Die Lösung der Gleichung 4. Grades

Bei der Berechnung der Nullstellen eines beliebigen Polynoms 4. Grades

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_4 \neq 0$$

darf man nach Division durch a_4 von der folgenden Gleichung ausgehen

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Bevor dieser allgemeine Fall behandelt wird, werden noch zwei Spezialfälle betrachtet.

Biquadratische Gleichungen

Hierbei handelt es sich um Gleichungen der Form

$$x^4 + bx^2 + d = 0,$$

die nach der Substitution $y = x^2$ auf die quadratische Gleichung

$$y^2 + by + d = 0$$

führen, deren Lösungen y_1 und y_2 mit der üblichen Formel ($y_{1/2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - d}$) ermittelt werden können. Dies ergibt dann die vier Lösungen

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{y_1} \quad \text{und} \quad x_{3/4} = \pm\sqrt{y_2}$$

der biquadratischen Gleichung. (Bei den Lösungen kann es sich natürlich auch um komplexe Zahlen handeln!)

Symmetrische Gleichungen

Hierbei handelt es sich um Gleichungen der Form

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

Division durch x^2 (eine Lösung $x = 0$ ist hier wegen des Absolutgliedes 1 ausgeschlossen) führt hierbei zunächst auf

$$x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + a(x + \frac{1}{x}) + b = 0.$$

Mit der Substitution $y = x + \frac{1}{x}$, also $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$, erhält man die quadratische Gleichung

$$y^2 + ay + (b - 2) = 0,$$

deren Lösungen y_1 und y_2 ebenfalls mit der üblichen Formel ermittelt werden können. Dies führt für die gesuchten Lösungen der symmetrischen Gleichung dann auf die beiden quadratischen Gleichungen

$$x^2 - y_1x + 1 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 - y_2x + 1 = 0,$$

die man wiederum mit den bekannten Formeln berechnen kann.

Der folgende Lösungsweg für die allgemeine Gleichung 4. Grades stammt von dem italienischen Mathematiker Ferrari. Zunächst transformiert man die Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

durch die Substitution $y = x + \frac{1}{4}a$ in die äquivalente Gleichung

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

mit

$$p = -\frac{3}{8}a^2 + b$$

$$q = \frac{1}{8}a^3 - \frac{ab}{2} + c$$

$$r = -\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2 b}{16} - \frac{ac}{4} + d.$$

Im Fall $q = 0$ handelt es sich nun um eine biquadratische Gleichung, die man mit der oben angegebenen Methode lösen kann.

Sonst rechnet man folgendermaßen weiter:

In der Gleichung

$$y^4 + py^2 = -qy - r$$

führt man eine quadratische Ergänzung durch, um auf der linken Seite ein vollständiges Quadrat zu erzeugen, aus dem man die Wurzel ziehen kann. Man erhält dann

$$y^4 + 2py^2 + p^2 = py^2 - qy - r + p^2,$$

also

$$(y^2 + p)^2 = py^2 - qy - r + p^2.$$

Falls jetzt auf der rechten Seite ebenfalls ein vollständiges Quadrat stehen sollte, kann man auf beiden Seiten die Quadratwurzel ziehen und so zu einer quadratischen Gleichung für y gelangen, woraus man letztlich dann die Lösung der Ausgangsgleichung erhält.

Die geniale Idee von Ferrari war es nun, eine Hilfsvariable z so einzuführen, daß auf der linken Seite ein Quadrat erhalten blieb, während durch geeignete Wahl von z auf der rechten Seite ein vollständiges Quadrat entstand. Er erreichte dies, indem er auf der linken Seite die Klammer $y^2 + p$ durch den Term $y^2 + p + z$ ersetzte und zunächst ausrechnete:

$$(y^2 + p + z)^2 = py^2 - qy - r + p^2 + 2z(y^2 + p) + z^2 = (p + 2z)y^2 - qy + (p^2 - r + 2pz + z^2).$$

