Die Lösung der Gleichung 4. Grades

Bei der Berechnung der Nullstellen eines beliebigen Polynoms 4. Grades

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_4 \neq 0$$

darf man nach Division durch a_4 von der folgenden Gleichung ausgehen

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Bevor dieser allgemeine Fall behandelt wird, werden noch zwei Spezialfälle betrachtet.

Biquadratische Gleichungen

Hierbei handelt es sich um Gleichungen der Form

$$x^4 + bx^2 + d = 0,$$

die nach der Substitution $y = x^2$ auf die quadratische Gleichung

$$y^2 + by + d = 0$$

führen, deren Lösungen y_1 und y_2 mit der üblichen Formel ermittelt werden können. Dies ergibt dann die vier Lösungen

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{y_1} \quad x_{3/4} = \pm\sqrt{y_2}$$

der biquadratischen Gleichung.

Symmetrische Gleichungen

Hierbei handelt es sich um Gleichungen der Form

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

Division durch x^2 führt zunächst auf

$$x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + a(x + \frac{1}{x}) + b = 0.$$

Mit der Substitution $y = x + \frac{1}{x}$, also $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$, erhält man die quadratische Gleichung

$$y^2 + ay + b - 2 = 0,$$

deren Lösungen y_1 und y_2 mit der üblichen Formel ermittelt werden können. Dies führt für die gesuchten Lösungen der symmetrischen Gleichung dann auf die quadratischen Gleichungen

$$x^2 - y_1x + 1 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 - y_2x + 1 = 0,$$

die man ebenfalls mit den bekannten Formeln berechnen kann.

Der folgende Lösungsweg für die allgemeine Gleichung 4. Grades stammt von dem italienischen Mathematiker Ferrari. Zunächst transformiert man die Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

durch die Substitution $y = x + \frac{1}{4}a$ in die äquivalente Gleichung

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

mit

$$p = -\frac{3}{8}a^2 + b$$

$$q = \frac{1}{8}a^3 - \frac{ab}{2} + c$$

$$r = -\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d.$$

Im Falle $q = 0$ handelt es sich nun um eine biquadratische Gleichung, die man mit der oben angegebenen Methode lösen kann. Sonst rechnet man folgendermaßen weiter: In der Gleichung

$$y^4 + py = -qy - r$$

führt man eine quadratische Ergänzung durch, um auf der linken Seite ein vollständiges Quadrat zu erzeugen, aus dem man die Wurzel ziehen kann. Man erhält dann

$$y^4 + 2py^2 + p^2 = py^2 - qy - r + p^2,$$

also

$$(y^2 + p)^2 = py^2 - qy - r + p^2.$$

Falls jetzt auf der rechten Seite ebenfalls ein vollständiges Quadrat stehen sollte, kann man auf beiden Seiten die Quadratwurzeln ziehen und so zu einer quadratischen Gleichung für y gelangen, woraus man letztlich dann die Lösungen der Ausgangsgleichung erhält.

Die geniale Idee von Ferrari war es nun, eine Hilfsvariable z so einzuführen, daß auf der linken Seite ein Quadrat erhalten blieb, während durch geeignete Wahl von z auf der rechten Seite ein vollständiges Quadrat entstand. Er erreichte dies, indem er auf der rechten Seite die Klammer $y^2 + p$ durch den Term $y^2 + p + z$ ersetzte und zunächst ausrechnete:

$$\begin{aligned}(y^2 + p + z)^2 &= py^2 - qy - r + p^2 + 2z(y^2 + p) + z^2 \\ &= (p + 2z)y^2 - qy + (p^2 - r + 2pz + z^2).\end{aligned}$$

Nun ist die rechte Seite genau dann ein vollständiges Quadrat, wenn ihre Diskriminante verschwindet, wenn also gilt

$$(-q)^2 - 4(p + 2z)(p^2 - r + 2pz + z^2) = 0.$$

Dies führt auf die folgende kubische Gleichung für z:

$$8z^3 + 20pz^2 + (16p - 8r)z + (4p^3 - 4pr - q^2) = 0.$$

Mit den Auflösungsformeln von Cardano für die Gleichung 3. Grades konnte Ferrari eine Lösung für z ermitteln. Danach konnte Ferrari mit der oben angegebenen Methode eine Lösung für y und damit auch für x finden.

Beispiel: Die Gleichung

$$x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 30x + 25 = 0$$

führt mit der Substitution $y = x + \frac{1}{4}a = x + \frac{3}{2}$ zu

$$y^4 + \frac{9}{2}y^2 + 3y + \frac{85}{16} = 0,$$

also $p = \frac{9}{2}, q = 3, r = \frac{85}{16}$. Die quadratische Ergänzung ergibt

$$y^4 + 9y^2 + \frac{81}{4} = \frac{9}{2}y^2 - 3y - \frac{85}{16} + \frac{81}{4}$$

also

$$(y^2 + \frac{9}{2})^2 = \frac{9}{2}y^2 - 3y + \frac{239}{16}.$$

Jetzt wird die Hilfsvariable z eingeführt:

$$\begin{aligned} (y^2 + \frac{9}{2} + z)^2 &= \frac{9}{2}y^2 - 3y + \frac{239}{16} + 2z(y^2 + \frac{9}{2}) + z^2 \\ &= (\frac{9}{2} + 2z)y^2 - 3y + (\frac{239}{16} + 9z + z^2). \end{aligned}$$

Nun berechnet man z, indem man die Diskriminante 0 setzt:

$$(-3)^2 - 4(\frac{9}{2} + 2z)(\frac{239}{16} + 9z + z^2) = -\frac{2079}{8} - \frac{563}{2}z - 90z^2 - 8z^3 = 0.$$

Diese kubische Gleichung hat die drei reellen Lösungen

$$z_1 = -\frac{7}{4}, z_2 = -\frac{11}{4}, z_3 = -\frac{27}{4}.$$

Benutzt man zum Weiterrechnen den Wert z_1, so ergibt sich die biquadratische Gleichung

$$(y^2 + \frac{11}{4})^2 = (y - \frac{3}{2})^2.$$

Durch Ziehen der Quadratwurzel erhält man die beiden Gleichungen

$$y^2 + \frac{11}{4} = y - \frac{3}{2} \text{ und } y^2 + \frac{11}{4} = \frac{3}{2} - y.$$

Die erste Gleichung $y^2 - y + \frac{17}{4} = 0$ führt auf die beiden Lösungen $y_1 = \frac{1}{2} + 2i$ und $y_2 = \frac{1}{2} - 2i$, die zweite Gleichung $y^2 + y + \frac{5}{4} = 0$ führt auf $y_3 = -\frac{1}{2} + i$ und $y_4 = -\frac{1}{2} - i$. Hieraus ergeben sich die folgenden Lösungen der Ausgangsgleichung

$$x_1 = -1 + 2i, x_2 = -1 - 2i, x_3 = -2 + i, x_4 = -1 - 2i.$$

Rechnet man mit z_2 oder z_3 weiter, erhält man andere quadratische Gleichungen für y (nämlich $y^2 - iy + \frac{1}{4}(7 - 6i) = 0$ und $y^2 + iy + \frac{1}{4}(7 + 6i) = 0$ für z_2 un $y^2 - 3iy - \frac{1}{4}(9 + 2i) = 0$ sowie $y^2 + 3iy - \frac{1}{4}(9 - 2i) = 0$ für z_3), die aber jeweils dieselben vier Lösungen haben.