
Themen für Bakkalaureus-Arbeiten

Alle angegebenen Themen eignen sich auch für Master- bzw. Diplom-Arbeiten, wenn die Themenstellungen entsprechend weit gefaßt werden.

1. Die Ontologie der binären Relationen

Im verbandstheoretischen Teil der Vorlesung “Universelle Algebra”

(<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/skripte/verbtheorie/verb.pdf>)

werden im Abschnitt 3 verschiedene Eigenschaften binärer Relationen genannt, mit deren Hilfe man eine hierarchische Ordnung auf der Klasse aller binären Relationen definieren kann. Die Menge dieser Eigenschaften kann man um weitere Eigenschaften wie “linkstotal”, “linkseindeutig”, “rechtstotal” und “rechtseindeutig” vergrößern, wodurch sich die Hierarchie beträchtlich erweitern läßt.

In dieser Arbeit soll eine Ontologie der binären Relationen erstellt werden. Bei der Untersuchung der begrifflichen Hierarchie dieser Ontologie kann Software zur Formalen Begriffsanalyse eingesetzt werden. Die Grundlagen der Formalen Begriffsanalyse werden im Abschnitt 8 der oben genannten Vorlesung behandelt. Weitere Informationen zu Ontologien findet man in dem Manuskript

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/onto.pdf>

Literatur

Ganter, B., Wille, R., Formale Begriffsanalyse, Springer, 1996.

2. Elementare Eigenschaften ternärer Relationen

Im verbandstheoretischen Teil der Vorlesung “Universelle Algebra”

(<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/skripte/verbtheorie/verb.pdf>)

werden im Abschnitt 3 verschiedene Eigenschaften binärer Relationen genannt und in dem Manuskript zur Theorie von Ontologien

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/onto.pdf>

werden einige Abhängigkeiten zwischen diesen Eigenschaften exemplarisch untersucht. Dreistellige Relationen werden in der mathematischen Literatur dagegen seltener untersucht, treten aber auch auf. Beispielsweise kann man zwischen den Punkten a, b, c eines geometrischen Raumes die ternäre Relation $\varrho(a, b, c)$ dadurch definieren, daß sie genau dann zutrifft, wenn a, b und c auf einer Geraden liegen. Diese Relation ist in dem Sinn “symmetrisch”, daß sie dann auf jede Vertauschung der Punkte a, b, c ebenfalls zutrifft.

Ein anderes Beispiel ist die “zwischen”-Relation $\zeta(a, b, c)$, die für Elemente a, b, c einer partiell geordneten Menge genau dann zutrifft, wenn $a \leq b \leq c$ oder $c \leq b \leq a$ gilt. Auch diese Relation besitzt eine gewisse Symmetrie, die sich jedoch von der oben genannten unterscheidet.

In der Arbeit sollen zunächst Anwendungen ternärer Relationen in der mathematischen Literatur gesucht und dargestellt werden. Anschließend sollen elementare Eigenschaften wie die oben genannte Symmetrie formal beschrieben und ihre Abhängigkeiten ermittelt werden.

3. Untersuchung von Axiomen kleiner Länge für Gruppoide mit 0

In seiner Masterarbeit hat Herr Aulhorn die Abhängigkeiten zwischen 87 Axiomen für Gruppoide (S, \cdot) mit einem ausgezeichneten Element $0 \in S$ untersucht. Dazu hat er ein C^{++} -Programm entwickelt, mit dem ungefähr 17000 derartige Gruppoide mit unterschiedlichen Kombinationen dieser Axiome gefunden wurden. Daraus ergab sich dann, daß sich die gesuchten Abhängigkeiten durch ca. 1200 Implikationen zwischen diesen Axiomen beschreiben lassen. Diese Implikationen wären zu beweisen oder durch Gegenbeispiele zu widerlegen, um die gesuchten Abhängigkeiten vollständig zu bestimmen.

Da sich die gestellte Aufgabe als zu umfangreich für eine einzelne Masterarbeit herausstellte, wurde die Themenstellung auf kommutative Gruppoide eingeschränkt. Hierdurch reduzierte sich die Anzahl der Beispiele auf 154 und die Anzahl der Implikationen auf 52.

In der anzufertigenden Arbeit sollen nun entsprechende Untersuchungen für die oben genannten Gruppoide durchgeführt werden unter der einschränkenden Bedingung, daß $0 \in S$ absorbierendes bzw. neutrales Element ist. Hierdurch wird eine ähnliche Reduktion des Umfangs der Arbeit erreicht, wie bei Herrn Aulhorn.

Natürlich können die Programme und Beispielsammlungen von Herrn Aulhorn benutzt werden.

Literatur

M. Aulhorn, Axiomatische Untersuchungen von Gruppoiden mit ausgezeichnetem Element, Master-Arbeit, TU Bergakademie Freiberg, Mai 2008.

