

## KAPITEL 1

# Komplexe Zahlen

Lernziele dieses Abschnitts sind:

- (1) Analytische und geometrische Darstellung komplexer Zahlen,
- (2) Grundrechenarten für komplexe Zahlen,
- (3) Konjugation und Betrag komplexer Zahlen,
- (4) Lösung quadratischer Gleichungen in  $\mathbb{C}$ ,
- (5) Formel von Moivre, Satz über die Einheitswurzeln,
- (6) Fundamentalsatz der Algebra und Identitätssatz (ohne Beweise).

### 1. Komplexe Zahlenebene

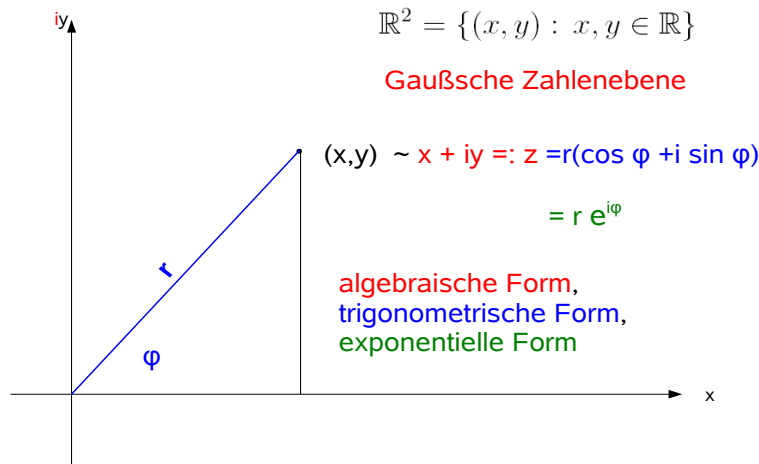
In der mit einem kartesischen  $(x, y)$ -Koordinatensystem versehenen Ebene stellen die Punkte der  $x$ -Achse die reellen Zahlen dar. *Komplexe Zahlen* ergeben sich nun dadurch, dass alle Punkte  $z = (x, y)$  als „Zahlen“ aufgefasst werden und man schreibt

$$z = x + iy.$$

Man nennt  $z$  *komplexe Zahl* mit dem *Realteil*  $\operatorname{Re} z = x$  und dem *Imaginärteil*  $\operatorname{Im} z = y$ . Man nennt die  $x$ -Achse *reelle Achse* und die  $y$ -Achse wird *imaginäre Achse* genannt. Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit  $\mathbb{C}$  bezeichnet.

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Geometrisch lassen sich die komplexen Zahlen als Punkte bzw. Vektoren einer Ebene darstellen. Die Ebene, deren Punkte als komplexe Zahlen aufgefasst werden, heißt *komplexe Zahlenebene* oder *Gaußsche Zahlenebene*.



**1.1. Grundrechenarten in  $\mathbb{C}$ .** Die Summe und Differenz komplexer Zahlen ist durch

$$(x + iy) + (u + iv) := (x + u) + i(y + v)$$

$$(x + iy) - (u + iv) := (x - u) + i(y - v).$$

definiert.

Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist definiert als

$$\begin{aligned} (x + iy)(u + iv) &= x(u + iv) + iy(u + iv) = xu + ixv + iyu + iyiv \\ &= xu + i^2 yu + i(xv + yu) = (xu - yv) + i(xv + yu). \end{aligned}$$

**BEMERKUNG 1.1.** Die Addition/Subtraktion/Multiplikation von komplexen Zahlen erfolgt formal wie für reelle Zahlen; es ist nur zu beachten, dass  $i^2 = -1$  ist.

Bei der Definition der Division benutzt man trickreich die binomische Formel:

$$(u + iv)(u - iv) = u^2 - (iv)^2 = u^2 + v^2$$

und damit ist

$$\frac{(x + iy)}{(u + iv)} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{(xu + yv) + i(yu - xv)}{u^2 + v^2} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i \frac{yu - xv}{u^2 + v^2}.$$

**BEMERKUNG 1.2.** Durch Erweiterung mit  $u - iv$  wird der Nenner reell.

**BEISPIEL 1.1.**

$$\frac{8 + 2i}{7 - i} = \frac{(8 + 2i)(7 + i)}{(7 - i)(7 + i)} = \frac{56 - 2 + i(8 + 14)}{49 + 1} = \frac{54}{50} + i \frac{22}{50}.$$

## 2. Konjugation und Betrag komplexer Zahlen

DEFINITION 1.1. Die komplexe Zahl  $\bar{z} = x - iy$  heißt die zu  $z = x + iy$  konjugiert komplexe Zahl und  $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$  heißt Betrag (oder auch Norm, Länge, Modul) der komplexen Zahl  $z$ .