Nun ist die rechte Seite genau dann ein vollständiges Quadrat, wenn ihre Diskriminante verschwindet, wenn also gilt

$$(-q)^2 - 4(p + 2z)(p^2 - r + 2pz + z^2) = 0.$$

Dies führt auf die folgende kubische Gleichung für z, die daher immer mindestens eine reelle Lösung besitzt:

$$8z^3 + 20pz^2 + (16p^2 - 8r)z + (4p^3 - 4pr - q^2) = 0.$$

Mit den Auflösungsformeln von Cardano für die Gleichung 3. Grades konnte Ferrari eine reelle Lösung für z ermitteln.
Mit einem solchen z gilt dann also

$$(y^2 + p + z)^2 = (p + 2z)(y - \frac{q}{2(p + 2z)})^2.$$

Hierbei zeigt die Diskrimantenbedingung, daß $p+2z=0$ bereits $q=0$ impliziert, was ja oben ausgeschlossen wurde. Also darf man $p+2z>0$ annehmen und durchdividieren. Durch Ziehen der Quadratwurzel ergibt sich

$$y^2+p+z=\sqrt{p+2z}(y-\frac{q}{2(p+2z)}),$$

wobei beide Vorzeichen für die Quadratwurzel zu berücksichtigen sind. Hieraus erhält man dann zwei quadratische Gleichungen für y:

$$y^2-\sqrt{p+2z}y+\frac{q}{2\sqrt{p+2z}}+p+z=0 \quad y^2+\sqrt{p+2z}y-\frac{q}{2\sqrt{p+2z}}+p+z=0.$$

Aus den vier Lösungen dieser Gleichungen kann man schließlich mit der Beziehung $x=y-\frac{1}{4}a$ die Lösungen der Ausgangsgleichung bekommen.

Beispiel: Die Gleichung

$$x^4+6x^3+18x^2+30x+25=0$$

führt mit der Substitution $y=x+\frac{1}{4}a=x+\frac{3}{2}$ zu

$$y^4+\frac{9}{2}y^2+3y+\frac{85}{16}=0,$$

also $p=\frac{9}{2}, q=3, r=\frac{85}{16}$. Die quadratische Ergänzung ergibt

$$y^4+9y^2+\frac{81}{4}=\frac{9}{2}y^2-3y-\frac{85}{16}+\frac{81}{4}$$

also

$$(y^2+\frac{9}{2})^2=\frac{9}{2}y^2-3y+\frac{239}{16}.$$

Jetzt wird die Hilfsvariable z eingeführt:

$$(y^2+\frac{9}{2}+z)^2=\frac{9}{2}y^2-3y+\frac{239}{16}+2z(y^2+\frac{9}{2})+z^2=(\frac{9}{2}+2z)y^2-3y+(\frac{239}{16}+9z+z^2).$$

Nun berechnet man z, indem man die Diskriminante gleich 0 setzt:

$$(-3)^2-4(\frac{9}{2}+2z)(\frac{239}{16}+9z+z^2)=-\frac{2079}{8}-\frac{563}{2}z-90z^2-8z^3=0.$$

Diese kubische Gleichung hat die drei reellen Lösungen

$$z_1=-\frac{7}{4},\ z_2=-\frac{11}{4},\ z_3=-\frac{27}{4}.$$

Benutzt man zum Weiterrechnen den Wert z_1, so ergibt sich die biquadratische Gleichung

$$(y^2+\frac{11}{4})^2=(y-\frac{3}{2})^2.$$

Durch Ziehen der Quadratwurzel erhält man die beiden Gleichungen

$$y^2+\frac{11}{4}=y-\frac{3}{2} \quad \text{und} \quad y^2+\frac{11}{4}=\frac{3}{2}-y.$$

Die erste Gleichung $y^2-y+\frac{17}{4}=0$ führt auf die beiden Lösungen $y_1=\frac{1}{2}+2i$ und $y_2=\frac{1}{2}-2i$, die zweite Gleichung $y^2+y+\frac{5}{4}=0$ führt auf $y_3=-\frac{1}{2}+i$ und $y_4=-\frac{1}{2}-i$. Hieraus ergeben sich die folgenden Lösungen der Ausgangsgleichung

$$x_1=-1+2i,\ x_2=-1-2i,\ x_3=-2+i,\ x_4=-2-i.$$

Rechnet man dagegen mit z_2 oder z_3 weiter, erhält man jeweils andere quadratische Gleichungen für y (nämlich $y^2-iy+\frac{1}{4}(7-6i)=0$ und $y^2+iy+\frac{1}{4}(7+6i)=0$ für z_2 und $y^2-3iy-\frac{1}{4}(9+2i)=0$ sowie $y^2+3iy-\frac{1}{4}(9-2i)=0$ für z_3), die aber jeweils dieselben vier Lösungen haben.