2. Vektorräume

2.1. Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

Vektoren sind gerichtete Größen, die durch ihre *Länge* (*Betrag*, *Norm*) und *Richtung* gekennzeichnet sind.

Physikalische Beispiele für Vektoren: Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, elektrische und magnetische Feldstärke.

Zu je zwei Punkten P und Q des Raumes gibt es genau eine Parallelverschiebung (des Raumes), die P nach Q bringt (abbildet). Diese Verschiebung wird mit $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ bezeichnet bzw. der Vektor hat den Anfangspunkt P und den Endpunkt Q. Vektoren, die durch Parallelverschiebung ineinander überführt werden können, werden als gleich angesehen (freie Vektoren). Den zu $\vec{v}$ gleich langen, aber entgegengesetzt gerichteten Vektor bezeichnet man mit $-\vec{v}$. Als *Nullvektor* bezeichnet man den Vektor $\vec{0} = \overrightarrow{PP}$ (nichts wird verschoben).

2.2. Vektoraddition.

Führt man zwei Parallelverschiebungen, erst $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ und dann $\vec{b} = \overrightarrow{QR}$ aus, so ergibt sich wieder eine Parallelverschiebung, nämlich $\vec{c} = \overrightarrow{PR}$.

Wir nennen $\vec{c}$ *die Summe* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und schreiben:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{array}{rl}
\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} & \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \\
\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} & \text{(Kommmutativgesetz)} \\
\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} & \text{(Assoziativgesetz)}
\end{array}$$

Die *Differenz* von Vektoren wird erklärt durch

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

2.3. Skalares Vielfaches.

Zu jeder reellen Zahl $\alpha \geq 0$ und einem Vektor $\vec{a}$ bezeichnet $\alpha\vec{a}$ (das α-fache von $\vec{a}$) den Vektor, der dieselbe Richtung hat wie $\vec{a}$, aber die α-fache Länge.

Im Fall $\alpha < 0$ setzt man $\alpha\vec{a} = -(|\alpha|\vec{a})$.

Sonderfälle: $0\vec{a} = \vec{0}$ und $\alpha\vec{0} = \vec{0}$.

Rechenregeln:
$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}, \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \quad (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$

2.4. Betrag.

Die Länge eines Vektors $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ist die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ und nennt sie den *Betrag* des Vektors $\vec{a}$. Man schreibt dafür $|\vec{a}|$ (oder auch $||\vec{a}||$).

Rechenregeln:

$$\begin{array}{rcll} |\alpha\vec{a}| & = & |\alpha||\vec{a}|, & \text{insbesondere } |-\vec{a}| = |\vec{a}|, \\ |\vec{a} + \vec{b}| & \leq & |\vec{a}| + |\vec{b}| & \text{(Dreiecksungleichung)} \end{array}$$

Ein Vektor vom Betrag 1 heißt *Einheitsvektor*.

Zu jedem vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ gehört der *Einheitsvektor in Richtung* $\vec{a}$: $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

2.5. Vektoren im Koordinatensystem.

Wir legen im Raum ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Ursprung $\mathcal{O}$ fest. Dadurch werden gleichzeitig drei ausgezeichnete Vektoren gegeben, nämlich die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ in Richtung der positiven $\vec{e}_1-, \vec{e}_2-$ bzw. $\vec{e}_n-$ Achse. Wir nennen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ eine ***kartesische Basis*** und bezeichnen das Koordinatensystem mit

$$(\mathcal{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n).$$

Der Vektor $\overrightarrow{\mathcal{O}A}$ heißt *Ortsvektor* des Punktes $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$; er ist eindeutig zerlegbar als Summe

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n.$$

Abkürzend schreibt man bei festgelegtem Koordinatensystem:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \iff \vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n = \overrightarrow{\mathcal{O}A} \text{ mit } A = (a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n).$$

Man nennt $a_i\vec{e}_i$ die *Komponente* von $\vec{a}$ in $\vec{e}_i$-Richtung $(i = 1,\, 2, \ldots\, n)$ und die Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$ die Koordinaten des Vektors $\vec{a}$. Die Länge des Vektors läßt sich (im $\mathbb{R}^3$ mit dem Satz des Phythagoras) berechnen zu: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$.

2.6. Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$.

Das *Skalarprodukt* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}), & \text{falls } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ und } \vec{b} \neq 0, \\ 0, & \text{falls } \vec{a} = \vec{0} \text{ oder } \vec{b} = 0. \end{cases}$$

Das Skalarprodukt, auch inneres Produkt genannt, ist eine *Zahl* (Skalar).

