Die 4 Dimensionen – Quaternionen in der Kinematik

1. Workshop Robotik
Hochschule Mittweida (FH)
Institut für Automatisierungstechnik

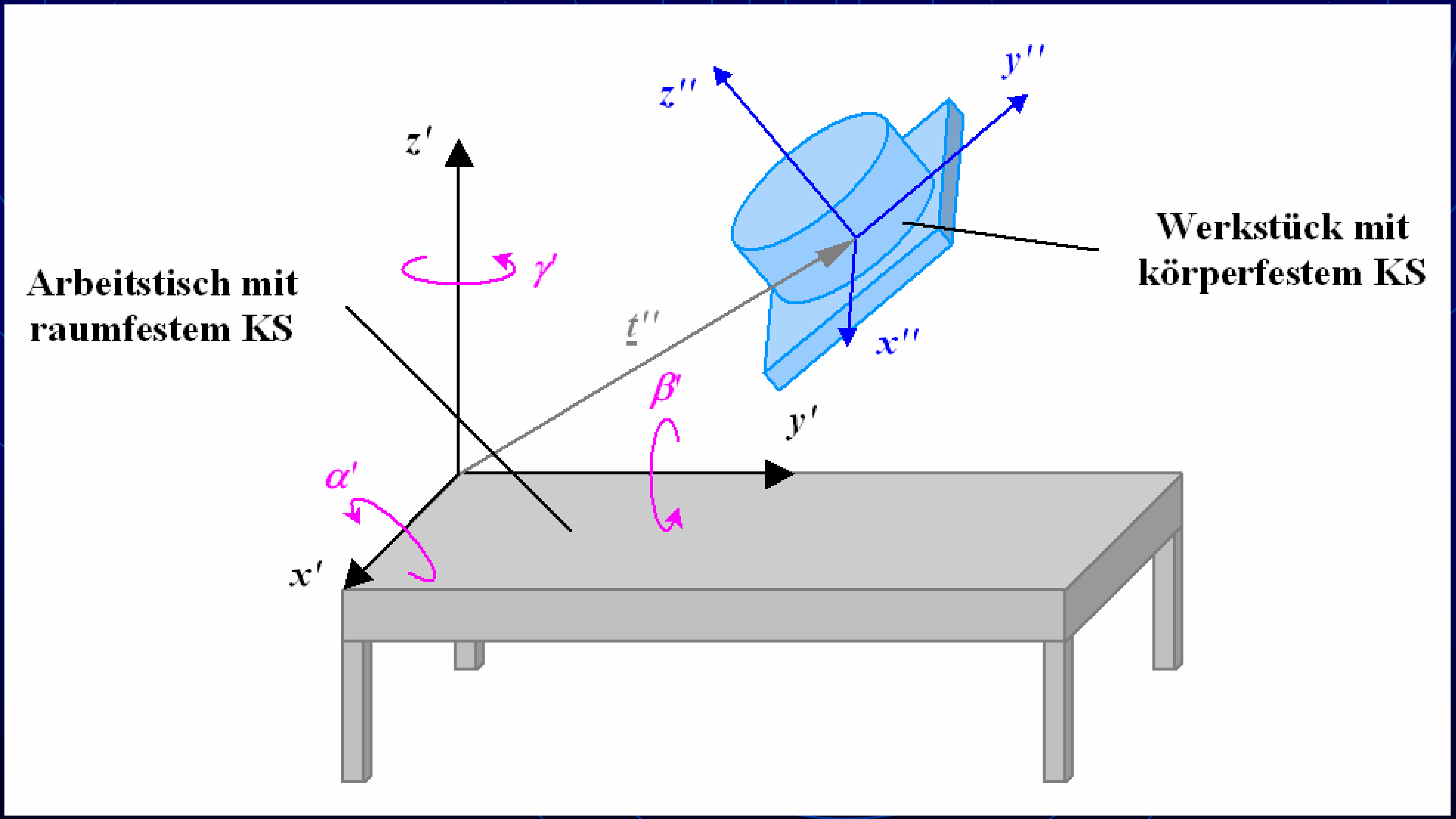
2004

Dipl.-Ing. (FH) Falko Neubert

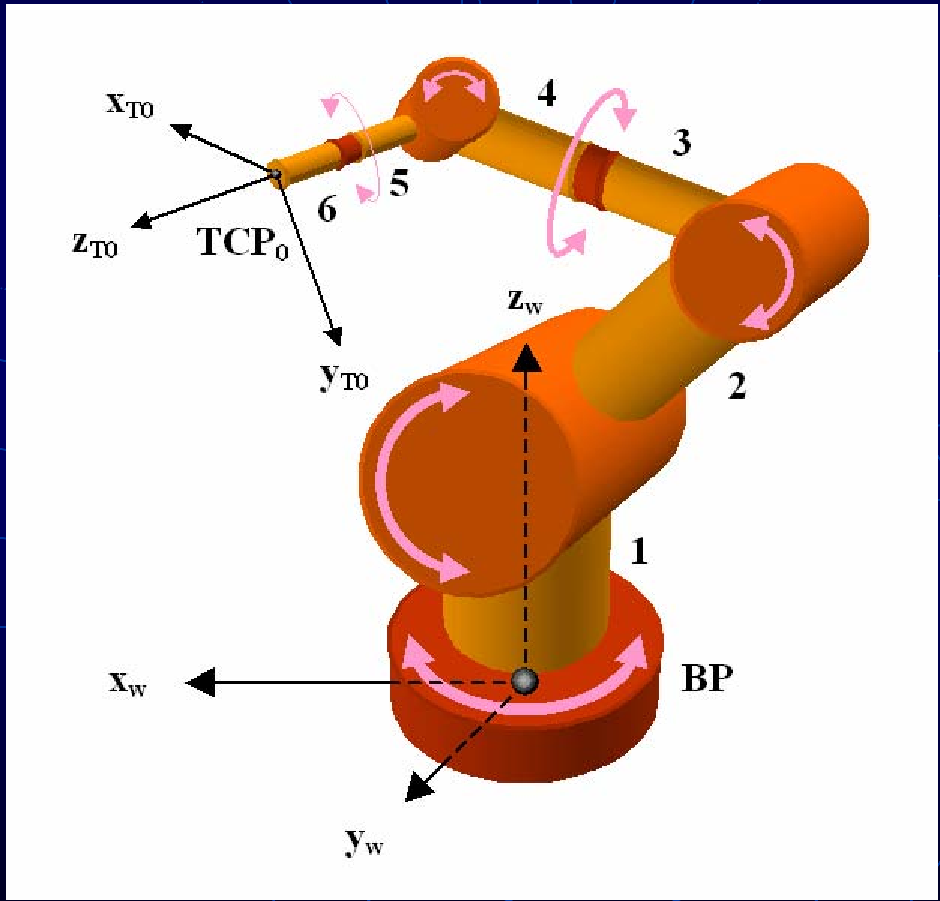
Inhalt

1. Historie
2. Mathematische Grundlagen
3. Koordinatentransformation
   - 3.1. Ausgangssituation
   - 3.2. Vortransformation
   - 3.3. Rücktransformation
4. Praktische Bedeutung

Lagebestimmung eines Körpers im Raum durch Beziehungen zwischen Koordinatensystemen (KS) ⇒ Framekonzept



Welt- und Werkzeug-KS an einem 6-achsigen Knickarm-IR



1. Historie

- Entdeckung der Verwendbarkeit der Ausdrücke $x + y\sqrt{-1}$ in der Ebene $\rightarrow$ Versuche für komplexe Zahlen im Raum
- Ab 1833 W. R. HAMILTON $\rightarrow$ Rechnungen mit Raumvektoren und Darstellung durch komplexe Zahlen
- 1843 HAMILTON's Theorie der goniometrischen Quaternionen mit Nichtkommutativität in der Multiplikation
- Ansatz über die Verknüpfung von $h^2 = i^2 = j^2 = hij = -1$
- Definition des Quaternion $\mathbb{H}$ mit $q = Q_1 + Q_2 h + Q_3 i + Q_4 j$