4. Untersuchung von Axiomen kleiner Länge für Gruppoide mit 0 und einstelliger Operation

Aufbauend auf der Diplom-Arbeit von C. Passeck und einem darin entwickelten Programm hat Frau Gehre in ihrer Bakkalaureus-Arbeit sämtliche Axiome der Längen ≤ 4 untersucht und dabei festgestellt, daß dadurch ein Verband von insgesamt 59 Gruppoid-Varietäten definiert wird.

In dieser Arbeit soll der entsprechende Verband für Gruppoide $(S, \cdot, *, 0)$ mit einem ausgezeichneten Element $0 \in S$ und einer einstelligen Operation $*$ berechnet werden.

Zur Strukturierung der Untersuchungen kann das von Frau Gehre weiterentwickelte Programm zum Testen von Gruppoiden (nach entsprechender Anpassung an Gruppoide mit ausgezeichnetem Element und einstelliger Operation) und Software zur formalen Begriffsanalyse eingesetzt werden.

Eine Weiterentwicklung des Programms von Frau Gehre für Gruppoide mit ausgezeichnetem Element wurde mittlerweile von Herrn Aulhorn angefertigt und kann natürlich ebenfalls benutzt werden.

Literatur

C. Passeck, Axiomatische Untersuchungen von Gruppoiden, Diplom-Arbeit, TU Bergakademie Freiberg, März 2005.

S. Gehre, Untersuchung von Gruppoiden mit kurzen Axiomen, Bakkalaureus-Arbeit, TU Bergakademie Freiberg, 2006.

M. Aulhorn, Axiomatische Untersuchungen von Gruppoiden mit ausgezeichnetem Element, Magister-Arbeit, TU Bergakademie Freiberg, Mai 2008.

5. Untersuchung von Axiomen kleiner Länge für Bigruppoide

Unter einem *Bigruppoid* $(S, +, \cdot)$ versteht man eine nichtleere Menge S mit zwei binären Verknüpfungen, einer Addition $+$ und einer Multiplikation \cdot . Beispielsweise handelt es sich bei jedem Verband (S, \vee, \wedge) oder bei jedem Halbring $(S, +, \cdot)$ um ein derartiges Bigruppoid. Aber auch jedes gewöhnliche Gruppoid (S, \cdot) kann als Bigruppoid aufgefaßt werden, in dem die beiden Verknüpfungen gemäß (M) $a + b = a \cdot b$ übereinstimmen.

Aufbauend auf der Diplom-Arbeit von C. Passeck und einem darin entwickelten Programm hat Frau Gehre in ihrer Bakkalaureus-Arbeit sämtliche Axiome der Längen ≤ 4 für Gruppoid-Untervarietäten untersucht und dabei festgestellt, daß dadurch ein Verband von insgesamt 59 Gruppoid-Varietäten definiert wird.

In dieser Arbeit sollen analog zunächst sämtliche möglichen Axiome der Längen ≤ 4 (das oben angegebene Axiom (M) ist eines davon) für Bigruppoide bestimmt und anschließend der entsprechende Verband berechnet werden.

Zur Strukturierung der Untersuchungen kann das von Frau Gehre weiterentwickelte Programm zum Testen von Gruppoiden (nach entsprechender Anpassung an Bigruppoide) und Software zur formalen Begriffsanalyse eingesetzt werden.

Literatur

C. Passeck, Axiomatische Untersuchungen von Gruppoiden, Diplom-Arbeit, TU Bergakademie Freiberg, März 2005.

S. Gehre, Untersuchung von Gruppoiden mit kurzen Axiomen, Bakkalaureus-Arbeit, TU Bergakademie Freiberg, 2006.

6. Äquivalenz von Gruppoid-Axiomen der Länge 6 oder weniger

In seiner Bakkalaureusarbeit hat Herr Ringehahn die Abhängigkeiten zwischen ca. 300 Axiomen der Länge ≤ 5 für Gruppoide (S, \cdot) untersucht. Dazu hat er ein Programm entwickelt, mit dem für sämtliche Gruppoide mit 4 Elementen ermittelt wurde, welche Axiome in dem jeweiligen Gruppoid gelten. Aus diesen Informationen wurde dann eine Liste möglicher Äquivalenzen zwischen einzelnen Axiomen erstellt. Durch Beweis oder Widerlegung dieser Äquivalenzen konnte dann die Anzahl der weiter zu untersuchenden Axiome auf 149 reduziert werden.

In der anzufertigenden Arbeit sollen nun diese Untersuchungen auf Äquivalenz für die ca. 3500 möglichen Gleichungen der Länge ≤ 6 durchgeführt werden.

Natürlich können die Programme und Beispielsammlungen von Herrn Ringehahn und weitere Software (wie ConExp und Prover9) zum Untersuchen von Algebren dabei benutzt werden.

Literatur

M. Ringehahn, Untersuchungen von Abhängigkeiten zwischen Gruppoid-Axiomen, Bakkalaureus-Arbeit, TU Bergakademie Freiberg, Dezember 2008.

