

## Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2005/06

### 4. Übungsblatt

#### Aufgabe 15:

Angenommen, Sie wollen einen Zufallsgenerator konstruieren, welcher mit gleicher Wahrscheinlichkeit Null oder Eins ausgibt, also ein „zufälliges Bit“. Zur Verfügung steht Ihnen lediglich ein anderer Zufallsgenerator BIASED-RANDOM, der mit Wahrscheinlichkeit  $p \in (0, 1)$ ,  $p \neq \frac{1}{2}$  die Eins und mit Wahrscheinlichkeit  $1 - p$  die Null ausgibt, wobei Ihnen  $p$  nicht bekannt ist.

Geben Sie einen Algorithmus UNBIASED-RANDOM an, der mit Hilfe von BIASED-RANDOM das Gewünschte leistet. Bestimmen Sie ferner die erwartete Laufzeit Ihres Algorithmus in Abhängigkeit von  $p$ .

#### Aufgabe 16:

Professor Schiftheimer schlägt folgenden Algorithmus vor zur Erzeugung gleichverteilter Permutationen eines Feldes  $A$  mit  $n$  (verschiedenen) Zahlen.

PERMUTE-BY-CYCLIC( $A$ )

```
 $n \leftarrow \text{length}[A]$   
 $\text{offset} \leftarrow \text{RANDOM}(1, n)$   
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$   
  do  $\text{dest} \leftarrow i + \text{offset}$   
    if  $\text{dest} > n$   
      then  $\text{dest} \leftarrow \text{dest} - n$   
     $B[\text{dest}] \leftarrow A[i]$   
return  $B$ 
```

Zeigen Sie, dass jedes Element von  $A$  mit Wahrscheinlichkeit  $1/n$  an eine beliebige aber feste Position zwischen 1 und  $n$  permutiert wird. Folgern Sie damit, dass Prof. Schiftheimer ein Fehler unterlaufen sein muß, da die so erzeugten Permutationen nicht gleichverteilt sind.

#### Aufgabe 17:

Zeigen Sie, dass in einem nichtleeren Binärbaum die Anzahl Knoten mit zwei Söhnen stets gleich eins weniger ist als die Anzahl Blätter.

[Hinweis: vollständige Induktion über die Höhe des Baumes.]

### **Aufgabe 18:**

- (a) Ist das Feld  $\langle 23, 17, 14, 6, 13, , 10, 1, 5, 7, 12 \rangle$  ein Max-Heap ?
- (b) Bestimmen Sie die minimale und maximale Anzahl Elemente in einem Heap der Höhe  $h$ .
- (c) Zeigen Sie: ein  $n$ -elementiger Heap besitzt die Höhe  $\lceil \log_2 n \rceil$ .
- (d) Was können Sie über die Lage des kleinsten Elementes in einem Max-Heap sagen unter der Annahme paarweise verschiedener Elemente ?
- (e) Ist ein aufsteigend sortiertes Feld ein Min-Heap?
- (f) Zeigen Sie: in einem  $n$ -elementigen Heap besitzen die Blätter die Indizes  $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \dots, n$ .

### **Aufgabe 19:**

Zeigen Sie: ein  $n$ -elementiger Heap enthält höchstens  $\lceil n/2^{h+1} \rceil$  Knoten der Höhe  $h$ .

### **Aufgabe 20:** (Programmieraufgabe)

Die Lösung der Monty-Hall-Problems soll durch eine Simulation verifiziert werden. Schreiben Sie ein Programm, welches die Lage des Preises mittels eines Zufallsgenerators auswürfelt und die Wechselstrategie verfolgt. Zählen Sie die Gewinne über eine große Zahl von Durchläufen und bestimmen Sie die mittlere Gewinnrate.