2. Mathematische Grundlagen

- Vierdimensionale Divisionsalgebra über dem Körper von $\mathbb{R}$ mit <u>nicht</u> kommutativer Multiplikation

- Erweiterung von $\mathbb{C} \rightarrow$ hyperkomplexe Zahlen (nur bedingt)

- Schiefkörper durch Übertragung von Addition und Multiplikation aus $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{H}$

- Ursprungsdefinition $\boldsymbol{q = Q_1 + Q_2 h + Q_3 i + Q_4 j}$
  $\rightarrow$ $\boldsymbol{Q_1}$, $\boldsymbol{Q_2}$, $\boldsymbol{Q_3}$, $\boldsymbol{Q_4}$ reelle und $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ imaginäre Zahlen

- $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ drei <u>unterschiedliche</u> Arten von Imaginärzahlen (Richtungen) $\rightarrow$ Nichtkommutativität

2. Mathematische Grundlagen

- Nichtkommutativität in der Multiplikation laut Tabelle

$\cdot$	h	i	j
h	-1	j	$-i$
i	$-j$	-1	h
j	i	$-h$	-1

- Substitution zur Vereinfachung $Q_1 = q_1; Q_2 h = q_2; Q_3 i = q_3; Q_4 j = q_4$

$$q = Q_1 + Q_2 h + Q_3 i + Q_4 j \Rightarrow q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$$

2. Mathematische Grundlagen

- Für jedes Quaternion existiert ein konjugiertes Quaternion

$$q^* = q_1 - q_2 - q_3 - q_4$$

- Bildung des Betrages von q

$$|q| = \sqrt{q \cdot q^*}$$

$$= \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$$

2. Mathematische Grundlagen

- Definition des Inversen von $\boldsymbol{q}$

$$\boldsymbol{q}^{-1} = \frac{\boldsymbol{q}^*}{|\boldsymbol{q}|^2}$$

- Betrag von $\boldsymbol{q}$ gleich 1 $\rightarrow$ Einheitsquaternion

$$\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^*$$

Orientierungsbeschreibung i.d.R. mit Einheitsquaternion!

3. Koordinatentransformation

- Quaternionentransformation mittels Multiplikation
- Addition zur Verrechnung interner Komponenten
- Vor- und Rücktransformation durch Definition von Bezügen

3.1. Ausgangssituation

- Allgemeine Darstellung der komplexen Ebene

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi} \\ &\quad | \, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} \cdot \cos(\varphi); \boldsymbol{bi} = \boldsymbol{ri} \cdot \sin(\varphi) \\ &\quad = \boldsymbol{r}[\cos(\varphi) + \boldsymbol{i} \cdot \sin(\varphi)] \end{aligned}$$

- Darstellung der Orientierung des Einheitsquaternions

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q} &= \frac{\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{0\omega} \bullet \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{1\omega}}{|\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{0\omega}| \cdot |\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{1\omega}|} + \frac{\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{0\omega} \times \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{1\omega}}{|\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{0\omega}| \cdot |\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{1\omega}|} \\ &= \cos(\omega/2) + \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \sin(\omega/2) \\ &= \cos(\omega/2) + \boldsymbol{\sigma}_x \boldsymbol{h} \cdot \sin(\omega/2) + \boldsymbol{\sigma}_y \boldsymbol{i} \cdot \sin(\omega/2) + \boldsymbol{\sigma}_z \boldsymbol{j} \cdot \sin(\omega/2) \end{aligned}$$

