# Numerische Simulation mathematischer Modelle

## 1 Populationsdynamik

**Problem 1.** In der Vorlesung wurde das Modell zweier miteinander konkurrierender Spezies

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{d\tau} &= u_1\,(1-u_1) - b_1 u_1 u_2,\\ \frac{du_2}{d\tau} &= \rho u_2\,(1-u_2) - \rho b_2 u_1 u_2.\end{aligned}$$

unter der Voraussetzung $b_1 > 1$, $b_2 > 1$ analysiert.
Diskutieren Sie dieses Modell unter jeder der folgenden Voraussetzungen

- $b_1 > 1$, $0 < b_2 < 1$,
- $0 < b_1 < 1$, $b_2 > 1$,
- $0 < b_1 < 1$, $0 < b_2 < 1$.

**Lösung.** In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das System vier Gleichgewichtspunkte besitzt, nämlich $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (0,1)$ und $P_4 = ((b_1-1)/(b_1b_2-1), (b_2-1)/(b_1b_2-1))$. Man beachte, dass $P_4$ genau dann im ersten Quadranten eines $(u_1,u_2)$-Koordinatensystems liegt, wenn entweder $b_1, b_2 < 1$ oder $b_1, b_2 > 1$ gilt. Die zugehörigen Ableitungen sind

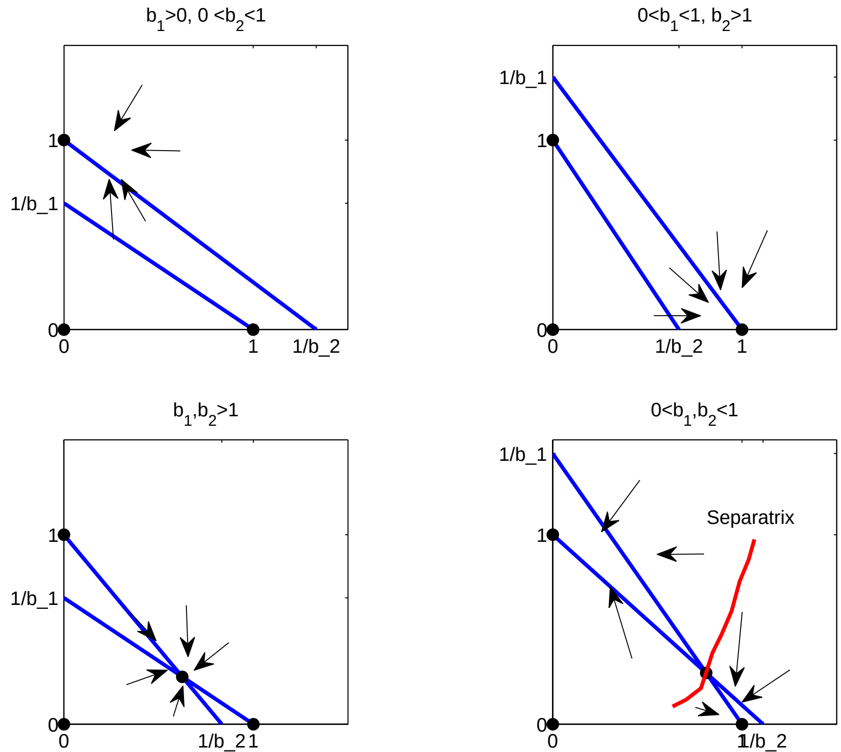
$$A(P_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix},\ A(P_2) = \begin{bmatrix} -1 & -b_1 \\ 0 & \rho(1-b_2) \end{bmatrix},\ A(P_3) = \begin{bmatrix} 1-b_1 & 0 \\ -\rho b_2 & -\rho \end{bmatrix},$$

$$A(P_4) = \frac{1}{1-b_1b_2}\begin{bmatrix} b_1-1 & b_1(b_1-1) \\ \rho b_2(b_2-1) & \rho(b_2-1) \end{bmatrix}.$$

$P_1$ ist immer instabil ($\Lambda(A(P_1)) = \{1,\rho\}$). $P_2$ ist genau dann stabil, wenn $b_2 > 1$ ($\Lambda(A(P_2)) = \{-1, \rho(1-b_2)\}$), während $P_3$ genau dann stabil ist, wenn $b_1 > 1$ ($\Lambda(A(P_3)) = \{-\rho, 1-b_1\}$). $A(P_4))$ besitzt die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{[(b_1-1)+\rho(b_2-1)] \pm \sqrt{[(b_1-1)+\rho(b_2-1)]^2 - 4\rho(1-b_1b_2)(b_1-1)(b_2-1)}}{2(1-b_1b_2)}.$$

Gilt $b_1, b_2 > 1$, so ist der Ausdruck unter der Wurzel positiv, $\lambda_{1,2}$ sind daher reell und es ist offenbar $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, also ist $P_4$ in diesem Fall instabil.
Ist dagegen $0 < b_1, b_2 < 1$, dann ist $4\rho(1-b_1b_2)(b_1-1)(b_2-1) > 0$. Daher ergeben sich zwei Fälle: Entweder ist $[(b_1-1)+\rho(b_2-1)]^2 - 4\rho(1-b_1b_2)(b_1-1)(b_2-1) \le 0$ und $A(P_4)$ besitzt einen doppelten reellen oder ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte mit jeweils dem Realteil $[(b_1-1)+\rho(b_2-1)]/[2(1-b_1b_2)] < 0$. Oder es gilt $[(b_1-1)+\rho(b_2-1)]^2 - 4\rho(1-b_1b_2)(b_1-1)(b_2-1) > 0$. In diesem Fall ist offenbar $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. In jedem der beiden Unterfälle ist $P_4$ stabil.




**Problem 2.** Wir betrachten das diskrete System

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = A\boldsymbol{y}_n \qquad \text{mit } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}. \tag{$*$}$$

Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten (für $n \to \infty$) seiner Lösungen.
**Hinweis:** Unterscheiden Sie die folgenden Fälle:
Besitzt $A$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren, $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$, zu den Eigenwerten $\lambda_1$ bzw. $\lambda_2$, dann ist

$$\boldsymbol{y}_n = \alpha\lambda_1^n \boldsymbol{v}_1 + \beta\lambda_2^n \boldsymbol{v}_2 \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

die allgemeine Lösung von ($*$). Gilt $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, d.h. sind $\lambda_{1,2}$ konjugiert komplex, so ist (für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

$$\boldsymbol{y}_n = |\lambda_1|^n \left\{\alpha\left[\cos(n\varphi)\boldsymbol{w}_1 - \sin(n\varphi)\boldsymbol{w}_2\right] + \beta\left[\cos(n\varphi)\boldsymbol{w}_1 + \sin(n\varphi)\boldsymbol{w}_2\right]\right\}$$

die allgemeine *reelle* Lösung von ($*$). (Dabei seien $\lambda_1 = |\lambda_1|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, d.h. $\lambda_2 = |\lambda_1|(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))$, und $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{w}_1 + i\boldsymbol{w}_2$ mit $\boldsymbol{w}_{1,2} \in \mathbb{R}^2$). Hier müssen folgende Unterfälle analysiert werden:

- $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le 1$ (bzw. $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| > 1$),
- $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $|\lambda_1| \le 1 < |\lambda_2|$,
- $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} \notin \mathbb{R}$, $|\lambda_1| < 1$ (bzw. $|\lambda_1| > 1$),

- $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} \notin \mathbb{R}$, $|\lambda_1| = 1$.

Besitzt $A$ nur einen linear unabhängigen Eigenvektor $\boldsymbol{v}$ (und folglich auch nur einen Eigenwert $\lambda$), dann ist die allgemeine Lösung von ($*$) durch

$$\boldsymbol{y}_n = \alpha\lambda^n \boldsymbol{v} + \beta(\lambda^n \boldsymbol{w} + n\lambda^{n-1}\boldsymbol{v}) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

gegeben (mit einem Hauptvektor $\boldsymbol{w}$, d.h. $A\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$). Hier ist

- $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| < 1$ (bzw. $|\lambda| \geq 1$)

zu untersuchen.

**Problem 3.** Man finde alle Gleichgewichtslösungen des Differentialgleichungssystems

$$\frac{du}{dt} = 1 - u\,v, \quad \frac{dv}{dt} = u - v^3$$

und bestimme, wenn möglich, ob sie stabil oder instabil sind.

**Lösung.**

$$P_1 = (1,1),\ P_2 = (-1,-1) \text{ und } A(u,v) = \begin{bmatrix} -v & -u \\ 1 & -3v^2 \end{bmatrix}.$$

$A(1,1) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -2 < 0$, also ist $P_1$ stabil (Knoten vom Typ II).
$A(-1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}, \lambda_1 > 0$, also ist $P_2$ instabil (Knoten vom Typ I).

**Problem 4.** Gesucht sind die Gleichgewichtslösungen des Differentialgleichungssystems

$$\frac{du}{dt} = \sin(u+v), \quad \frac{dv}{dt} = \exp(u) - 1.$$

Man untersuche sie auf Stabilität bzw. Instabilität.

**Lösung.**

$$P_k = (0, k\pi)\ (k \in \mathbb{Z}) \text{ und } A(u,v) = \begin{bmatrix} \cos(u+v) & \cos(u+v) \\ \exp(u) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{d.h. } A(0,k\pi) = \begin{bmatrix} \cos(k\pi) & \cos(k\pi) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], & k \text{ gerade,} \\ \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für gerade $k$ besitzt $A(0,k\pi)$ die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}, \lambda_1 > 0$, also ist $P_k$ instabil (Knoten vom Typ I).
Für ungerade $k$ besitzt $A(0,k\pi)$ die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}$ mit negativem Realteil, also ist $P_k$ stabil (Strudelpunkt).

**Problem 5.** Man bestätige, dass für jedes der folgenden Differentialgleichungssysteme der Nullpunkt ein Gleichgewichtspunkt ist. Man untersuche ihn (wenn möglich) auf Stabilität bzw. Instabilität.

- $\frac{du}{dt} = v + 3u^2, \quad \frac{dv}{dt} = u - 3v^2,$
- $\frac{du}{dt} = v + \cos(v) - 1, \quad \frac{dv}{dt} = -\sin(u) + u^3,$
- $\frac{du}{dt} = \exp(u+v) - 1, \quad \frac{dv}{dt} = \sin(u+v).$

**Lösung.**

a) Für $u = v = 0$ sind $v + 3u^2 = 0$ und $u - 3v^2 = 0$.

$$A(u,v) = \begin{bmatrix} 6u & 1 \\ 1 & -6v \end{bmatrix}, A(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mit Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \pm 1$ (instabiler Knoten vom Typ I).

b) Für $u = v = 0$ sind $v + \cos(v) - 1 = 0$ und $-\sin(u) + u^3 = 0$.

$$A(u,v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \sin(v) \\ -\cos(u) + 3u^2 & 0 \end{bmatrix}, A(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

mit Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \pm i$ (neutral stabiler Zentralpunkt).

c) Für $u = v = 0$ sind $\exp(u+v) - 1 = 0$ und $\sin(u+v) = 0$.

$$A(u,v) = \begin{bmatrix} \exp(u+v) & \exp(u+v) \\ \cos(u+v) & \cos(u+v) \end{bmatrix}, A(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mit Eigenwerten $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$ (instabiler Knoten vom Typ I).

**Problem 6.** Bestimmen Sie die Bahnen des Differentialgleichungssystems

$$\frac{du}{dt} = v^2, \quad \frac{dv}{dt} = u^2.$$

**Lösung.**

Betrachte $v = v(u)$.