Eigenschaften:

- (1)  $\overline{\bar{z}} = z$ ,
- (2)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ,
- (3)  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ,
- (4)  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ,
- (5)  $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ ,
- (6)  $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$ ,
- (7)  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$  bzw.  $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ ,
- (8)  $|z| \geq 0$  und  $|z| = 0 \iff z = 0$ ,
- (9)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ,
- (10)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  (Dreiecksungleichung).

## 3. Gleichheit komplexer Zahlen

Wir betrachten zwei komplexe Zahlen  $z_1 = x + iy$  und  $z_2 = u + iv$ , dann gilt

$$\begin{aligned} z_1 = z_2 & \iff x + iy = u + iv \\ & \iff x - u = i(v - y) \\ \Rightarrow (x - u)(x - u) & = \underbrace{(x - u)^2}_{\geq 0} = i(v - y)i(v - y) = \underbrace{-(v - y)^2}_{\leq 0} \end{aligned}$$

und damit folgt  $(x - u)^2 = (v - y)^2 = 0$ , also  $x = u$  und  $y = v$ . Offensichtlich folgt umgekehrt aus  $x = u$  und  $y = v$  sofort  $z_1 = z_2$ .

SATZ 1.1. Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn ihr Real- und Imaginärteil übereinstimmen.

In trigonometrischer Form erhält man:

$$z_1 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = R(\cos \Phi + i \sin \Phi) = z_2$$

Da mit  $z_1 = z_2$  auch  $\bar{z}_1 = \bar{z}_2$  gilt, ist

$$r^2 = z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 = R^2 \quad \text{und damit} \quad r = R \quad (r, R \geq 0).$$

Es verbleiben damit 2 Gleichungen, die gleichzeitig erfüllt sein müssen:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \cos \Phi, \\ \sin \varphi = \sin \Phi \end{cases} \iff \begin{cases} \cos \varphi - \cos \Phi = -2 \sin \left( \frac{\varphi + \Phi}{2} \right) \cos \left( \frac{\varphi - \Phi}{2} \right) = 0, \\ \sin \varphi - \sin \Phi = 2 \cos \left( \frac{\varphi + \Phi}{2} \right) \cos \left( \frac{\varphi - \Phi}{2} \right) = 0. \end{cases}$$

Folglich muss gelten:  $\varphi = \Phi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

#### 4. Potenzen

Als Spezialfall der Multiplikation erhält man für  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ :

$$z^2 = r^2(\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi))$$

und allgemein

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Weitere Spezialfälle ergeben sich für  $r = 1$ :

**SATZ 1.2. Formel von Moivre:**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

und

**Formel von Euler:**  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ .

Bemerkung: In der Funktionentheorie kann man nachweisen, dass  $e^{i\varphi}$  tatsächlich als Exponentialfunktion betrachtet werden kann. Insbesondere gelten die Rechenregeln für die Exponentialfunktion, d.h.

$$e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}, \quad e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}.$$

Dies könnte man auch über Additionstheoreme für Sinus und Cosinus beweisen. Es gilt aber ganz allgemein für eine beliebige komplexe Zahl  $z = x + iy$ :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

und für zwei beliebige komplexe Zahlen  $z_1 = x_1 + iy_1$  und  $z_2 = x_2 + iy_2$ :

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

## 5. Wurzeln

Wie löst man eine Gleichung der Form

$$z^n = a?$$

Wir betrachten zunächst den Fall  $a = 1$  und bestimmen die  $n$ -ten **Einheitswurzeln**, also Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1.$$

Hieraus folgt zunächst  $|z^n| = |z|^n = 1 \iff |z| = 1$ . Somit hat  $z$  in Polarkoordinaten die Darstellung  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$  und damit ist

$$z^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) = 1 = \cos 0 + i \sin 0,$$

da komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn ihr Real- und Imaginärteil übereinstimmen bzw. die Beträge gleich sind und sich die Argumente um Vielfache von  $2\pi$  unterscheiden, gilt weiterhin

$$\varphi = \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aufgrund der  $2\pi$ -Periodizität von Sinus und Kosinus gibt es aber nur  $n$  verschiedene Wurzeln:

**SATZ 1.3. (Einheitswurzeln)** *Es gibt genau  $n$  verschiedene komplexe Zahlen  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ , die der Gleichung*

$$z^n = 1$$

*genügen, diese sind gegeben durch*

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

In analoger Weise gehen wir nun bei der allgemeinen Gleichung  $z^n = a$  vor. Wir stellen beide komplexe Zahlen zunächst in Polarkoordinaten dar:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{und} \quad a = R(\cos \Phi + i \sin \Phi).$$

Damit geht die Gleichung  $z^n = a$  über in (Ausrechnen von  $z^n$  und einsetzen in die Gl.)

$$r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = R(\cos \Phi + i \sin \Phi).$$

Wenn diese beiden komplexen Zahlen gleich sind, dann muss auch  $|z^n| = |z|^n = r^n = |a| = R$  gelten und wir haben erhalten, dass gilt

$$r = \sqrt[n]{R},$$

da sowohl  $r$  als auch  $R$  nichtnegative reelle Zahlen sind. Aus der Gleichheit komplexer Zahlen (in trigonometrischer Form) folgt außerdem

$$n\varphi - \Phi = 2k\pi \iff \varphi = \frac{\Phi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aufgrund der  $2\pi$ -Periodizität vom Sinus und Cosinus gibt es allerdings wiederum nur  $n$  voneinander verschiedene Lösungen von  $z^n = a$ :

$$z_k = \sqrt[n]{R} \left( \cos \frac{\Phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\Phi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

bzw.

$$z_k = \sqrt[n]{R} e^{i\frac{\Phi+2k\pi}{n}} = \left( \sqrt[n]{R} e^{i\frac{\Phi}{n}} \right) e^{i\frac{2k\pi}{n}} = z_0 \cdot e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Damit kann man z.B. auch quadratische Gleichungen lösen:

**BEISPIEL 1.2.** *Man bestimme alle Lösungen der quadratischen Gleichung*

$$z^2 + (1+i)z + \frac{9}{4}(1+i)^2 = 0.$$

*Lösung mittels quadratischem Ergänzen:*

$$\begin{aligned} z^2 + (1+i)z + \frac{9}{4}(1+i)^2 &= \left( z + \frac{1+i}{2} \right)^2 - \left( \frac{1+i}{2} \right)^2 + \frac{9}{4}(1+i)^2 = 0 \\ \iff \left( z + \frac{1+i}{2} \right)^2 &= -2(1+i)^2 = -4i = 4 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

*und damit ergeben sich die beiden Lösungen:*

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{(1+i)}{2} + \sqrt{4} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \\ &= -\frac{(1+i)}{2} + 2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\left( \frac{1+2\sqrt{2}}{2} \right) + \left( \frac{2\sqrt{2}-1}{2} \right) i, \\ z_2 &= -\frac{(1+i)}{2} - \sqrt{4} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \\ &= -\frac{(1+i)}{2} - 2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\left( \frac{1-2\sqrt{2}}{2} \right) - \left( \frac{2\sqrt{2}+1}{2} \right) i. \end{aligned}$$

Wir haben gesehen, dass die quadratische Gleichung im Bereich der komplexen Zahlen immer lösbar ist. Es gilt aber noch mehr.

**SATZ 1.4. (Fundamentalsatz der Algebra)** *Jedes Polynom  $p(z)$  vom Grad  $\geq 1$  hat in  $\mathbb{C}$  eine Nullstelle.*

Folgerung: Jedes Polynom  $p(z)$  vom Grad  $n \geq 1$  lässt sich (über  $\mathbb{C}$ ) in Linearfaktoren zerlegen:

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n),$$

wobei  $a_n$  eine beliebige aber feste komplexe Zahl ist und die  $z_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , nicht notwendig voneinander verschiedene Nullstellen von  $p(z)$  sind.

SATZ 1.5. (*Identitätssatz*) *Stimmen zwei Polynome*

$$p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j \quad \text{und} \quad q(z) = \sum_{j=0}^n b_j z^j$$

*(höchstens)  $n$ -ten Grades an (wenigstens)  $(n+1)$  Stellen überein, so sind die Polynome gleich, d.h.  $a_j = b_j$  für alle  $j$ .*