3.1. Ausgangssituation

- Die Rotationskoordinaten der Punkte P_A, P_B und P_C bzgl. des zugehörigen Einheitsquaternions in der Abbildung ergeben sich dann nach folgender Bildungsvorschrift:

$$P_{1A} = q \cdot P_{0A} \cdot q^{*}; P_{B} = q \cdot P_{B} \cdot q^{*}; P_{1C} = q \cdot P_{0C} \cdot q^{*}$$

3.1. Ausgangssituation

- Ursprungsquaternion bzw. Startquaternion

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_3 + \boldsymbol{q}_4$$
$$|\, \boldsymbol{q}_1 = \cos(\omega/2); \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{\sigma}_x \boldsymbol{h} \cdot \sin(\omega/2); \boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{\sigma}_y \boldsymbol{i} \cdot \sin(\omega/2); \boldsymbol{q}_4 = \boldsymbol{\sigma}_z \boldsymbol{j} \cdot \sin(\omega/2)$$
$$= \cos(\omega/2) + \boldsymbol{\sigma}_x \boldsymbol{h} \cdot \sin(\omega/2) + \boldsymbol{\sigma}_y \boldsymbol{i} \cdot \sin(\omega/2) + \boldsymbol{\sigma}_z \boldsymbol{j} \cdot \sin(\omega/2)$$

- Neu gebildetes Quaternion bzw. Zielquaternion

$$\boldsymbol{q}_{neu} = \boldsymbol{q}_{1neu} + \boldsymbol{q}_{2neu} + \boldsymbol{q}_{3neu} + \boldsymbol{q}_{4neu}$$
$$|\, \boldsymbol{q}_{1neu} = \cos(\omega_{neu}/2); \boldsymbol{q}_{2neu} = \boldsymbol{\sigma}_{x\,neu} \boldsymbol{h} \cdot \sin(\omega_{neu}/2);$$
$$|\, \boldsymbol{q}_{3neu} = \boldsymbol{\sigma}_{y\,neu} \boldsymbol{i} \cdot \sin(\omega_{neu}/2); \boldsymbol{q}_{4neu} = \boldsymbol{\sigma}_{z\,neu} \boldsymbol{j} \cdot \sin(\omega_{neu}/2)$$
$$= \cos(\omega_{neu}/2) + \boldsymbol{\sigma}_{x\,neu} \boldsymbol{h} \cdot \sin(\omega_{neu}/2) + \boldsymbol{\sigma}_{y\,neu} \boldsymbol{i} \cdot \sin(\omega_{neu}/2) + \boldsymbol{\sigma}_{z\,neu} \boldsymbol{j} \cdot \sin(\omega_{neu}/2)$$

3.1. Ausgangssituation

- Transformationsquaternion bzw. Relativquaternion

$$\boldsymbol{q}_T = \boldsymbol{q}_{1T} + \boldsymbol{q}_{2T} + \boldsymbol{q}_{3T} + \boldsymbol{q}_{4T}$$

$$\mid \boldsymbol{q}_{1T} = \cos(\omega_T/2); \boldsymbol{q}_{2T} = \boldsymbol{\sigma}_{xT}\boldsymbol{h} \cdot \sin(\omega_T/2);$$

$$\mid \boldsymbol{q}_{3T} = \boldsymbol{\sigma}_{yT}\boldsymbol{i} \cdot \sin(\omega_T/2); \boldsymbol{q}_{4T} = \boldsymbol{\sigma}_{zT}\boldsymbol{j} \cdot \sin(\omega_T/2)$$

$$= \cos(\omega_T/2) + \boldsymbol{\sigma}_{xT}\boldsymbol{h} \cdot \sin(\omega_T/2) + \boldsymbol{\sigma}_{yT}\boldsymbol{i} \cdot \sin(\omega_T/2) + \boldsymbol{\sigma}_{zT}\boldsymbol{j} \cdot \sin(\omega_T/2)$$

3.2. Vortransformation

- Aufstellen der Transformationsgleichung

$$q_{neu} = q \cdot q_T$$

- Lösung der Gleichung (hier ohne Herleitung)

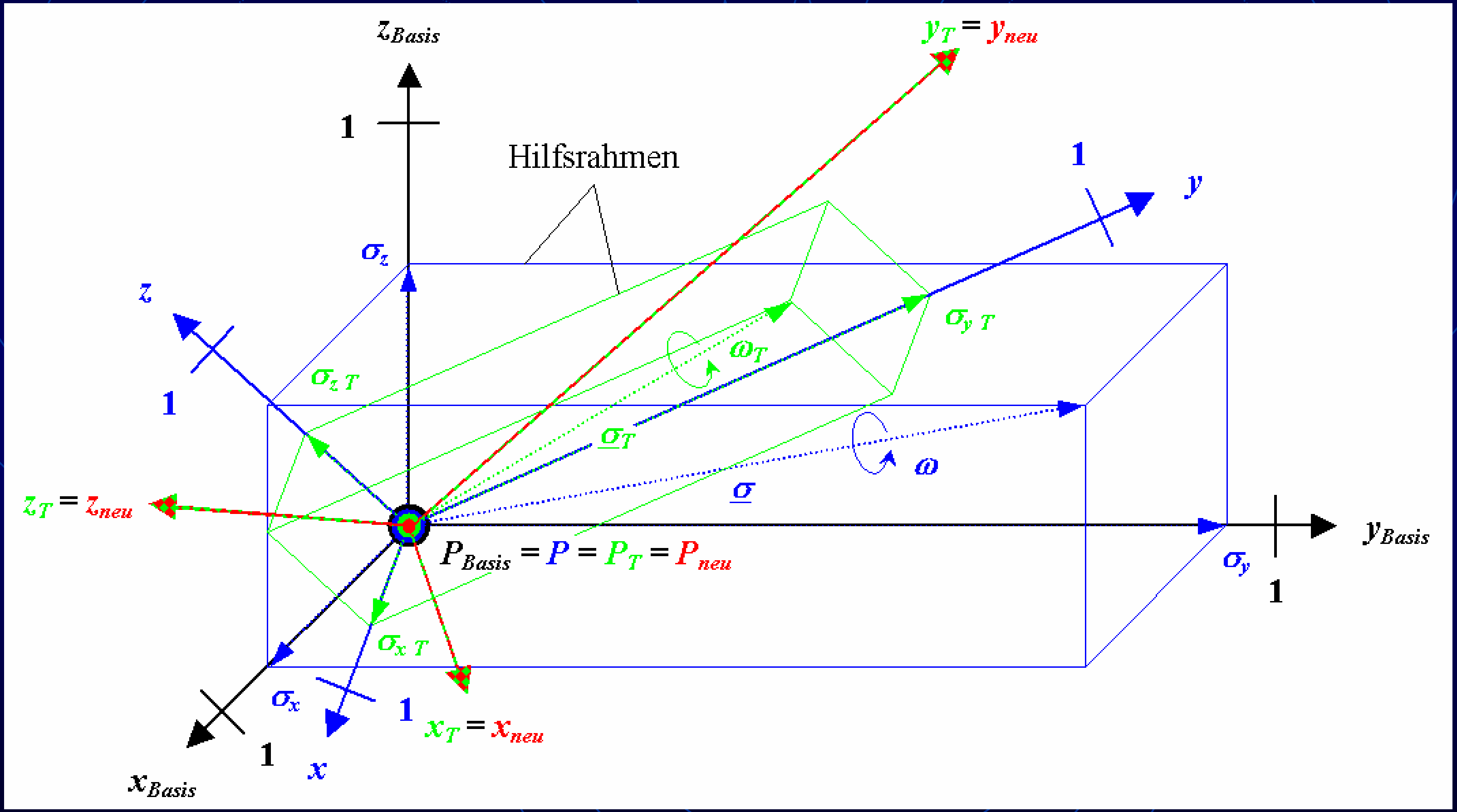
$$q_{1neu} = q_1 \cdot q_{1T} - q_2 \cdot q_{2T} - q_3 \cdot q_{3T} - q_4 \cdot q_{4T}$$