BEISPIEL 8.19. *Wegen* $\vec{e}_i = 1$ *gilt für einen beliebigen Vektor* $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ *stets*

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_i = |\vec{a}| \cos \sphericalangle(\vec{a},\, \vec{e}_i) = a_i,\;\; i = 1, 2, 3.$$

Damit erhält man

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{a} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{a} \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3.$$

Die Faktoren $\cos \sphericalangle(\vec{a},\, \vec{e}_i)$ *nennt man* Richtungskosinus von $\vec{a}$.

Rechenregeln für das Skalarprodukt:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	(Kommutativgesetz),
$(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$	(für $\alpha \in \mathbb{R}$),
$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$	(Distributivgesetz),
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a}$ orthogonal zu $\vec{b}$	(Orthogonalitätstest),
$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$	

Die Koordinatendarstellung $\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i\vec{e}_i = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ bezüglich einer kartesischen Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ermöglicht eine einfache Berechnung des Skalarprodukts und der Richtungscosinus:

> $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$
>
> $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$, falls $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$,
>
> insbesondere Richtungscosinus $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{e}_i) = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$, $i = 1, 2, 3$, für die Basisvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.7. Skalarprodukt für Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

Im $\mathbb{R}^n$ ist unklar, was der Winkel zwischen 2 Vektoren sein soll, in diesem Fall *definiert* man in völliger Analogie zum Fall $n = 3$ deshalb:

> Definition 8.13. *Das Skalarprodukt zweier Vektoren* $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n$ *und* $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \ldots + b_n\vec{e}_n$ *ist definiert als*
>
> $$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n$$
>
> *und der Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren ist*
>
> $$\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) := \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$
>
> *Folglich sind zwei Vektoren **orthogonal**, wenn ihr Skalarprodukt gleich Null ist.*

Sowohl im $\mathbb{R}^3$ als auch im $\mathbb{R}^n$ gilt deshalb die folgende orthogonale Zerlegung von Vektoren:

Orthogonale Zerlegung von $\vec{a}$ längs $\vec{b}$, falls $\vec{b} \neq \vec{0}$.

$$\vec{a} = \vec{a}_{\vec{b}} + \vec{a}_{\vec{b}}^{\perp}$$

mit den Komponenten

$$\vec{a}_{\vec{b}} := \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

in Richtung $\vec{b}$ und

$$\vec{a}_{\vec{b}}^{\perp} = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

orthogonal zu $\vec{b}$.

Beispiel 8.20. *Ein spurgebundenes Fahrzeug (Eisenbahn, Straßenbahn, Transrapid, …) übt momentan eine Antriebskraft vom Betrag 4 aus und bewegt sich dabei auf Schienen, die in Richtung* $(\frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$ *verlegt sind. Zusätzlich wirkt auf das Fahrzeug die Windkraft* $(\frac{3}{4}\sqrt{2}, -\frac{5}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.
Wie groß ist die Gesamtkraft in Fahrtrichtung?

Definition 8.14. *Eine* $n \times n$*-Matrix heißt* orthogonal, *wenn gilt:*

$$A^T A = E, \qquad (\textit{also } A^T = A^{-1}).$$

Folgerung: Die Zeilenvektoren (Spaltenvektoren) von A sind paarweise orthogonale Einheitsvektoren.

Beispiel 8.21. *Die Matrizen*

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sind orthogonal. Wir weisen das für B *nach. Die Spaltenvektoren von* B *sind*

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie man leicht nachrechnet sind sie alle Einheitsvektoren:

$$|\vec{b}_1| = |\vec{b}_2| = |\vec{b}_3| = |\vec{b}_4| = \sqrt{\frac{1}{4}(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)} = 1.$$

Die paarweise Orthogonalität wird nachgewiesen durch das Ausrechnen der Skalarprodukte:

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{(-1)}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{(-1)}{2} \cdot \tfrac{(-1)}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{(-1)}{2} = 0, \\
\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{(-1)}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{(-1)}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 0, \\
\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_4 &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{(-1)}{2} + \tfrac{(-1)}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{(-1)}{2} \cdot \tfrac{(-1)}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 0, \\
\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{(-1)}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{(-1)}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 0, \\
\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_4 &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{(-1)}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{(-1)}{2} \cdot \tfrac{(-1)}{2} + \tfrac{(-1)}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 0, \\
\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_4 &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{(-1)}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{(-1)}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Folglich ist $B^{-1} = B^T$.