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{du} = \frac{u^2}{v^2}.$$

Trennung der Veränderlichen:

$$v^2 dv = u^2 du, \int v^2 \, dv = \int u^2 \, du \Rightarrow \frac{1}{3}v^3 = \frac{1}{3}u^3 + c \Rightarrow v = \sqrt[3]{u^3 + c}, c \in \mathbb{R}.$$

**Problem 7.** Bestimmen Sie die Bahnen des Differentialgleichungssystems

$$\frac{du}{dt} = v(1 + u^2 + v^2), \quad \frac{dv}{dt} = -2u(1 + u^2 + v^2).$$

**Lösung.**

Betrachte $v = v(u)$.

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{du} = -\frac{2u(1+u^2+v^2)}{v(1+u^2+v^2)} = -\frac{2u}{v}.$$

Trennung der Veränderlichen:

$$v\,dv = -2u\,du, \int v\,dv = -\int 2u\,du \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = -u^2 + c \Rightarrow \frac{v^2}{2} + u^2 = c,$$

$c \geq 0$ (Ellipsen).

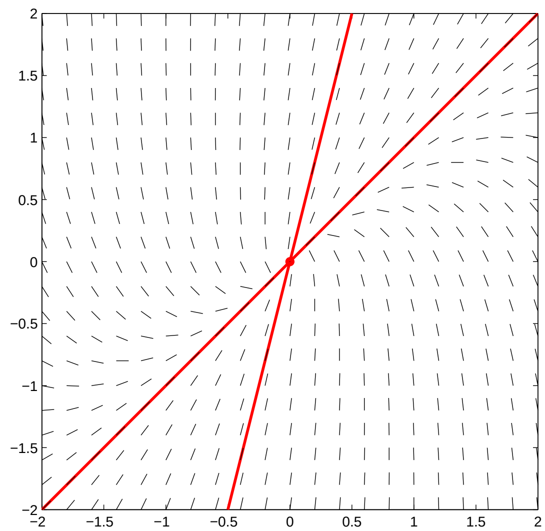
**Problem 8.** Man zeichne das Phasenporträt der linearen Gleichung

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}.$$

**Lösung.**

$A$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -6$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1 = [1, 1]^T$ und $\boldsymbol{v}_2 = [1, 4]^T$.

$(0, 0)$ ist ein stabiler Knoten vom Typ 1, die skizzierten Bahnen laufen daher alle auf $(0, 0)$ zu und zwar entlang $\boldsymbol{v}_1$ (außer der Bahn, die direkt auf $\boldsymbol{v}_2$ liegt).



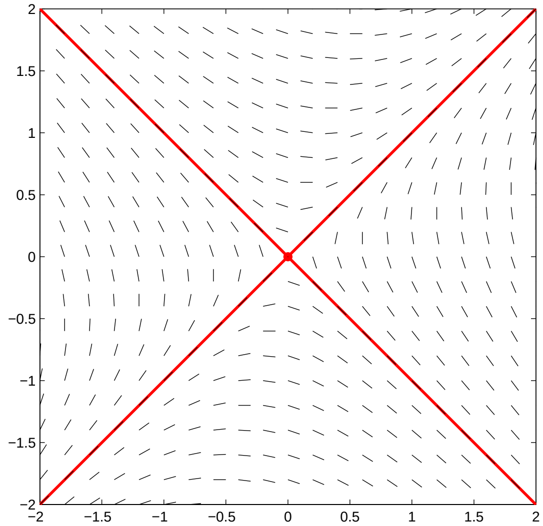

**Problem 9.** Man zeichne das Phasenporträt der linearen Gleichung

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}.$$

**Lösung.**

$A$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 4$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1 = [1, 1]^T$ und $\boldsymbol{v}_2 = [1, -1]^T$.

$(0,0)$ ist ein (instabiler) Knoten vom Typ I, die skizzierten Bahnen laufen daher alle in Richtung $\boldsymbol{v}_2$ von $(0,0)$ weg mit Ausnahme der Bahnen auf $\boldsymbol{v}_1$, die gegen $(0,0)$ streben.

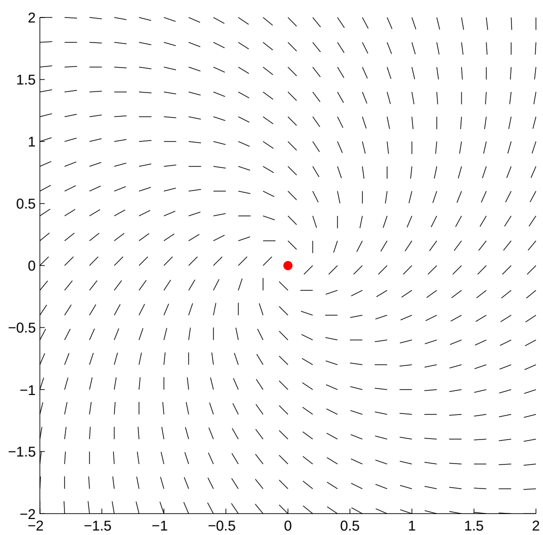



**Problem 10.** Man zeichne das Phasenporträt der linearen Gleichung

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}.$$

**Lösung.**

$A$ besitzt die Eigenwerte $-1 \pm i$. $(0,0)$ ist daher ein stabiler Strudelpunkt, die skizzierten Bahnen laufen alle auf $(0,0)$ zu.




**Problem 11.** Was bei den Pariser Friedensgesprächen wirklich geschah:

Der ursprüngliche von Henry Kissinger und Le Duc Tho zur Beilegung des Vietnamkrieges entwickelte Plan sah folgendes vor: Je 1 Million südvietnamesischer und nordvietnamesischer Ameisen sollten in den Garten hinter dem Pariser Präsidentenpalast ausgesetzt werden und den Krieg über eine lange Zeitdauer hinweg auskämpfen. Würden die südvietnamesischen Ameisen ihre nordvietnamesischen Gegner fast vollständig vernichten, sollte Südvietnam die volle Herrschaft über das ganze Land erhalten. Wären hingegen die nordvietnamesischen Ameisen siegreich, dürfte Nordvietnam ganz Südvietnam kassieren. Würde die Schlacht unentschieden ausgehen, dann sollte Südvietnam entsprechend dem Anteil der noch übrigen Ameisen aufgeteilt werden. Die mit $S$ bezeichneten südvietnamesischen Ameisen und die mit $N$ bezeichneten nordvietnamesischen Ameisen kämpfen nun gemäß den Differenzialgleichungen

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{10}S - \frac{1}{20}S\,N, \quad \frac{dN}{dt} = \frac{1}{100}N - \frac{1}{100}N^2 - \frac{1}{100}S\,N$$

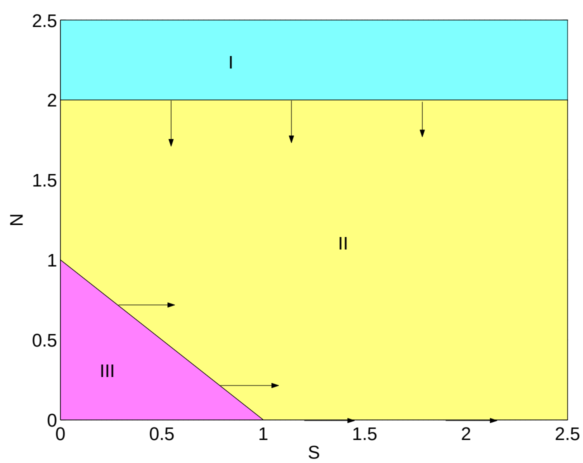
gegeneinander. Diese Gleichungen entsprechen der Wirklichkeit, da einmal die südvietnamesischen Ameisen sich sehr viel rascher als die nordvietnamesichen vermehren, die nordvietnamesischen Ameisen dagegen sehr viel bessere Kämpfer sind.

Die Schlacht, die am 19.Mai 1972 genau um 10 Uhr morgens begann, wurde von je einem Vertreter aus Polen und Kanada überwacht. Am Nachmittag des 21.Mai, um 14.43 Uhr, schüttete der polnische Vertreter, mit dem Fortgang des Kampfes unzufrieden, einen Sack voll nordvietnamesischer Ameisen in den Garten, wurde dabei aber von der Adleraugen des kanadischen Vertreters entdeckt. Die Südvietnamesen reklamierten sofort einen Verstoß, kündigten die Vereinbarung auf und machten so die Bühne frei für die nun folgenden langwierigen Gespräche in Paris. Der polnische Vertreter aber wurde zur Aburteilung vor ein Pariser Gericht gestellt. Dieses verurteilte den Polen, nachdem es noch einige Bemerkungen über die Dummheit der Südvietnamesen gemacht hatte, zu einer milden Strafe. Man rechtfertige mathematisch die Entscheidung des Gerichtes.

**Lösung.**

Eine Analyse der Gleichgewichtspunkte ist hier wenig hilfreich, denn man rechnet leicht nach, dass $(0,0)$ und $(0,1)$ die einzigen (sinnvollen) Gleichgewichtspunkte sind, die beide instabil sind.

Der erste Quadrant eines $(S,N)$-Koordinatensystems wird durch die Geraden $N=2$ und $N+S=1$ in drei Bereiche aufgeteilt, in deren Inneren $\frac{dN}{dt}$ und $\frac{dS}{dt}$ feste Vorzeichen besitzen (vergleiche Skizze).



$$\mathsf{I} = \{(S,N) : S > 0, N > 2\},\ \text{dort gilt } \frac{dS}{dt} < 0,\ \frac{dN}{dt} < 0.$$
$$\mathsf{II} = \{(S,N) : S > 0, 0 < N < 2, S+N > 1\},\ \text{dort gilt } \frac{dS}{dt} > 0, \frac{dN}{dt} < 0.$$
$$\mathsf{III} = \{(S,N) : S > 0, N > 0, S+N < 1\},\ \text{dort gilt } \frac{dS}{dt} > 0, \frac{dN}{dt} > 0.$$

Das bedeutet, dass jede Lösung, die in I oder III beginnt, schließlich nach II geht, während jede Lösung, die in II beginnt, für alle Zeiten dort bleibt.

In II ist $N$ streng monoton fallend, strebt also gegen einen Grenzwert $N_0 \in [0,2]$. $S$ kann dann nur gegen $\infty$ streben, denn wäre $\lim_{t\to\infty} S(t) = S_0 < \infty$, so wäre $(S_0, N_0)$ ein Gleichgewichtspunkt.

Wegen $\lim_{t\to\infty} S(t) = \infty$ und $\lim_{t\to\infty} N(t) = N_0$ gibt es ein $t_0$ mit $S(t) + N(t) > 101$ für alle $t \geq t_0$, also

$$\begin{aligned}
1 - S(t) - N(t) &< -100\\
N(t)\Big(1 - S(t) - N(t)\Big) &< -100N(t)\\
\frac{1}{100}N(t)\Big(1 - S(t) - N(t)\Big) &< -N(t)\\
N'(t) &< -N(t) \quad \forall t \geq t_0.
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $\lim_{t\to\infty} N(t) = 0$ ist.

Insgesamt: Jede Lösungskurve $(S(t), N(t))$ hat die Eigenschaft

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = \infty \text{ und } \lim_{t\to\infty} N(t) = 0.$$

**Problem 12.** Es gibt in der Natur mehrere Fälle, wo Spezies 1 Spezies 2 jagt, die ihrerseits Spezies 3 jagt. Ein Beispiel für diese Art Population gibt es auf der Insel Komodo in Indonesien, die von riesigen fleischfressenden Reptilien (sog. Komodo Waranen, die bis zu drei Meter lang werden) bevölkert wird, außerdem von Säugetieren (Wildschweinen und Hirschen), die ihre Nahrung sind und die sich ihrerseits von der reichhaltigen Vegetation der Insel ernähren. Wir setzen voraus, dass die Reptilien keinen Einfluß auf die Vegetation haben und dass nur die Pflanzen gegeneinander um die verfügbaren Resources kämpfen. Durch

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= -a_1 u - b_{1,2} uv + c_{1,3} u\, w\\
\frac{dv}{dt} &= -a_2 v + b_{2,1} u\, v\\
\frac{dw}{dt} &= a_3 w - a_4 w^2 - c_{3,1} u\, w
\end{aligned}$$

ist ein System von Differentialgleichungen gegeben, das diese Wechselwirkung ausdrückt. Man finde alle Gleichgewichtslösungen dieses Systems.

**Lösung.**

$$-a_1u - b_{1,2}uv + c_{1,3}uw = u(-a_1 - b_{1,2}v + c_{1,3}w) \stackrel{!}{=} 0 \tag{1}$$
$$-a_2v + b_{2,1}uv = v(-a_2 + b_{2,1}u) \stackrel{!}{=} 0 \tag{2}$$
$$a_3w - a_4w^2 + c_{3,1}uw = w(a_3 - a_4w - c_{3,1}u) \stackrel{!}{=} 0 \tag{3}$$

Aus (2) folgt $v = 0$ oder $u = a_2/b_{2,1}$.
**1. Fall:** $v = 0$ . Dann

$$u(-a_1 + c_{1,3}w) = 0 \tag{1a}$$
$$w(a_3 - a_4w - c_{3,1}u) = 0. \tag{3a}$$

Aus (1a) folgt $u = 0$ oder $w = a_1/c_{1,3}$.
Aus $u = 0$ folgt mit (3a):

$$w = 0 \text{ oder } w = a_3/a_4, \qquad \text{also } G_1(0,0,0) \text{ und } G_2(0,0,a_3/a_4).$$

Aus $w = a_1/c_{1,3}$ folgt mit (3a):

$$u = \left(\frac{a_3 - a_4a_1/c_{1,3}}{c_{3,1}}\right), \qquad \text{also } G_3\left(\frac{a_3 - a_4a_1/c_{1,3}}{c_{3,1}}, 0, \frac{a_1}{c_{1,3}}\right)$$

**2. Fall :** $u = a_2/b_{2,1}$

$$-a_1 - b_{1,2}v + c_{1,3}w = 0 \tag{1b}$$
$$w(a_3 - a_4w - c_{3,1}a_2/b_{2,1}) = 0 \tag{3b}$$

Aus (3b) folgt $w = 0$ oder $w = \frac{a_3 - c_{3,1}a_2/b_{2,1}}{a_4}$.
Aus $w = 0$ folgt mit (1b)

$$v = -a_1/b_{1,2}, \qquad \text{also } G_4\left(\frac{a_2}{b_{2,1}}, -\frac{a_1}{b_{1,2}}, 0\right).$$

Aus $w = -a_1/b_{1,2}$ folgt mit (1b)

$$v = \frac{-a_1 - c_{1,3}a_1/b_{1,2}}{b_{1,2}}, \qquad \text{also } G_5\left(\frac{a_2}{b_{2,1}}, \frac{-a_1 - c_{1,3}a_1/b_{1,2}}{b_{1,2}}, -\frac{a_1}{b_{1,2}}\right).$$

**Problem 13.** Man betrachte ein Räuber-Beute-System, in dem der Räuber noch andere Ernährungsmöglichkeiten hat. Dieses System kann durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} N_1' &= a_1N_1(\beta_1 - N_1) + \gamma_1N_1N_2 \\ N_2' &= a_2N_2(\beta_2 - N_2) - \gamma_2N_1N_2 \end{aligned}$$

ausgedrückt werden, wobei $N_1(t)$ die Räuber- und $N_2(t)$ die Beutepopulation zur Zeit $t$ bezeichnen.

- Man zeige, dass die Koordinatentransformation $\beta_i u_i(t) = N_i(t/\alpha_i\beta_i)$ dieses System auf

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1(1-u_1) + a_1 u_1 u_2 \\ u_2' &= u_2(1-u_2) - a_2 u_1 u_2 \end{aligned}$$

  reduziert, wobei $a_1 = \gamma_1\beta_2/\alpha_1\beta_1$ und $a_2 = \gamma_2\beta_1/\alpha_2\beta_2$ ist.

- Welches sind die Populationen mit stabilem Gleichgewicht, wenn (i) $0 < a_2 < 1$, (ii) $a_2 > 1$ ist?

- Man hat beobachtet, dass $a_1 = 3a_2$ gilt ($a_2$ ist ein Maß der Agressivität des Räubers). Welchen Wert hat $a_2$, wenn der Instinkt des Räubers darauf angelegt ist, seine stabile Gleichgewichtspopulation zu maximieren?

**Lösung.**

Der erste Teil der Aufgabe ist einfach.
Bestimmung der Gleichgewichtspunkte (des reduzierten Systems):

$$u_1(1-u_1) + a_1u_1u_2 = u_1(1-u_1+a_1u_2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$u_2(1-u_2) + a_2u_1u_2 = u_2(1-u_2+a_2u_1) \stackrel{!}{=} 0$$

$u_1 = 0 \Rightarrow u_2 = 0$ oder $u_2 = 1$
$u_1 = 1 + a_1u_2 \Rightarrow u_2 = 0$ (also $u_1 = 1$) oder $u_2 = \frac{1-a_2}{a+a_1a_2}$ (d.h $u_1 = \frac{1+a_1}{1+a_1a_2}$).
Wir erhalten vier Gleichgewichtspunkte:

$$G_1(0,0), \quad G_2(0,1), \quad G_3(1,0), \quad G_4\left(\frac{1+a_1}{1+a_1a_2}, \frac{1-a_2}{1+a_1a_2}\right)$$

Stabilität: Wir bestimmen die Funktionalmatrix

$$A(u_1,u_2) = \begin{bmatrix} 1-2u_1+a_1u_2 & a_1u_1 \\ -a_2u_2 & 1-2u_2-a_2u_1 \end{bmatrix}$$

und setzen die Gleichgewichtspunkte ein:

$$A(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ d.h. } G_1 \text{ ist instabil,}$$

$$A(0,1) = \begin{bmatrix} 1+a_1 & 0 \\ -a_2 & -1 \end{bmatrix}, \text{ d.h. } G_2 \text{ ist instabil,}$$

$$A(1,0) = \begin{bmatrix} -1 & a_1 \\ 0 & 1-a_2 \end{bmatrix}, \text{ d.h. } G_3 \text{ ist } \begin{cases} \text{instabil}, & \text{wenn } 0 < a_2 < 1, \\ \text{stabil}, & \text{wenn } a_2 > 1, \end{cases}$$

$$A\left(\frac{1+a_1}{1+a_1a_2}, \frac{1-a_2}{1+a_1a_2}\right) = \frac{1}{1+a_1a_2}\begin{bmatrix} -1-a_1 & a_1(1+a_1) \\ -a_2(1-a_2) & -1+a_2 \end{bmatrix}.$$

Die Determinante der letzten Matrix ist (wir lassen den positiven Faktor $\frac{1}{1+a_1a_2}$ außer Acht)

$$(-1-a_1)(-1+a_2) + a_1a_2(1+a_1)(1-a_2) = (1+a_1a_2)(1+a_1)(1-a_2) \begin{cases} > 0 & , 0 < a_2 < 1, \\ < 0 & , a_2 > 1. \end{cases}$$

Damit ist $G_4$ instabil für $a_2 > 1$ (die Determinante ist Produkt der Eigenwerte, aus $\det A < 0$ folgt also, dass ein Eigenwert positiv und der andere negativist).
Ist $0 < a_2 < 1$, so besitzt $A\left(\frac{1+a_1}{1+a_1a_2}, \frac{1-a_2}{1+a_1a_2}\right)$ entweder zwei reelle Eigenwerte mit gleichem Vorzeichen oder ein Paar konjugiert-komplexer Eigenwerte. Die Summe der Eigenwerte ist $\frac{1}{a+a_1a_2}(-2-a_1+a_2) < 0$. Also ist entweder der Realteil der konjugiert-komplexen Eigenwerte negativ, oder beide reellen Eigenwerte sind negativ.
Damit ergibt sich: Für $0 < a_2 < 1$ ist $\left(\frac{1+a_1}{1+a_1a_2}, \frac{1-a_2}{1+a_1a_2}\right)$ der einzige stabile Gleichgewichtspunkt.
Für $a_2 > 1$ ist $(1, 0)$ der einzige stabile Gleichgewichtspunkt.
Wegen

$$\frac{d}{da_2}\left(\frac{1+3a_2}{1+3a_2^2}\right) = \frac{-9}{(1+3a_2^2)^2}(a_2^2 + \frac{2}{3}a_2 - \frac{1}{3}) \overset{!}{=} 0$$

folgt $a_2 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ oder $a_2 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -1$ (unsinnig).
Offenbar liegt an der Stelle $a_2 = \frac{1}{3}$ ein Maximum von $\frac{1+a_1}{1+a_1a_2} = \frac{1+3a_2}{1+3a_2^2}$ vor (nämlich $\frac{3}{2}$).

**Problem 14.** Im Jahre 1926 präsentierte Volterra folgendes Modell des Kampfes zweier Spezies um denselben begrenzten Futtervorrat:

$$\frac{dN_1}{dt} = [b_1 - \lambda_1(h_1N_1 + h_2N_2)]N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = [b_2 - \lambda_2(h_1N_1 + h_2N_2)]N_2.$$

Es sei $b_1/\lambda_1 > b_2/\lambda_2$. (Der Koeffizient $b_i/\lambda_i$ wird die Anfälligkeit der Spezies $i$ für Futtermangel genannt.) Man beweise, daß Spezies 2 schließlich ausgelöscht wird, wenn $N_1(t_0) > 0$ ist.

**Problem 15.** Es sei $K_1/\alpha > K_2$ und $K_2/\beta > K_1$. Man beweise, dass alle Lösungen $N_1(t)$, $N_2(t)$ von

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{a_1N_1}{K_1}(K_1 - N_1 - \alpha N_2), \quad \frac{dN_2}{dt} = \frac{a_2N_2}{K_2}(K_2 - N_2 - \beta N_1)$$

mit positivem $N_1(t_0)$ und positivem $N_2(t_0)$ schliesslich gegen die Gleichgewichtslösung

$$N_1 = N_1^* = \frac{K_1 - \alpha K_2}{1 - \alpha\beta}, \quad N_2 = N_2^* = \frac{K_2 - \beta K_1}{1 - \alpha\beta}$$

streben.

**Problem 16.** Für Sardinen und ähnliche Fischarten scheint es schwierig zu sein, sich bei kleiner Population zu vermehren, ihre Fortpflanzungschancen werden aber mit steigender Dichte immer besser, bis hin zu einem Niveau, auf dem Überbevölkerung wieder einen hemmenden Effekt auf die Fortpflanzung ausübt. Das kommt daher, dass sie in Schwärmen schwimmen, die groß und dicht gepackt sind, da dies mehr Schutz gegen Angreifer bietet. Anders als andere Arten, die einer logistischen Fortpflanzungsrate $r(1-x/K)$ folgen, die linear mit wachsender Dichte $x$ sinkt, kann die Fortpflanzungsrate der Sardinen wohl besser durch einen Term beschrieben werden, der niedrig anfängt, dann für eine Zeit mit $x$ wächst, um schließlich wieder abzusinken. Das würde eine anfangs geringe Wachstumsrate widerspiegeln, die dann mit der Populationsdichte $x$ anwächst und wieder absinkt, wenn $x$ groß ist. Ein einfaches Beispiel dafür ist die Funktion $rx(1-x/K)$.
Betrachten wir nun ein Fanggebiet mit uneingeschränktem Zugang. Jede Zahl von Fischern mit

ihren Booten und Netzen und — in neuerer Zeit — elektronischen Schwarmdetektoren darf die Fische fangen. Sei $E$ der Gesamteinsatz in die Fischerei, also Fangschiffe und Fischgeschirr wie auch Arbeitskraft, die pro Zeiteinheit eingesetzt wird, und sei $\nu$ der Fang in Tonnen, der pro Einsatzeinheit gefangen wird. Dann ist $\nu Ex$ der Gesamtfang pro Zeiteinheit, wobei $x$ die Dichte der Fische in Tonnen in einem festen Gebiet ist. Ein Anstieg von $E$ bedeutet, dass der Aufwand im Fischfang vergrößert worden ist. Berücksichtigen wir die Reproduktionsrate der Schwarmfische, dann ist die Änderungsrate von $x$ gegeben durch

$$x' = rx^2\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \nu Ex, \tag{$*$}$$

wobei der zweite Term auf der rechten Seite den Verlust aufgrund des Fischfangs bezeichnet.
Nun führen wir einige drastisch vereinfachte Marktgesetze ein. Angenommen, die Kosten in Euro pro Einsatzeinheit sind $c$ und $p$ ist der Preis in Euro pro Fangeinheit, den wir im Hafen damit erzielen. Die Kosten beinhalten Arbeitskosten wie auch die Ammortisation des Kapitals, während $p$ den Marktwert der Fische reflektiert. Die Nettoeinnahmen aus dem Fang sind proportional zu $p\nu Ex - cE$. Solange diese Größe positiv ist, wächst der Fangaufwand. Das übernehmen wir aus der Idee, dass die Ausbeutung einer natürlichen Ressource so lange ansteigt, bis sie keinen Gewinn mehr abwirft, vorausgesetzt, sie ist frei zugänglich. Im Fall der Fischerei wächst der Fang immer mehr an, bis der Nettoerlös gleich Null ist oder der Vorrat an Fischen erschöpft ist. Ein Fischer, der nicht am Fischzug teilnimmt, verzichtet auf seinen Anteil des Fangs zugunsten seiner Konkurrenten.
Natürlich ist dies eine grobe Vereinfachung, da keine Fischwirtschaft total unreguliert ist und da die regulierenden Behörden immer mehr eine schützende Haltung einnehmen, wenn die Fischbestände zu sinken beginnen. Darüber hinaus muss der Aufwand bei sinkenden Fischbeständen im Rahmen eines schärfer werdenden Wettbewerbs immer mehr gesteigert werden, was diejenigen Fischer abwandern lässt, die noch eine andere Arbeitsmöglichkeit haben. Dennoch nehmen wir einmal diesen fiktiven Standpunkt ein und schrieben eine Gleichung für die Änderungsrate des Fischereiaufwands auf:

$$E' = \alpha E(p\nu x - c). \tag{1}$$

Sie sagt aus, dass $E$ mit einer Rate wächst oder sinkt, die proportional zum Nettoertrag ist. Ist der Nettogewinn positiv, so steigt sie, andernfalls wird sie kleiner. Die Proportionalitätskonstante $\alpha$ ist immer klein, um die Tatsache auszudrücken, dass die Fischereiindustrie immer nur mit einer gewissen Trägheit auf einen Wechsel sowohl der Marktbedingungen als auch der Verfügbarkeit des Fischs auf dem Ozean reagiert. Es dauert einige Zeit, Arbeitskräfte anzuwerben oder zu entlassen, einen Trawler bauen zu lassen oder zusätzliche Schiffe zur See zu schicken. Diese Wechsel gehen langsamer vonstatten als die Brut der Fische. Deshalb betrachtet man $E$ als *langsam variierende Variable* im Vergleich zu $x$, die als *schnell veränderlich* angesehen wird.
An dieser Stelle müssen wir die Gleichung ($*$) modifizieren, indem wir eine kleine Konstante $e$ ergänzen:

$$x' = e + rx^2\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \nu Ex. \tag{2}$$

Die Interpretation davon ist, dass auch wenn die beobachtbare Populationsdichte praktisch gleich Null ist, noch einige Fische schlüpfen, weil einige Mitglieder der Spezies einen Zufluchtsort gefunden haben, oder weil zusätzliche Fische mit konstanter Rate in das Fanggebiet einwandern. Wir berücksichtigen hier einen Schwelleneffekt, weil er eine Erholung des Bestandes möglich macht. Er beinhaltet auch die Idee, dass weiter Fanganstrengungen nachlassen, wenn die Fischgründe

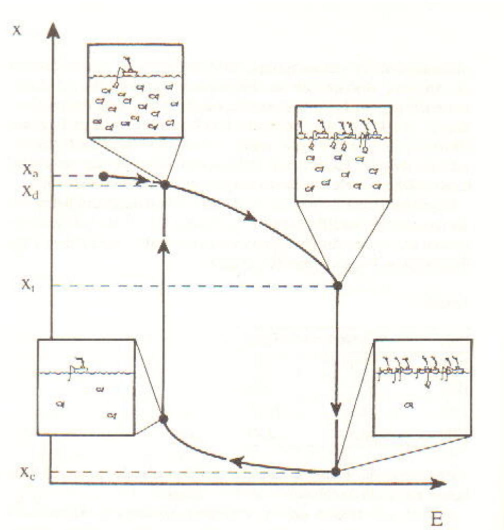
genügend reduziert sind, entweder weil sie den Aufwand nicht mehr rechtfertigen oder weil die Behörden ein Fangverbot verhängt haben.
Unser Fischereimodell besteht aus den gekoppelten Gleichungen (1) und (2).

In der folgenden Tabelle ist der Aufwand, gemessen als Anzahl der pro Zeiteinheit auslaufenden Schiffe dem Fang (in Millionen Tonnen) gegenübergestellt. (Es handelt sich um reale Zahlen, die den dramatischen Zusammenbruch der peruanischen Sardellenfischerei beschreiben).

| Jahr | Aufwand | Fang |
|---|---|---|
| 1959 | 1,4 | 1,91 |
| 1964 | 5,8 | 8,86 |
| 1968 | 8,9 | 10,26 |
| 1972 | 46,5 | 1,78 |

Erklären Sie diesen Zusammenbruch mit Hilfe des Differentialgleichungssystems (1), (2).

**Hinweis:**




**Lösung.**

Wir illustrieren die folgenden Überlegungen durch ein numerisches Beispiel, für das wir

$$K = 6, e = 0,3, v = r = 1$$

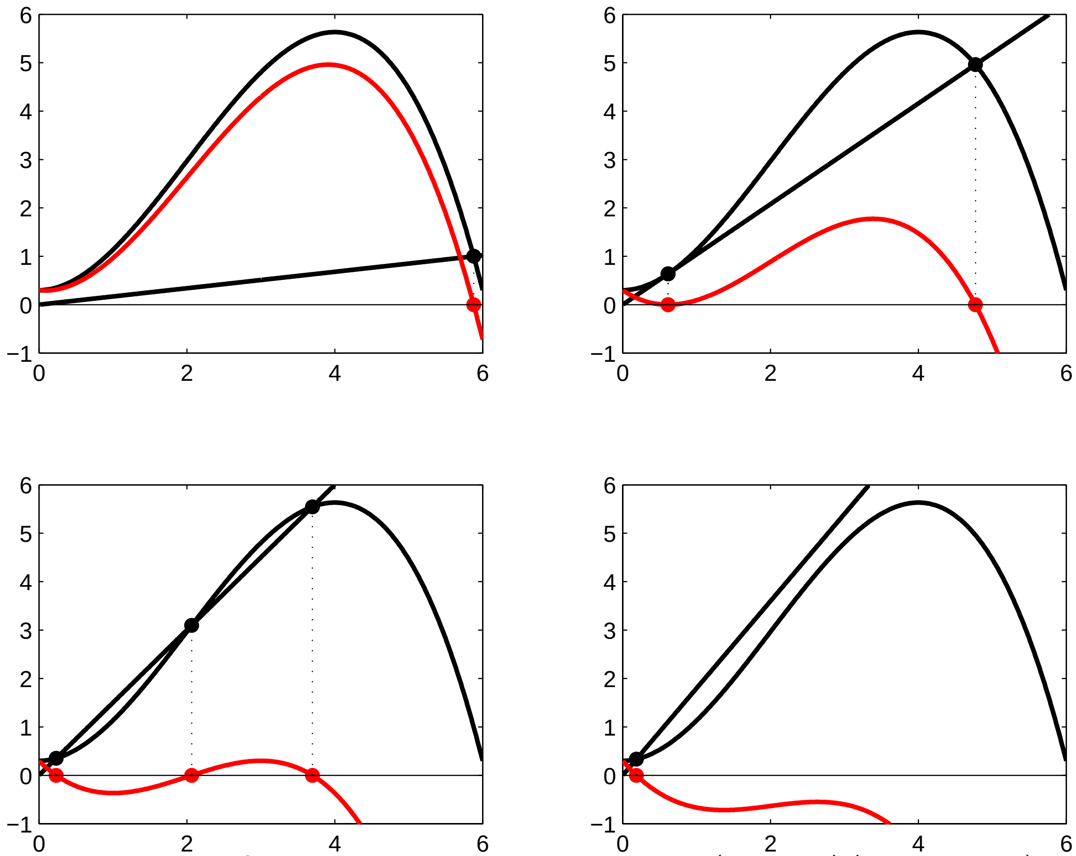
setzen.

Zunächst bestimmen wir die Gleichgewichtspunkte von (2), d.h. die Nullstellen von $f(x) = e + rx^2(1 - x/K) - vEx$, indem wir den Graph von $e + rx^2(1 - x/K)$ mit der Geraden $vEx$ (die rote Kurve in den Skizzen) schneiden: Wir erkennen, dass es zwei kritische Werte zu $E$ gibt, $0 < E_1 < E_2$, mit:

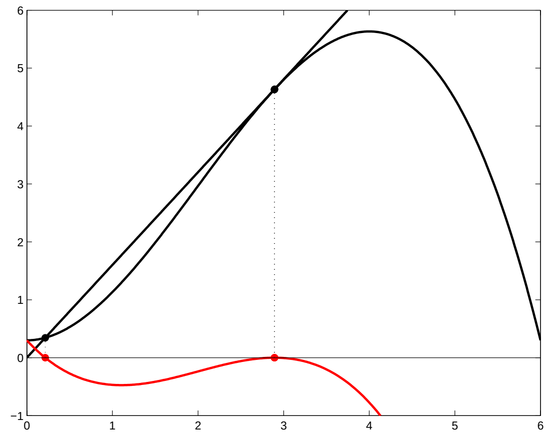
- $f$ besitzt genau einen stabilen Gleichgewichtspunkt für $E < E_1$.
- $f$ besitzt genau drei Gleichgewichtspunkte, von denen genau der mittlere stabil ist, für $E_1 < E < E_2$.

- $f$ besitzt genau einen stabilen Gleichgewichtspunkt für $E > E_2$.

Die Abbildungen zeigen die Situation für $E < E_1$ (links oben), $E = E_1$ (rechts oben), $E_1 < E < E_2$ (links unten) und $E > E_2$ (rechts unten).




Wir beginnen unsere Simulation mit einem kleinen Wert von $E$ ($E = 0,17$) (Bild links oben) mit einem Wert $x$ nahe bei $K$. Wir gehen davon aus, dass bei diesem hohen Wert von $x$ $pvx - c > 0$ ist, so dass der Fangaufwand $E$ wächst (Bild rechts oben). Bei weiter steigendem $E$ bilden zwei weitere Gleichgewichtswerte, was praktisch irrelevant ist, weil der mittlere der drei Gleichgewichtspunkte instabil ist, die Fischpopulation also dem größten der Gleichgewichtswerte folgt. Kritisch wird die Situation bei $E = E_2$ (Abbildung unten), wenn die beiden größten Gleichgewichtswerte zusammenfallen (und dann ins Komplexe „verschwinden"). Der Fischbestand ist gezwungen sich dem verbleibenden Gleichgewichtspunkt anzupassen und sich dadurch drastisch zu reduzieren.



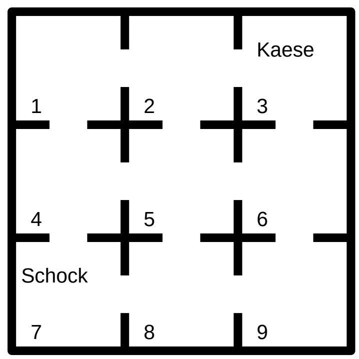

**Problem 17** Ein einfaches Modell für eine Lebensgemeinschaft im Meer besteht aus einer mikroskopischen Algenart, die von einer großen pflanzenfressenden Planktonart abgeweidet wird. Sei $x$ die Algendichte, die nach einem logistischem Wachstumsgesetz anwachse. Das Abweiden durch das Plankton verringert das Gesamtwachstum mit unbedeutender Rate, wenn $x$ klein ist, und obwohl der Effekt mit wachsendem $x$ immer bedeutender wird, wird die Abweiderate proportional zu einem Term, der einen endlichen Sättigungswert besitzt. Die Interpretation dafür ist, dass sich die Jäger von anderen marinen Pflanzen ernähren, solange die Algen noch selten sind, dass sie sich immer mehr auf diese Art spezialisieren, aber ihr Appetit irgendwann gestillt ist und die Algen mit konstanter, von $x$ unabhängiger Rate abgeweidet werden. Ein Beispiel für solch einen Term ist $bx/(1+x^2)$. Beide Terme zusammen ergeben die Modellgleichung

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{bx^2}{1+x^2}.$$

Der Parameter $r$ darf dabei schwach variieren; dies beschreibt die langsamen Veränderungen der Umweltfaktoren, die die Wachstumsrate der Algen beeinflussen, wie unterschiedliche Wassertemperaturen im Sommer und Winter. Zeige, dass in Abhängigkeit von $r$ ein oder drei Gleichgewichtszustände existieren, und setze voraus, dass Wachstum von $x$ schnell ist im Vergleich zur Änderung der Umwelteinflüsse. Das bedeutet, dass sich die Algen schnell an kleine Klimaänderungen anpassen. Diskutiere nun die Möglichkeiten einer dramatischen Änderung der Algendichte $x$, wenn verschiedene Schwellwerte erreicht werden. Eine plötzliche Spitze in der Population ist als Algenblüte bekannt. Das Modell zeigt, dass ein schneller Sprung in Richtung auf eine Blüte hin von einem plötzlichen Zusammenbruch der Population abgelöst werden kann, wenn die Umweltbedingungen ungünstig werden, aber der Zusammenbruch folgt einem anderen Pfad als die Blüte. Dies ist wie in Problem 16 ein Hysterese-Effekt.

# 2 Markoff-Ketten

**Problem 18.** Ein vereinfachtes Lernmodell in der Verhaltensforschung besteht darin, eine Ratte in eine der Kammern des unten gezeichneten Labyrinths zu setzen. Wenn die Ratte Kammer 3 erreicht, wird sie mit einem Stück Käse belohnt, aber in Kammer 7 bekommt sie einen unangenehmen Elektroschock. Das Experiment verläuft nun wie folgt: Die Ratte wird in Kammer 1 gesetzt und so lange beobachtet, bis sie in eine der Kammern 3 oder 7 kommt. Dies wird einige Male wiederholt. Nehmen wir zunächst an, dass die Ratte nicht aus ihren Erfahrungen lernt, d.h. dass sie in jeder Kammer zufällig eine der Öffnungen auswählt, um ihre Irrfahrt fortzusetzen.




- Formulieren Sie diesen Prozess als Markoff-Kette (Hinweis: mit neun Zuständen, von denen genau zwei absorbierend sind) und berechnen Sie die zugehörige Übergangsmatrix.
- Wieviele Kammern durchwandert die Ratte durchschnittlich, bis sie in eine der beiden Kammern 3 bzw. 7 gelangt?
- Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass die Ratte schließlich Kammer 3 bzw. Kammer 7 erreicht?
- Ändern sich die Werte aus b) und c), wenn die Ratte ihre Reise in Kammer 2 (statt in Kammer 1) beginnt?
- Kann man behaupten, dass die Ratte gelernt hat, das Labyrinth vorteilhaft zu durchqueren, wenn die im Experiment beobachtete Häufigkeit für eine Ankunft in der dritten Kammer 0.8 beträgt (bei Start aus Kammer 1)?

**Lösung.** Der Zustand $i$ $(1 \leq i \leq 9)$ liege vor, wenn sich die Ratte in der $i$-ten Kammer des Labyrinths befindet.
a) Die Übergangsmatrix ist durch

```
A = [0   1/2 0   1/2 0   0   0   0   0  ; ...
     1/3 0   1/3 0   1/3 0   0   0   0  ; ...
     0   0   1   0   0   0   0   0   0  ; ...
     1/3 0   0   0   1/3 0   1/3 0   0  ; ...
     0   1/4 0   1/4 0   1/4 0   1/4 0  ; ...
     0   0   1/3 0   1/3 0   0   0   1/3; ...
     0   0   0   0   0   0   1   0   0  ; ...
     0   0   0   0   1/3 0   1/3 0   1/3; ...
     0   0   0   0   0   1/2 0   1/2 0  ];
```

gegeben. Die Zustände 3 und 7 sind absorbierend, alle anderen sind transient. Mit

```
perm = [3 7 1 2 4 5 6 8 9];
A = A(perm,perm);
```

werden die Zustände so umnummeriert, daß die absorbierenden zuerst indiziert werden.
b) Die MATLAB-Sequence

```
B = A(3:9,3:9);
T = inv(eye(size(B))-B);
e = ones(size(T,1),1);
v = T*e;
```

liefert das gewünschte Ergebnis, nämlich `v(1)`=6.
c) Jetzt liefert

```
C = A(3:9,1:2);
Q = T*C;
```

das gesuchte (erste Spalte von `Q`): Die Wahrscheinlichkeiten für Absorption im Zustand 3 bzw. 7 sind beide 0.5.
d) Die gesuchten Größen sind (vgl. b) und c)) `v(2)`=5 sowie die Einträge der zweiten Spalte von `Q`: Die Wahrscheinlichkeiten für Absorption im Zustand 3 ist $2/3$, die für Absorption im Zustand 7 ist 1/3.
e) Würde die Ratte 'zufällig entscheiden', so müßte sie ca. die Hälfte ihrer Irrfahrten in der Kammer 3 beenden (vgl. c)). Ob sie wirklich etwas gelernt hat, könnte mit statistischen Tests untersucht werden.

**Problem 19.** Das folgende Experiment zur sozialen Mobilität wurde in einem Gezeitenbassin außerhalb der Meerenge von Long Island tatsächlich durchgeführt und von I. Chase (Vacancy chains, *Annual Review of Sociology* **17**, 133–154 (1991)) ausführlicher beschrieben.
Weil der Einsiedlerkrebs Pagarus longicarpus keinen harten Panzer besitzt, ist er darauf angewiesen, ein Schneckenhaus zu finden, das er als Schutz mit sich herumträgt. Im Experiment wird ein leeres Schneckenhaus ins Bassin gesetzt, um ein Kette von Leerstellen zu initiieren: Ein Krebs verlässt sein Schneckenhaus, um das attraktivere (weil größere?), das gerade ins Wasser gesetzt wurde, in Besitz zu nehmen. Ein anderer Krebs verlässt seine alte Behausung und siedelt um in das jetzt leere Haus des vorigen Besitzers. Weitere Krebse machen dasselbe, bis schließlich ein wohnungsloser Krebs ein Haus besetzt oder ein kaum bewohnbares Haus leer bleibt.

Im Modell gibt es sieben Zustände: Der erste (absorbierende) Zustand liegt vor, wenn ein Krebs, der ohne Schutz war, gerade in ein leeres Haus eingezogen ist, also kein leeres Haus mehr existiert. Wenn ein leeres Haus innerhalb von 45 Minuten nicht angenommen wird, so ist das ebenfalls ein absorbierender Zustand, der die Nummer 2 erhält. Die übrigen fünf Zustände bezeichnen leere Häuser in verschiedenen Größenordnungen. Die größte Kategorie besteht aus Häusern über 2 g (Zustand 3), die nächste Klasse liegt zwischen 1.2 und 2 g (Zustand 4), und so weiter, bis zur Klasse der kleinsten Häuser zwischen 0.3 und 0.7 g (Klasse 7).

Die folgende Tabelle zeigt die Ergebnisse von 284 Bewegungen:

| von / nach | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 1 | 2 | 7 | 9 | 2 | 0 |
| 4 | 0 | 2 | 0 | 3 | 19 | 17 | 1 |
| 5 | 4 | 23 | 0 | 2 | 20 | 11 | 10 |
| 6 | 6 | 24 | 0 | 0 | 10 | 26 | 26 |
| 7 | 2 | 30 | 0 | 0 | 0 | 5 | 22 |

- Berechnen Sie aus diesen Daten eine empirische Übergangsmatrix.
- Bestimmen Sie daraus die durchschnittlichen Kettenlängen $\ell_3, \ell_4, \ldots, \ell_7$ und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Werten aus der folgenden Tabelle:

| Ausgangszustand | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| beobachtete Kettenlänge | 3.556 | 3.323 | 2.667 | 2.567 |

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $q_{i,j}$ $(3 \le i \le 7, 1 \le j \le 2)$ dafür, dass eine Leerstellenkette im Zustand 1 bzw. 2 endet, unter der Voraussetzung, dass sie im Zustand $i \in \{3, 4, \ldots, 7\}$ begann.
- Es sei
$$m_i = q_{i,1} + \ell_i - 1 \qquad (i = 3, 4, \ldots, 7).$$
Begründen Sie, warum $m_i$ ein geeignetes Maß für die Mobilität der Krebse in einer Kette ist, die im Zustand $i$ beginnt. Bestimmen Sie die Größen $m_i$ und vergleichen Sie sie mit den beobachteten Werten

| Ausgangszustand | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| durchschnittliche Anzahl an Ortswechseln der Krebse | 2.61 | 2.52 | 1.75 | 1.81 |

**Lösung.**

a) Aus den Beobachtungen

```
E = [ 0  1  2  7  9  2  0; ...
      0  2  0  3 19 17  1; ...
      4 23  0  2 20 11 10; ...
      6 24  0  0 10 26 26; ...
      2 30  0  0  0  5 22];
```

ergibt sich die zugehörige Übergangsmatrix durch

```
A = [ [eye(2) zeros(2,5)];   ...
      inv(diag(sum(E.')))*E];
```

Ergebnis (auf vier Stellen gerundet):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0476 & 0.0952 & 0.3333 & 0.4286 & 0.0952 & 0 \\ 0 & 0.0476 & 0 & 0.0714 & 0.4524 & 0.4048 & 0.0238 \\ 0.0571 & 0.3286 & 0 & 0.0286 & 0.2857 & 0.1571 & 0.1429 \\ 0.0652 & 0.2609 & 0 & 0 & 0.1087 & 0.2826 & 0.2826 \\ 0.0339 & 0.5085 & 0 & 0 & 0 & 0.0847 & 0.3729 \end{bmatrix}.$$

b) Die durchschnittlichen Kettenlängen bestimmt man mit

```
B = A(3:7,3:7);
T = inv(eye(size(B))-B);
e = ones(size(T,1),1);
l = T*e;
```

Ergebnis (auf vier Stellen gerundet):

| Ausgangszustand | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| beobachtete Kettenlänge | 3.556 | 3.323 | 2.667 | 2.567 | — |
| berechnete Kettenlänge | 3.815 | 3.440 | 2.482 | 2.533 | 1.937 |

c) Die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass eine Leerstellenkette im Zustand 1 bzw. 2 endet, unter der Voraussetzung, dass sie im Zustand $i \in \{3, 4, \ldots, 7\}$ begann, ergeben sich mit

```
C = A(3:7,1:2);
Q = T*C;
```

Ergebnis (auf vier Stellen gerundet):

| Ausgangszustand | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| W. für Ende im Zustand 1 | 0.1228 | 0.1261 | 0.1303 | 0.1394 | 0.0729 |
| W. für Ende im Zustand 2 | 0.8772 | 0.8739 | 0.8697 | 0.8606 | 0.9271 |

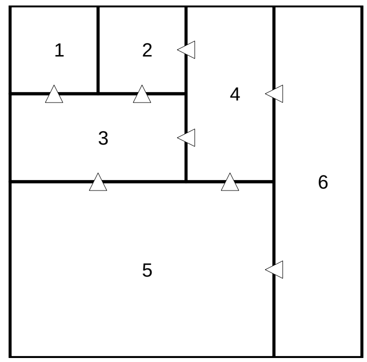
d) Beginnt eine Leerstellenkette im Zustand $i$, dann endet sie entweder im Zustand 1 (was mit Wahrscheinlichkeit $q_{i,1}$ geschieht) oder im Zustand 2 (mit Wahrscheinlichkeit $q_{i,2}$). $Q = TC$ bezeichnet hier die Matrix aus c). Im ersten Fall ist die mittlere Anzahl von Krebsbewegungen $\ell_i$ im zweiten Fall $\ell_i - 1$. Wegen $q_{i,1} + q_{i,2} = 1$ ist der Erwartungswert der Anzahl von Krebsbewegungen (bei Start aus Zustand $i$)

$$q_{i,1}\ell_i + q_{i,2}(\ell_i - 1) = \ell_i - q_{i,2} = q_{i,1} + \ell_i - 1 = m_i.$$

Eine Rechnung liefert (Ergebnisse auf drei Stellen gerundet):

| Ausgangszustand | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| beobachtete mittlere Anzahl an Ortswechseln der Krebse | 2.61 | 2.52 | 1.75 | 1.81 | — |
| berechnete mittlere Anzahl an Ortswechseln der Krebse | 2.94 | 2.57 | 1.61 | 1.87 | 1.01 |

**Problem 20.** Gegeben sei ein Labyrinth aus $n$ Zellen ($n \geq 3$). Die Zellen 1 und 2 können nicht verlassen werden. Aus Zelle $j$ ($j \geq 3$) führen Türen in die Zellen $j-1$ und $j-2$, welche aber nur in Pfeilrichtung passierbar sind (vgl. die Skizze für $n = 6$).




Falls eine Versuchsperson sich in Zelle $j$ befindet, bleibt sie entweder in dieser Zelle (mit Wahrscheinlichkeit $1/3$) oder sie geht in die Zellen $j-1$ bzw. $j-2$ (jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/3$).

- Modellieren Sie dieses Problem als Markoff-Kette und bestimmen Sie die zugehörige Übergangsmatrix $A$.
- Zeigen Sie, dass $\lim_{m\to\infty} A^m$ existiert und bestimmen Sie den Grenzwert.
- Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten $q_{m,i}$ für Absorption in Zelle $i$ ($i = 1, 2$), wenn man in Zelle $m$ startet? Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{m\to\infty} q_{m,i}$ für $i = 1, 2$.

**Lösung.**

a) Die Übergangsmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat die Struktur

$$A = \begin{bmatrix} I_2 & O \\ C & B \end{bmatrix}$$

mit

$$C = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-2)\times 2} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1/3 & & & & \\ 1/3 & 1/3 & & & \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$$

($B$ ist eine untere Dreiecksmatrix).

b) Wegen $\rho(B) = 1/3 < 1$ existiert

$$\lim_{m\to\infty} A^m = \begin{bmatrix} I_2 & O \\ (I-B)^{-1}C & O \end{bmatrix}.$$

Sei $M = [\mu_{i,j}] := (I-B)^{-1}$ ($M$ ist eine untere Dreiecksmatrix). Wegen

$$MC = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,1} \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,1} + \mu_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ \mu_{n-2,1} & \mu_{n-2,1} + \mu_{n-2,2} \end{bmatrix}$$

und weil alle Zeilensummen von $MC$ gleich $1$ sind, genügt es, die erste Spalte von $M$ zu bestimmen. Dazu lösen wir das lineare Gleichungssysteme

$$(I-B)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1$$

mit dem ersten Einheitsvektor $\boldsymbol{u}_1$ aus $\mathbb{R}^{n-2}$ als rechter Seite durch Vorwärtssubstitution. Es ergibt sich

$$x_1 = 3/2,\ \ x_2 = 3/4,\ \ x_j = (x_{j-2} + x_{j-1})/2\ \ (j = 3, 4, \ldots, n-2).$$

Die Folge $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ genügt der homogenen Differenzengleichung zweiter Ordnung $x_j - \frac{1}{2}x_{j-1} - \frac{1}{2}x_{j-2} = 0$ mit dem charakteristischen Polynom $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, das die Nullstellen $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = 1$ besitzt. Damit ergibt sich (nach Anpassung der Anfangswerte),

$$x_j^{(1)} = 1 - \left[-\tfrac{1}{2}\right]^j, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

und

$$(I-B)^{-1}C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 - \left[-\frac{1}{2}\right]^1 & 2 + \left[-\frac{1}{2}\right]^1 \\ 1 - \left[-\frac{1}{2}\right]^2 & 2 + \left[-\frac{1}{2}\right]^2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 - \left[-\frac{1}{2}\right]^{n-2} & 2 + \left[-\frac{1}{2}\right]^{n-2} \end{bmatrix}.$$

c) Nach b) ist

$$q_{m,1} = \tfrac{1}{3}\left(1 - \left[-\tfrac{1}{2}\right]^{m+2}\right) \text{ mit } \lim_{m\to\infty} q_{m,1} = \tfrac{1}{3},$$
$$q_{m,2} = \tfrac{1}{3}\left(2 + \left[-\tfrac{1}{2}\right]^{m+2}\right) \text{ mit } \lim_{m\to\infty} q_{m,2} = \tfrac{2}{3}.$$

**Problem 21.** Auf zwei Urnen $U_1$ und $U_2$ seien $n$ schwarze und $n$ weiße Kugeln verteilt ($n > 1$), und zwar genau $n$ Kugeln in jeder Urne. Das System befindet sich im Zustand $i$, $0 \le i \le n$, wenn $U_1$ genau $i$ weiße Kugeln enthält. Der Elementarprozess sei die blinde Ziehung je einer Kugel aus $U_1$ und $U_2$ und deren Vertauschung. Dabei nehmen wir an, dass jede Kugel mit derselben Wahrscheinlichkeit $1/n$ gezogen wird.

- Beweisen Sie, dass die Übergangsmatrix $A = [a_{i,j}]_{0\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ tridiagonal ist mit

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \tfrac{2(n-i)i}{n^2}, \\ a_{i,i-1} &= \tfrac{i^2}{n^2}, \\ a_{i,i+1} &= \tfrac{(n-i)^2}{n^2}. \end{aligned}$$

- Zeigen Sie, dass $A$ irreduzibel und primitiv ist.
- Beweisen Sie, dass die (eindeutig) bestimmte stationäre Verteilung $\boldsymbol{\pi} = [\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n]$ durch

$$\pi_i = \binom{n}{i}^2 \Big/ \binom{2n}{n} \qquad (0 \le i \le n)$$

gegeben ist.

**Lösung.**

a) Es gibt $n+1$ Zustände: In $U_1$ können sich $0, 1, 2, \ldots, n$ weiße Kugeln befinden. Folgende Übergänge sind möglich:

- $i \to i$: Eine weiße Kugel auf $U_1$ und eine weiße Kugel aus $U_2$ werden gezogen ($W = \frac{i}{n} \cdot \frac{n-i}{n}$). Oder: Eine schwarze Kugel aus $U_1$ und eine schwarze Kugel aus $U_2$ werden gezogen ($W = \frac{n-i}{n} \cdot \frac{i}{n}$). Insgesamt $a_{ii} = 2\frac{(n-i)i}{n^2}$.
- $i \to i-1$: Aus $U_1$ wird eine weiße und aus $U_2$ eine schwarze Kugel gezogen: $a_{i,n} = \frac{i}{n} \cdot \frac{i}{n}$.
- $i \to i+1$: Aus $U_1$ wird eine schwarze und aus $U_2$ eine weiße Kugel gezogen: $a_{n-i,n} = \frac{n-i}{n} \cdot \frac{i}{n}$.

b) Der Graph der Übergangsmatrix ist eine Kette und offenbar vollständig zusammenhängend, also ist $A$ irreduzibel. Weil es positive Diagonalelemente $a_{ii}$ gibt, ist $A$ primitiv.

c) Aus b) folgt, dass es genau eine stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt, die sich durch

$$y = y_0 \left[1, \frac{1}{a_{1,0}}, \frac{a_{1,2}}{a_{1,0}a_{2,1}}, \ldots, \frac{a_{1,2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,n}}{a_{1,0}a_{2,1} \cdot \ldots \cdot a_{n,n-1}}\right]$$

darstellen lässt (vergleiche Satz aus der Vorlesung).

Es ist

$$1 = \binom{n}{0}^2, \quad \frac{1}{a_{1,0}} = n \cdot n = \binom{n}{1}^2$$

$$\begin{aligned}
y_j = y_{j-1} \cdot \frac{a_{j-1,j}}{a_{j,j-1}} &= y_0 \binom{n}{j-1}^2 \cdot \frac{(n-j+1)^2}{n^2} \cdot \frac{n^2}{j^2} \\
&= y_0 \left[\frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!}\right]^2 \cdot \frac{(n-j+1)^2}{j^2} = y_0 \left[\frac{n!}{j!(n-j+1)!}\right]^2 \cdot \frac{(n-j+1)^2}{j^2} \\
&= y_0 \binom{n}{j}^2
\end{aligned}$$

(per Induktionsannahme).

**Problem 22.** Ein Gefäß sei durch eine Membran in zwei Abteilungen $T_1$ und $T_2$ zerlegt. Im Gefäß sind insgesamt $n$ Moleküle. Der Zustand $i$ liegt vor, wenn genau $i$ Moleküle in $T_1$ sind. Im Elementarprozess wechselt genau ein Molekül die Abteilung, jedes mit derselben Wahrscheinlichkeit (Ehrenfest Diffusion).

- Bestimmen Sie die Übergangsmatrix $A$.
- Zeigen Sie, dass diese Markoff-Kette irreduzibel und zyklisch vom Index 2 ist.
- Beweisen Sie, dass

$$\boldsymbol{\pi} = 2^{-n} \left[\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}\right]$$

die einzige stationäre Verteilung ist.

**Lösung.**

Es gibt $n+1$ Zustände.. In $T_1$ können sich $0,1,2,\ldots,n$ Moleküle befinden. Es sind genau zwei Übergänge möglich, wenn sich $i$ Moleküle in $T_1$ befinden:

- $a_{i,i-1}$: Ein Molekül wechselt von $T_1$ nach $T_2$, $W=\frac{i}{n}$
- $a_{i,i+1}$: Ein Molekül wechselt von $T_2$ nach $T_1$, $W=\frac{n-i}{n}$

Also:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{n-1}{n} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{n} \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Der Graph von $A$ ist vollständig zusammenhängend weil jeder Zustand $i$ mit seinen Nachbarn $(i-1)$ und $(i+1)$ kommuniziert. Die Kette ist zwei-zyklisch, weil die Länge der Wege die etwa vom Zustand $0$ in den Zustand $0$ führen, die Längen $\{2,4,6,\ldots\}$ mit größtem gemeinsamen Teiler $2$ besitzen.

c) Nach b) gibt es genau eine stationäre Verteilung. Nach einem Satz der Vorlesung lässt sich die stationäre Verteilung in der Form

$$\begin{aligned} y &= y_0\left[1, 1\cdot n, n\frac{n-1}{n}\frac{n}{2},\ldots,1\frac{n-1}{n}\frac{n}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}\cdot 1\right] \\ &= y_0\left[1,\binom{n}{1},\binom{n}{2},\ldots,\binom{n}{n}\right] \end{aligned}$$

schreiben.

$$\begin{aligned} y_j &= y_{j-1}\frac{n-j+1}{n}\frac{n}{j} = y_0\binom{n}{j-1}\frac{n-j+1}{j} \\ &= y_0\frac{n!}{(j-1)!(n-1+1)!}\frac{n-j+1}{j} = y_0\frac{n!}{j!(n-j)!} = y_0\binom{n}{j} \end{aligned}$$

Jetzt ist $y_0$ so zu bestimmen, dass $\sum_{j=0}^{n} y_j = 1$ gilt. Wegen

$$y_0\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = y_0\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}1^j 1^{n-j} = y_0(1+1)^n = y_0 2^n$$

folgt $y_0 = 2^{-n}$.

**Problem 23.** Eine Fabrik verfügt über zwei Maschinen des gleichen Typs. Jede falle mit Wahrscheinlichkeit $p$ $(0<p<1)$ im Laufe einer Woche aus. Die Werkstatt kann nur an einer Maschine arbeiten, sie benötigt zwei Wochen für die Reparatur. Wir beschreiben die Zustände durch Angabe des Paares $(k,\ell)$, wobei $k$ die Anzahl der bei Wochenbeginn aktiven Maschinen ist $(0\le k\le 2)$ und $\ell$ die Anzahl der bei einer in Reparatur befindlichen Maschine bereits aufgewandten Arbeitswochen $(0\le\ell\le 1)$. Stellen Sie die Übergangsmatrix $A$ auf, beweisen Sie die Existenz von $\lim_{m\to\infty} A^m$ und berechnen Sie diesen Grenzwert.

**Lösung.**

Die fünf möglichen Zustände seien wie folgt nummeriert:

| Zustand | $(0,0)$ | $(0,1)$ | $(1,0)$ | $(1,1)$ | $(2,0)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| # | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Damit ergibt sich die Übergangsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & q \\ p^2 & 0 & 2pq & 0 & q^2 \end{bmatrix} \text{ mit } q := 1-p.$$

Zeichnet man den Graph von $A$, so erkennt man sofort, dass $A$ primitiv ist. Damit existiert $\lim_{m\to\infty} A^m$ und hat die Form $\boldsymbol{e\pi}$ mit einem Wahrscheinlichkeitsvektor

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5]$$

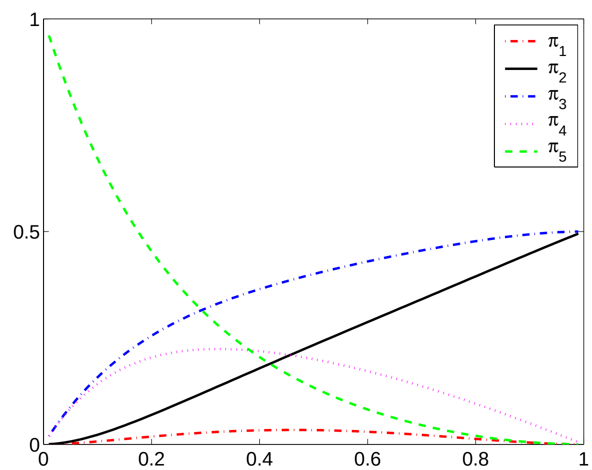
der $\boldsymbol{\pi} A = \boldsymbol{\pi}$ löst.

$$\begin{array}{lll} 1. & p^2\pi_5 = \pi_1 & \Rightarrow \pi_1 = p^2\pi_5 \\ 2. & \pi_1 + p\pi_3 = \pi_2 & \Rightarrow \pi_2 = p^2\pi_5 + p\pi_3 \\ 3. & \pi_2 + p\pi_4 + 2pq\pi_5 = \pi_3 & \\ 4. & q\pi_3 = \pi_4 & \Rightarrow \pi_4 = q\pi_3 \\ 5. & q\pi_4 + q^2\pi_5 = \pi_5 & \Rightarrow \pi_5 = \frac{q}{1-q^2}\pi_4 = \frac{q^2}{1-q^2}\pi_3 \end{array}$$

Wegen $\pi_1 = \frac{p^2q^2}{1-q^2}\pi_3$ und $\pi_2 = \frac{p(1-q^3)}{1-q^2}\pi_3$ sind jetzt alle Komponenten von $\boldsymbol{\pi}$ als Funktion von $\pi_3$ dargestellt. Aus $1 = \sum_{j=1}^{5} \pi_j$ folgt jetzt

$$\pi_3 \frac{2p^4 - 4p^3 + p^2 + 2p + 1}{2-p)} = 1.$$

Die Abbildung zeigt die Komponenten von $\boldsymbol{\pi}$ (als Funktion von $p$):



**Problem 24.** Eine Fabrik verfügt über zwei Maschinen des gleichen Typs, von denen jedoch höchstens eine läuft. Sie wird mit Wahrscheinlichkeit $p$ $(0 < p < 1)$ im Laufe einer Woche defekt. Die Werkstatt benötigt zwei Wochen für die Reparatur. Stellen Sie die Übergangsmatrix $A$ auf, beweisen Sie die Existenz von $\lim_{m\to\infty} A^m$ und berechnen Sie diesen Grenzwert.

**Lösung.**

Wir beschreiben die Zustände durch Tripel $(k, l, m)$. Dabei ist $k$ die Anzahl der bei Wochenbeginn aktiven Maschinen $(0 \le k \le 1)$, $l$ die Anzahl der intakten, aber inaktiven Maschinen $(0 \le l \le 1)$ und $m$ die Anzahl der Wochen, die zur Reparatur einer Maschine bereits aufgewandt wurden $(0 \le m \le 1)$.

| Zustände | $(0,0,1)$ | $(1,0,0)$ | $(1,0,1)$ | $(1,1,0)$ |
|---|---|---|---|---|
| Nummer | 1 | 2 | 3 | 4 |

Die Übergangsmatrix ist

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \\ 0 & p & 0 & 1-p \end{bmatrix}.$$

$G(A)$ ist vollständig zusammenhängend, $a_{3,3} \neq 0$. Also ist $A$ primitiv und $\lim_{n\to\infty} A^n = \boldsymbol{e\pi}$ existiert.

Wie in Aufgabe 23 ergibt sich

$$\pi_1 = p\pi_3, \qquad \pi_2 = \pi_3, \qquad \pi_4 = \frac{1-p}{p}\pi_3$$

und $\pi_3\left(\frac{(p+1)^2}{p} - 1\right) = 1$, d.h. $\pi_3 = \frac{p}{(p+1)^2 - p}$.

**Problem 25.** Eine Fabrik verfügt über drei Maschinen des gleichen Typs. Jede falle mit Wahrscheinlichkeit $p$ $(0 < p < 1)$ im Laufe einer Woche aus. Es stehen zwei Werkstätten zur Verfügung. Jede kann pro Woche eine Maschine reparieren. Stellen Sie die Übergangsmatrix $A$ auf, beweisen Sie die Existenz von $\lim_{m\to\infty} A^m$ und berechnen Sie diesen Grenzwert.

**Lösung.**

Zustand $k$ $(0 \le k \le 3)$ liegt vor, wenn zu Wochenbeginn $k$ Maschinen intakt sind. Die Übergangsmatrix ist

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \\ 0 & p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \\ p^3 & 3p^2(1-p) & 3p(1-p)^2 & (1-p)^3 \end{bmatrix}.$$

$G(A)$ ist vollständig zusammenhängend, $a_{4,4} \neq 0$. Also ist $A$ primitiv und $\lim_{n\to\infty} A^n = \boldsymbol{e\pi}$ existiert.

**Problem 26.** Wir untersuchen die Vererbung der Farbenblindheit bei den Pharaonen. Es gibt zwei Typen von Genen: $a$ (farbsehend) und $b$ (farbenblind). Ein Mann hat ein Gen, eine Frau jedoch zwei (Frauen vom Gentyp $ab$ sind selbst farbsehend, vererben aber die Farbenblindheit. Nur Frauen vom Gentype $bb$ sind farbenblind. Daher ist Farbenblindheit bei Frauen seltener als bei Männern). Die Zustände seine wie folgt nummeriert

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $aa \times a$ | $bb \times b$ | $aa \times b$ | $ab \times a$ | $ab \times b$ | $bb \times a$ |

(vor dem Kreuz stehen die Gene der Mutter, dahinter das des Vaters). Ein Sohn erhält nur eines der Gene der Mutter (jedes mit Wahrscheinlichkeit $1/2$), eine Tochter außerdem noch das Gen des Vaters.

- Bestimmen Sie die Übergangsmatrix $A$.
- Berechnen Sie $\lim_{m\to\infty} A^m$ und interpretieren Sie das Ergebnis.
- Bestimmen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit dieses Prozesses.

**Lösung.**

a) Offenbar sind $aa \times a$ und $bb \times b$ absorbierende Zustände. Weiter gilt $aa \times b \to ab \times a, bb \times a \to ab \times b$. Das Paar $ab \times a$ hat die Nachkommenverteilung $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ für männliche Kinder, $\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}ab$ für weibliche Kinder. Das ergibt

$$ab \times a \to \frac{1}{4}aa \times a + \frac{1}{4}aa \times b + \frac{1}{4}ab \times b + \frac{1}{4}bb \times a.$$

Analog

$$ab \times b \to \frac{1}{4}bb \times b + \frac{1}{4}ab \times a + \frac{1}{4}ab \times a + \frac{1}{4}aa \times b.$$

$$A = \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right]$$

b) Es ist

$$\lim_{m\to\infty} A^m = \left[\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline (I-B)^{-1}C & 0 \end{array}\right]$$

(vergleiche Vorlesung). Um $(I-B)^{-1}C = X$ zu bestimmen, lösen wir $(I-B)X = C$. Für die erste Spalte $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ von $X$ ist also

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow x_1 = x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = x_4 = \frac{1}{3}.$$

Das bedeutet

$$\lim_{m\to\infty} A^m = \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

c) Der Betrag $\gamma(A)$ des größten Eigenwerts von $A$, der dem Betrag nach kleiner $1$ ist, (oder, was das gleiche ist, der Betrag $\rho(B)$ des betragsgrößten Eigenwerts von $B$) bestimmt die Konvergenzgeschwindigkeit.
Hier gilt $\gamma(A) = \rho(B) \approx 0.81$. $A^m$ strebt also gegen den Grenzwert $\lim_{m\to\infty} A^m$ wie $0.81^m$ gegen $0$ strebt.

**Problem 27.** Die Vererbung der Bluterkrankheit erfolgt nach demselben Genmechanismus wie in Problem 26. Allerdings existieren weibliche Bluter vom Gentype $bb$ nicht, wenn $b$ das kranke Gen bezeichnet. Daher hat man nur vier Zustände

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $aa \times a$ | $aa \times b$ | $ab \times a$ | $ab \times b$ |

Bestimmen Sie die Übergangsmatrix $A$ und berechnen Sie $\lim_{m\to\infty} A^m$. Wie schnell konvergiert dieser Prozess?

**Lösung.**
Wir erhalten

$$\begin{aligned} aa \times a &\to aa \times a \\ aa \times b &\to ab \times a \\ ab \times a &\to \frac{1}{4} aa \times a + \frac{1}{4} aa \times b + \frac{1}{4} ab \times a + \frac{1}{4} ab \times b \\ ab \times b &\to \frac{1}{2} ab \times a + \frac{1}{4} ab \times b \end{aligned}$$

und

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{c} & B \end{array}\right]$$

Es gilt

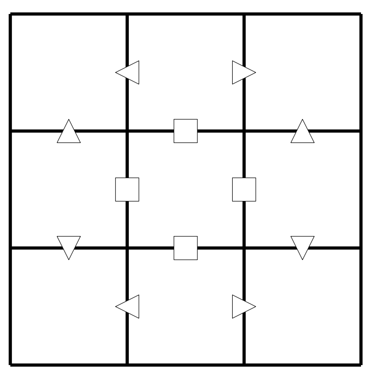
$$\lim_{m\to\infty} A^m = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline (1-B)^{-1}\boldsymbol{c} & 0 \end{array}\right]$$

und weil $(1-B)^{-1}\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ mit „Zeilensummen“ gleich $1$ ist, folgt $(1-B)^{-1}\boldsymbol{c} = [1,1,1]^T$.
Der Spektralradius von $B$, der die Konvergenzgeschwindigkeit des Prozesses bestimmt, beträgt $\approx 0.87$. Der Prozess konvergiert also wie $0.87^m$ gegen $0$.

**Problem 28.** Gegeben sind $n$ Karten: $s > 0$ schwarze und $r > 0$ rote $(s + r = n)$. Ein Spieler habe $m$ Karten auf der Hand $(2 \leq m \leq \min\{r, s\})$. Der Prozess ist im Zustand $i$, wenn der Spieler $i$ rote und $m - i$ schwarze Karten hat. Im Elementarprozess zieht der Spieler eine der $n - m$ Karten, die er nicht auf der Hand hat, und zwar jede mit derselben Wahrscheinlichkeit $1/(n - m)$. Der Spieler strebt eine möglichst hohe Zahl von schwarzen Karten an. Hat er mindestens eine rote Karte auf der Hand und zieht er eine schwarze, so gibt er eine rote Karte ab und behält die schwarze. Hat der Spieler jedoch nur schwarze Karten und zieht er eine rote, so muss er eine schwarze abgeben. In allen anderen Fällen bleibt der Zustand unverändert.

- Bestimmen Sie die Übergangsmatrix $A$.
- Zeigen Sie, dass $A$ primitiv ist.
- Beweisen Sie, dass der Spieler nach langer Spielzeit $m$ schwarze Karten mit Wahrscheinlichkeit $(s + 1 - m)/(n - m + 1)$ und $m - 1$ schwarze Karten sowie eine rote Karte mit Wahrscheinlichkeit $r/(n - m + 1)$ besitzt. Was bedeutet „nach langer Spielzeit“?

**Problem 29.** Analysieren Sie das folgende Labyrinth.



Dabei sind Übergange von einer Kammer nur in Nachbarkammern möglich und zwar in Pfeilrichtung. Wände, die mit dem Symbol $\square$ gekennzeichnet sind, können in beide Richtungen passiert werden. Bei einer nicht absorbierende Kammer ist die Wahrscheinlichkeit für den Verbleib in eben dieser Kammer konstant $p$ $(0 \leq p < 1)$, mögliche Übergänge in andere Kammern erfolgen mit gleicher Wahrscheinlichkeit.

**Lösung.**

Wir nummerieren die Kammern wie folgt:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 2 |
| 6 | 7 | 8 |
| 3 | 9 | 4 |

.

Damit ergibt sich als Übergangsmatrix (mit $q := 1 - p$)

$$A = \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ \hline \frac{q}{3} & \frac{q}{3} & 0 & 0 & p & 0 & \frac{q}{3} & 0 & 0 \\ \frac{q}{3} & 0 & \frac{q}{3} & 0 & 0 & p & \frac{q}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q}{4} & \frac{q}{4} & p & \frac{q}{4} & \frac{q}{4} \\ 0 & \frac{q}{3} & 0 & \frac{q}{3} & 0 & 0 & \frac{q}{3} & p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q}{3} & \frac{q}{3} & 0 & 0 & \frac{q}{3} & 0 & p \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_4 & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right].$$

Durch einen Koeffizientenvergleich kann man verifizieren, dass

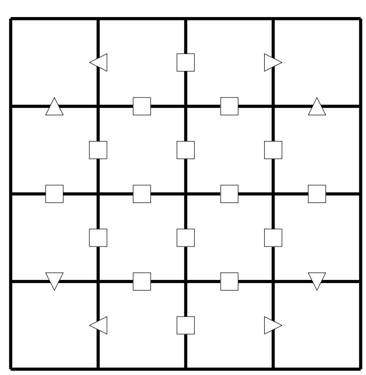
$$(I - B)^{-1} = \frac{1}{8(p-1)} \begin{bmatrix} -9 & -1 & -4 & -1 & -1 \\ -1 & -9 & -4 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & -4 & -9 & -1 \\ -1 & -1 & -4 & -1 & -9 \end{bmatrix}$$

gilt, woraus

$$(I - B)^{-1}C = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

(hängt nicht von $p$ ab!) folgt.

**Problem 30.** Analysieren Sie das folgende Labyrinth (vgl. Problem 29).



**Lösung.**

Analog zu Aufgabe 28 ergibt sich die Übergangsmatrix

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I_4 & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{16\times 16}$$

mit

$$B = \begin{bmatrix}
p & \frac{q}{3} & 0 & \frac{q}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{q}{3} & p & 0 & 0 & \frac{q}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & p & \frac{q}{3} & 0 & 0 & \frac{q}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{q}{4} & 0 & \frac{q}{4} & p & \frac{q}{4} & 0 & 0 & \frac{q}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{q}{4} & 0 & \frac{q}{4} & p & \frac{q}{4} & 0 & 0 & \frac{q}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q}{3} & p & 0 & 0 & 0 & \frac{q}{3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{q}{3} & 0 & 0 & 0 & p & \frac{q}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{q}{4} & 0 & 0 & \frac{q}{4} & p & \frac{q}{4} & 0 & \frac{q}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q}{4} & 0 & 0 & \frac{q}{4} & p & \frac{q}{4} & 0 & \frac{q}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q}{3} & 0 & 0 & \frac{q}{3} & p & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q}{3} & 0 & 0 & p & \frac{q}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q}{3} & 0 & \frac{q}{3} & p
\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12\times 12}$$

und

$$C^T = \begin{bmatrix}
\frac{q}{3} & 0 & \frac{q}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{q}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{q}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{q}{3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q}{3} & 0 & \frac{q}{3}
\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 12}.$$

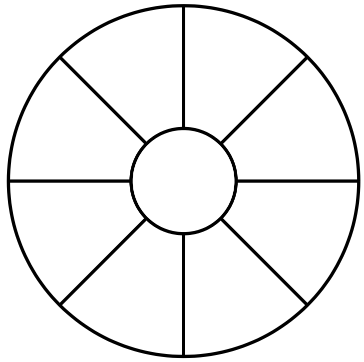
Man kann zeigen,

$$(I-B)^{-1}C = \frac{1}{15782}\begin{bmatrix}
8684 & 3883 & 2175 & 1040 \\
4108 & 8423 & 2003 & 1248 \\
8684 & 1455 & 4603 & 1040 \\
6162 & 3226 & 4522 & 1872 \\
3640 & 5604 & 3834 & 2704 \\
1690 & 8325 & 2257 & 3510 \\
4108 & 1139 & 9287 & 1248 \\
3640 & 1962 & 7476 & 2704 \\
2600 & 2442 & 6554 & 4186 \\
1430 & 3589 & 2937 & 7826 \\
1690 & 1041 & 9541 & 3510 \\
1430 & 1161 & 5365 & 7826
\end{bmatrix}.$$

Bekanntlich ist

$$\lim_{m\to\infty} A^m = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline (1-B)^{-1}C & 0 \end{array}\right].$$

**Problem 31.** Analysieren Sie das folgende Labyrinth aus $(n+1)$ Zellen (in der Abbildung ist $n=8$).



Dabei sind von jeder der $n$ äußeren Kammern im Elementarprozess nur Übergänge in die (im Gegenuhrzeigersinn) nächste äußere Kammer (mit Wahrscheinlichkeit $p>0$) sowie in die innere Kammer (mit Wahrscheinlichkeit $q>0$) möglich. Mit Wahrscheinlichkeit $r=1-p-q\geq 0$ wird jede äußere Kammer nicht verlassen. Die innere Kammer ist absorbierend.

**Lösung.**

Wir nummerieren die Kammern beginnend bei der in der Mitte. Anschließend werden die restlichen Kammern im Gegenuhrzeigersinn (wobei wir bei einer beliebigen der äußeren Kammern beginnen) nummeriert.

Damit hat die Übergangsmatrix die Form

$$A=\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \boldsymbol{c} & B \end{array}\right]$$

mit $\boldsymbol{c}=q[1,1,\ldots,1]^T\in\mathbb{R}^{n-1}$ und

$$B=rI+pS,\quad \text{wobei } S:=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

Der Grenzwert $\lim_{m\to\infty}A^m$ existiert und ist offensichtlich $\lim_{m\to\infty}A^m=ee_1^T$ (mit dem ersten Einheitsvektor $e_1$).

Um auszurechnen, wie oft eine äußere Kammer $j$ erreicht wird, wenn in einer äußeren Kammer gestartet wird, muss man $(I-B)^{-1}$ berechnen:

$$
\begin{aligned}
(I-B)^{-1} &= \Big((1-r)I - pS\Big)^{-1} = \frac{1}{1-r}(I-tS)^{-1} \text{ mit } t = \frac{p}{1-r} \\
&= \frac{1}{1-r}\sum_{j=0}^{\infty} t^j S^j = \frac{1}{1-r}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty} t^{kn+j}\right) S^j \text{ (beachte, dass } S^n = I) \\
&= \frac{1}{1-r}\sum_{j=0}^{n-1} t^j \sum_{k=0}^{\infty} (t^n)^k S^j = \frac{1}{1-r}\sum_{j=0}^{n-1} t^j \frac{1}{1-t^n} S^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j S^j \text{ mit } \alpha_j = \frac{t^j}{1-r}\frac{1}{1-t^n}.
\end{aligned}
$$

Mit anderen Worten: $(I-B)^{-1}$ ist eine zirkulante Matrix mit der ersten Zeile $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}]$. Die durchschnittliche Anzahl der Schritte bis zur Absorption ist also

$$
\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j = \frac{1}{1-r}\frac{1}{1-t^n}\sum_{j=0}^{n-1} t^j = \frac{1}{1-r}\frac{1}{1-t^n}\frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{1-r}\frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-q}.
$$

Die meisten dieser Aufgaben sind den Büchern


- Edward Beltrami. *Von Krebsen und Kriminellen: Mathematische Modelle in Biologie und Soziologie.* Vieweg, Braunschweig 1993
- Martin Braun. *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen.* Springer-Verlag, Berlin 1979
- Franz-Josef Fritz, Bertram Huppert und Wolfgang Willems. *Stochastische Matrizen.* Springer-Verlag, Berlin 1979


entnommen.