,n} \end{bmatrix}$$

Kurzschreibweise:

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y) && (\text{ODE}') \\ y(t_0) &= y_0 && (\text{AB}') \end{aligned}$$

Jede ODE höherer Ordnung lässt sich sehr einfach auf ein System von ODEs erster Ordnung reduzieren.

Beispiel

$$y'' = y' + xy^2$$

Diese Reduktion bringt keine Verbesserung oder Erleichterung der Berechnung, aber sorgt für eine Form, mit welcher alle Löser sehr leicht arbeiten können.

Orientierung

Einleitung

- Motivation
- mathematische Definitionen
- Reduktion mit Beispiel

grundlegende Algorithmen

- Eulerverfahren
- Modifikation und Verbesserung

weiterführende Algorithmen

- Idee
- Lineare Mehrschrittverfahren

Man betrachte das AWP

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

mit einer eindeutigen Lösung über dem Intervall I .

Die Lösung $y(t)$ für $t \in [t_0, t_{\text{end}}] \subseteq I$ soll durch das Euler-Verfahren (auch Polygonzug-Verfahren nach Euler (Leonhard Euler, 1707-1783)) approximiert werden. Wie alle numerischen Verfahren zur Lösung von ODEs basiert das Euler-Verfahren auf der Idee der Diskretisierung: Statt das AWP über $t \in [t_0, t_{\text{end}}]$ zu lösen, gibt man sich damit zufrieden, Näherungswerte für die Lösung auf einer diskreten Teilmenge $\{t_n : n = 0, 1, \dots, N\}$ zu bestimmen.

das Eulerverfahren

Algorithmus

Wähle $N \in \mathbb{N}$, $h = (t_{\text{end}} - t_0) / N$ und definiere

$t_n := t_0 + nh, n = 0, 1, \dots, N$ d.h. $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_N = t_{\text{end}}$.

Die Zahl $h > 0$ heißt Schrittweite (Diese wird nur zur Erklärung konstant gelassen, da man in der Realität eine automatische Schrittweitensteuerung benutzt).

Bezeichnet nun y_n einen Näherungswert für $y(t_n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, dann ist

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n + h) \\ &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{1}{2}h^2y''(\xi) \\ &\approx y(t_n) + hy'(t_n) \\ &= y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) \\ &\approx y_n + hf(t_n, y_n) \end{aligned}$$

Das Euler-Verfahren

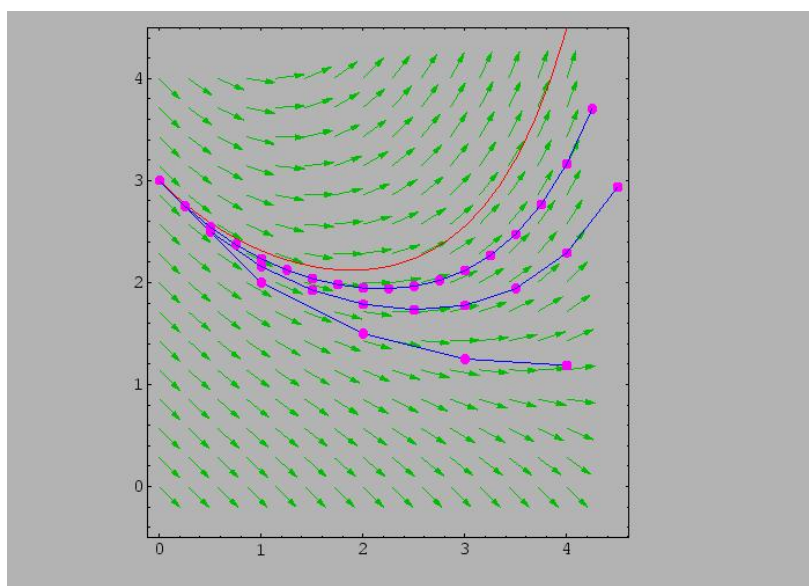
y_0 gegeben,

$$y_{n+1} := y_n + hf(t_n, y_n) \quad (n = 0, 1, \dots, N - 1)$$

das Eulerverfahren

Beispiel

Abb. 1: Das Polygonzugverfahren für $y'(x) = xy/4 - 1$ mit $y(0) = 3$ für $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$



das Eulerverfahren

als Prototyp weiterer Verfahren

Das Eulerverfahren stellt die schnellste und einfachste Approximation von ODE-Lösern dar. Es ist nur bei einer sehr kleinen Schrittweite genau und weicht mit fortschreitendem t_i (potenziell) immer weiter vom wahren Wert ab.

Dennoch stellt es die Grundlegende Idee für alle seine Verbesserungen bereit. Diese sind vor allem das Modifizierte Euler-Verfahren (auch Mittelpunktsregel) und das verbesserte Euler-Verfahren (auch Trapezregel). Diese zeichnen sich vor allem durch schnellere Konvergenz aus (in beiden Fällen quadratisch).

das modifizierte Eulerverfahren

Algorithmus

Das modifizierte Euler-Verfahren

y_0 gegeben,

$$y_{n+1} := y_n + hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(t_n, y_n)\right) \quad (n = 0, 1, \dots, N - 1)$$

Das verbesserte Euler-Verfahren

y_0 gegeben,

$$y_{n+1} := y_n + \frac{1}{2}h [f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))]$$

$(n = 0, 1, \dots, N - 1)$

Orientierung

Einleitung

- Motivation
- mathematische Definitionen
- Reduktion mit Beispiel

grundlegende Algorithmen

- Eulerverfahren
- Modifikation und Verbesserung

weiterführende Algorithmen

- Idee
- Lineare Mehrschrittverfahren

Das Euler-Verfahren sowie auch die modifizierte und verbesserte Version dessen haben die Eigenschaft, Einschrittverfahren zu sein. D.h. es ist für die Berechnung von y_{n+1} nur die Kenntnis von y_n erforderlich. Außerdem ist es explizit, was bedeutet, dass es nach y_{n+1} aufgelöst ist.

Nun gibt es die Möglichkeit, ein implizites Verfahren zu suchen, welches aber den Nachteil hat, dass im allgemeinen ein nichtlineares Gleichungssystem zu lösen ist.

Eine andere Möglichkeit wäre das Nutzen von Mehrschrittverfahren.

Lineare Mehrschrittverfahren

Für ein lineares k -Schritt-Verfahren benötigt man ein sogenanntes Anlaufstück, da die Anfangsbedingung nur einen Wert liefert. Es sind jedoch mehr Werte erforderlich (genau gesagt k Werte). Diese beschafft man sich üblicherweise mit Hilfe eines Einschrittverfahrens, bis man genügend Werte hat.

Lineares Dreischrittverfahren

y_0, y_1, y_2 sind gegeben.

$$y_{n+3} + \frac{1}{4}y_{n+2} - \frac{1}{2}y_{n+1} - \frac{3}{4}y_n = \frac{1}{8}h [19f(t_{n+2}, y_{n+2}) + 5f(t_n, y_n)]$$

Lineare Mehrschrittverfahren

Lineare k -Schritt-Verfahren haben viele günstige numerische Eigenschaften (hohe Konsistenzordnung und Stabilität) und eine daraus schließende hohe Geschwindigkeit der Konvergenz (Konvergenzordnung).

bekannte Mehrschrittverfahren

zu den bekannten Mehrschrittverfahren gehören:

- Simpson-Regel (Thomas Simpson, 1710-1761)
- Adams-Bashforth (John Couch Adams, 1819-1892, Francis Bashforth, 1819-1912)
- Adams-Moulton-Verfahren (Forest Ray Moulton, 1872-1952)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit