

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2003/04

Probeklausur

Aufgabe 1:

Geben Sie möglichst scharfe asymptotische obere und untere Schranken an für die durch unten stehende Rekursionen definierten Funktionen $T = T(n)$. Nehmen Sie an, $T(n)$ sei konstant für $n \leq 2$. Begründen Sie ihre Lösungen.

(a) $T(n) = 2T(n/2) + n^3$.

(b) $T(n) = T(n-1) + n$.

(c) $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$.

Aufgabe 2: Der Pseudo-Code von MAX-HEAPIFY (Abschnitt 5.2, Folie 120) besitzt in Zeile 10 einen rekursiven Aufruf, der auf einigen Rechnern sehr ineffizient sein könnte. Formulieren Sie den Algorithmus so um, dass Rekursion durch Iteration (d.h. eine Schleife) ersetzt wird.

Aufgabe 3: Beschreiben Sie einen Algorithmus, welcher n ganze Zahlen im Bereich $0, \dots, k$ so vorverarbeitet, dass danach Anfragen nach der Anzahl der Zahlen, die in einem vorgegebenen Bereich $[a..b]$ liegen, in Laufzeit $O(1)$ beantwortet werden können. Die Vorverarbeitung sollte Laufzeit $\Theta(n+k)$ besitzen.

Aufgabe 4: Geben Sie einen Algorithmus an, der n ganze Zahlen im Bereich $0, 1, \dots, n^2 - 1$ in $O(n)$ Laufzeit sortiert.

Aufgabe 5: Im Rahmen des Schülerwettbewerbs „Jugend Sortiert“ der Stadt Entenhausen haben die Drillinge Tick, Trick und Track folgenden Sortieralgorithmus eingereicht:

DUCK-SORT(A, i, j)

```
1  if  $A[i] > A[j]$ 
2    then vertausche  $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
3  if  $i + 1 \geq j$ 
4    then return
5   $k \leftarrow \lfloor (j - i + 1) / 3 \rfloor$            ▷ Dritteln
6  DUCK-SORT( $A, i, j - k$ )                 ▷ erste beiden Drittel
7  DUCK-SORT( $A, i + k, j$ )                 ▷ letzte beiden Drittel
8  DUCK-SORT( $A, i, j - k$ )                 ▷ erste beiden Drittel nochmal
```

- (a) Zeigen Sie, dass mit $n = \text{length}[A]$ der Aufruf DUCK-SORT($A, 1, n$) das Eingabefeld $A[1..n]$ korrekt sortiert.
- (b) Geben Sie für die Worst-Case Laufzeit von DUCK-SORT eine Rekursionsgleichung an und bestimmen Sie möglichst scharfe asymptotische Schranken (Θ -Notation) für die Worst-Case-Laufzeit.
- (c) Vergleichen Sie die Worst-Case-Laufzeit von DUCK-SORT mit der von INSERTION-SORT, MERGE-SORT, HEAPSORT und QUICKSORT. Wie stehen die Gewinnchancen der Drillinge ?