$$q_{2neu} = q_1 \cdot q_{2T} + q_2 \cdot q_{1T} + q_3 \cdot q_{4T} - q_4 \cdot q_{3T}$$

$$q_{3neu} = q_1 \cdot q_{3T} - q_2 \cdot q_{4T} + q_3 \cdot q_{1T} + q_4 \cdot q_{2T}$$

$$q_{4neu} = q_1 \cdot q_{4T} + q_2 \cdot q_{3T} - q_3 \cdot q_{2T} + q_4 \cdot q_{1T}$$

Vortransformation des KS $x\ y\ z$ nach $x_{neu}\ y_{neu}\ z_{neu}$ mit $x_T\ y_T\ z_T$



3.3. Rücktransformation

- Aufstellen der Transformationsgleichung

$$q_T = q^{-1} \cdot q_{neu}$$

- Lösung der Gleichung (hier ohne Herleitung)

$$q_{1T} = \frac{q_{1neu} + q_2 \cdot q_{2T} + q_3 \cdot q_{3T} + q_4 \cdot q_{4T}}{q_1}$$

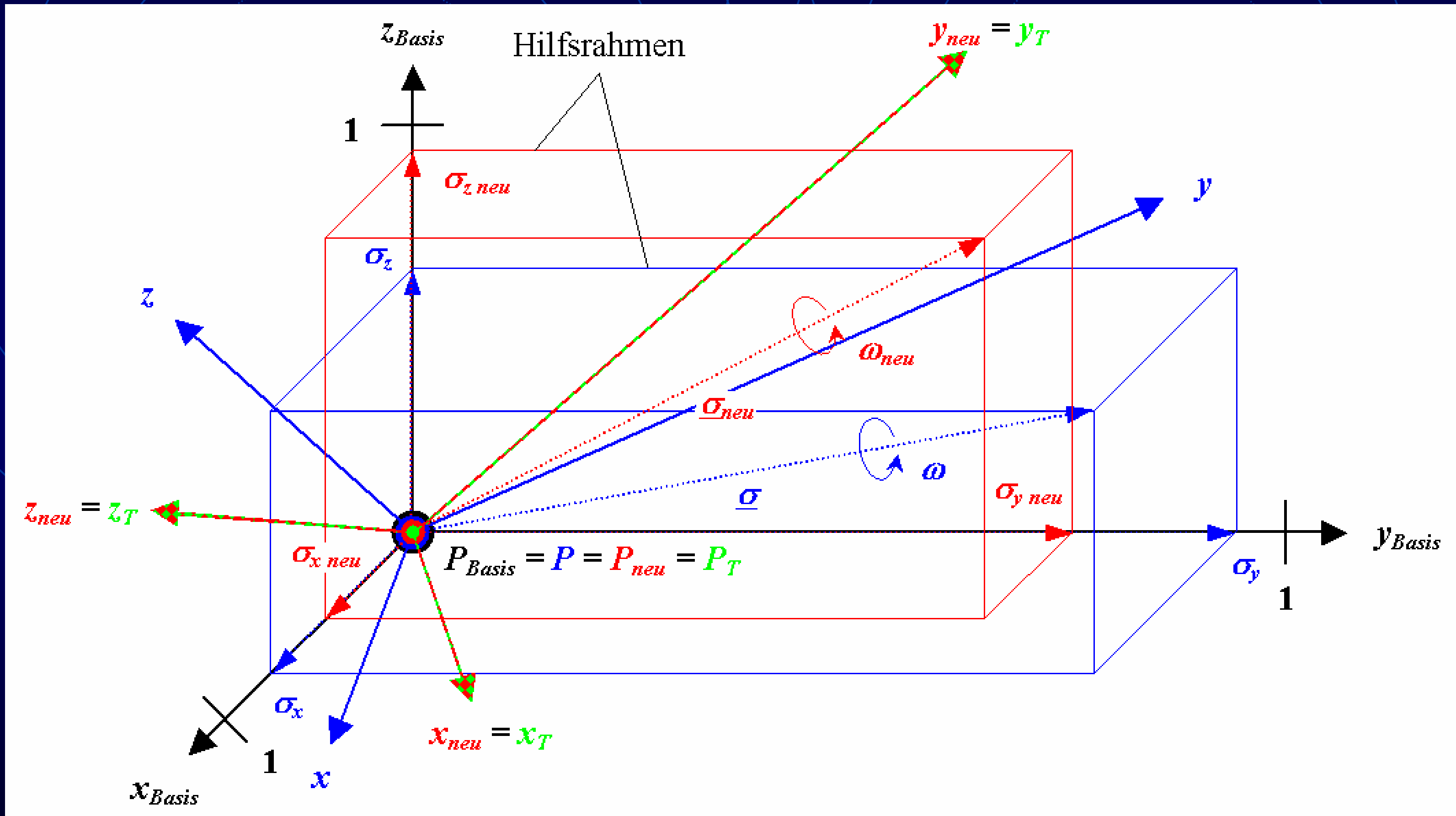
$$q_{2T} = \frac{q_{2neu} \cdot q_1 - q_2 \cdot q_4 \cdot q_{4T} - q_2 \cdot q_{1neu} + q_4 \cdot q_{3T} \cdot q_1 - q_2 \cdot q_3 \cdot q_{3T} - q_3 \cdot q_{4T} \cdot q_1}{q_1^2 + q_2^2}$$

$$q_{3T} = \frac{q_{3neu} \cdot (q_1^2 + q_2^2) + q_2 \cdot q_3^2 \cdot q_{4T} - q_3 \cdot q_{1neu} \cdot q_1 - q_3 \cdot q_2 \cdot q_{2neu}}{q_1 \cdot (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)}$$

$$+ \frac{q_4 \cdot q_2 \cdot q_{1neu} - q_4 \cdot q_{2neu} \cdot q_1 + q_2 \cdot q_4^2 \cdot q_{4T} + q_2 \cdot q_{4T} \cdot q_1^2 + q_2^3 \cdot q_{4T}}{q_1 \cdot (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)}$$

$$q_{4T} = \frac{q_{4neu} \cdot q_1 - q_2 \cdot q_{3neu} + q_3 \cdot q_{2neu} - q_4 \cdot q_{1neu}}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$$

Rücktransformation des KS $x_{neu}\ y_{neu}\ z_{neu}$ nach $x_T\ y_T\ z_T$ mit $x\ y\ z$



4. Praktische Bedeutung / Fazit

- Eindeutige Beschreibung von Orientierungen im Raum
- Vorwiegend für interaktive Computergrafiken → Spiele
- Kaum in der Robotertechnik → Rotationsmatrizen

ABER...

- Sehr kompakte Schreibweise → geringere Redundanz

$$ROT_{x_{neu};\,y_{neu};\,z_{neu}} = \begin{pmatrix} rot_{x_{neu}\,x} & rot_{x_{neu}\,y} & rot_{x_{neu}\,z} \\ rot_{y_{neu}\,x} & rot_{y_{neu}\,y} & rot_{y_{neu}\,z} \\ rot_{z_{neu}\,x} & rot_{z_{neu}\,y} & rot_{z_{neu}\,z} \end{pmatrix} \Leftrightarrow q = (q_1; q_2; q_3; q_4) = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$$

4. Praktische Bedeutung / Fazit

- Geringere Redundanz → höhere numerische Stabilität
- Weniger Rechenzeit, besonders bei vielen Orientierungen
- Keine Beachtung der Reihenfolge von Einzeltransformationen → Paralleltransformation

JEDOCH...

- Wesentlich höheres Vorstellungsvermögen („4D-Denken“) des Anwenders

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Räumliche Orientierung mit einem Quaternion