7. Untersuchung von Axiomen der Länge 5 für idempotente Gruppoide und Halbgruppen

In seiner Bakkalaureusarbeit hat Herr Ringehahn die Abhängigkeiten zwischen 149 Axiomen der Länge ≤ 5 für Gruppoide (S, \cdot) untersucht.

Da sich der Beweis bzw. die Widerlegung sämtlicher möglicher Abhängigkeiten zwischen diesen Axiomen als zu umfangreich für eine einzelne Arbeit erwies, hat Herr Ringehahn die Untersuchung dieser Axiome unter der zusätzlichen Prämisse der Kommutativität durchgeführt.

In der anzufertigenden Arbeit soll nun die Untersuchungen aller Axiome unter der zusätzlichen Prämisse der Idempotenz bzw. der Assoziativität fortgesetzt werden. Vorarbeiten hierzu wurden von Herrn Ringehahn in seiner Arbeit bereits geleistet.

Natürlich können die Programme und Beispielsammlungen von Herrn Ringehahn und weitere Software (wie ConExp und Prover9) zum Untersuchen von Algebren dabei benutzt werden.

Literatur

M. Ringehahn, Untersuchungen von Abhängigkeiten zwischen Gruppoid-Axiomen, Bakkalaureus-Arbeit, TU Bergakademie Freiberg, Dezember 2008.

8. Untersuchung von Axiomen für Hilbert-Algebren und BCK-Algebren

In ihrer Masterarbeit hat Frau Hänig die Abhängigkeiten zwischen 17 Axiomen untersucht, die zur Definition von Hilbert-Algebren dienen bzw. die von Hilbert-Algebren erfüllt werden.

In der anzufertigenden Arbeit sollen nun, aufbauend auf den Ergebnissen von Frau Hänig, weitere Axiome, die insbesondere bei der Betrachtung von BCK-Algebren eine Rolle spielen, mit einbezogen werden. Die BCK-Algebren wurden schon in der Diplomarbeit von Herrn Kunath untersucht.

Natürlich können die Programme und Beispielsammlungen von Frau Hänig und weitere Software (wie ConExp und Prover9) zum Untersuchen von Algebren dabei benutzt werden.

Literatur

Hänig, A., Concept Analysis of Implicative Algebras, Master-Arbeit, TU Bergakademie Freiberg, April 2009.

Kunath, A., Implikation und Information, Diplomarbeit, TU Bergakademie Freiberg, 2001.

9. Bestimmung aller nichtisomorphen linkssymmetrischen und linksdistributiven Gruppoide kleiner Ordnung

In seiner Bakkalaureus-Arbeit hat G. Bernath mit Hilfe eines von ihm entwickelten Programms alle nichtisomorphen L -Gruppoide für Ordnungen $n \leq 8$ bestimmt.

Analog hat A. Püschel alle nichtisomorphen linkssymmetrischen idempotenten Gruppoide für Ordnungen $n \leq 6$ berechnet.

Aufgabe der Arbeit ist es, das vorliegende Programm so zu modifizieren, daß damit die Anzahl der nichtisomorphen linkssymmetrischen und linksdistributiven Gruppoide kleiner Ordnung bestimmt werden kann.

Literatur

G. Bernath, Bestimmung nichtisomorpher L -Gruppoide kleiner Ordnung, Bakkalaureus-Arbeit, TU Bergakademie Freiberg, 2006.

A. Püschel, Bestimmung nichtisomorpher linkssymmetrischer Gruppoide kleiner Ordnung, Bakkalaureus-Arbeit, TU Bergakademie Freiberg, 2009.

www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/algebra/linkssymmetrisch.html

David Stanovsky, A survey of left symmetric left distributive groupoids (unveröffentlichtes Manuskript).

10. Eine Ontologie für Codes

In seiner Bakkalaureusarbeit hat M. Ebert eine erste Ontologie formaler Sprachen erstellt, die im wesentlichen die bekannte Chomsky-Hierarchie verfeinert. Naturgemäß sind die meisten betrachteten Sprachen dabei unendlich. Nun stellen Codes ebenfalls formale Sprachen dar, sind allerdings stets endlich und daher in der vorliegenden Ontologie alle in der Klasse der regulären Sprachen enthalten.

In dieser Arbeit soll die Ontologie nun so verfeinert werden, daß die verschiedenen Klassen von Codes, die in der folgenden Vorlesung behandelt werden, explizit gemacht werden.

www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/skripte/codtheorie/codierung.pdf

Zur Unterstützung der Untersuchung und zur Visualisierung der Ontologien kann Software zur Formalen Begriffsanalyse eingesetzt werden. Weitere Informationen zu Ontologien findet man in dem Manuskript

www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/onto.pdf

Literatur

Ganter, B., Wille, R., Formale Begriffsanalyse, Springer, 1996.

M. Ebert, Eine Ontologie formaler Sprachen, Bakkalaureus-Arbeit, TU Bergakademie Freiberg, 2009.