

Ebene und Sphärische Trigonometrie

Prof. Udo Hebisch
TU Bergakademie Freiberg

**Dies ist ein vorläufiges Skript zur
zweistündigen Vorlesung
Sphärische Trigonometrie
für Markscheider
im WS 2005/2006.**

**Anfragen, Verbesserungsvorschläge und
Hinweise zu Fehlern bitte an
hebisch@mathe.tu-freiberg.de**



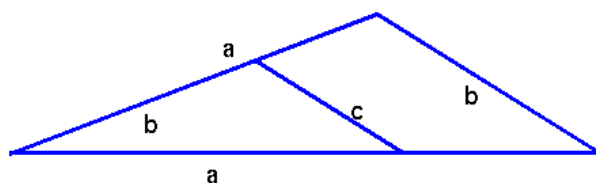
Kapitel 1

Ebene Trigonometrie

1.1 Einführung und Motivation

Unter *Trigonometrie* (grch. *tri* = drei; *gonia* = Winkel, *metrein* = messen) versteht man die Berechnung unbekannter Seiten/Winkel eines beliebigen Dreiecks aus einigen gemessenen Seiten/Winkeln. In der *ebenen Trigonometrie* handelt es sich dabei um ebene Dreiecke, in der *sphärischen Trigonometrie* (grch. *sphaira* = Kugel, Ball) um Dreiecke auf einer Kugeloberfläche. Ob die Berechnung der gesuchten Stücke aus den bekannten möglich ist, darüber geben die *Kongruenzsätze* (lat. *congruere* = übereinstimmen) Auskunft.

Aufgabe 1 Gibt es zwei nicht kongruente Dreiecke, die in fünf Stücken übereinstimmen?



Lösung 1 Die beiden nichtkongruenten Dreiecke können nicht in allen drei Seiten übereinstimmen. Daher müssen sie in ihren drei Winkeln (und zwei Seiten)

übereinstimmen und sind folglich ähnlich. Der Ähnlichkeitsfaktor sei λ . Sind a , b und c die drei Seiten des einen Dreiecks, so sind λa , λb und λc die drei Seiten des zweiten Dreiecks. Da sie in zwei Seiten übereinstimmen sollen, darf man $a = \lambda b$ und $b = \lambda c$ annehmen. Dies führt zu $ac = b^2$. Nun ist es leicht, konkrete derartige Dreiecke anzugeben, etwa für $a = 9$, $b = 6$ und $c = 4$, was zu $\lambda = 1.5$ führt.

Handelt es sich bei einer praktischen Vermessungsaufgabe um relativ “kleine” Dreiecke auf der Erdoberfläche, so kann man wegen des sehr großen Radius dieser Kugel ($R = 6371 \text{ km}$) ohne große Fehler von der Krümmung absehen und die Methoden der ebenen Trigonometrie benutzen. Bei “großen” Dreiecken jedoch (mit Seitenlängen über ca. 50 km), sind die sphärischen Verfahren anzuwenden.

Aufgabe 2 Wie groß ist der Unterschied zwischen der Sehnenlänge s und der Länge b des zugehörigen Kreisbogenstücks bei einem Radius von $R = 6371 \text{ km}$ für $s = 50, 100, 200, 500$ und 1000 km ?

Lösung 2 Die Differenz $b - s$ beträgt jeweils $0.00012832, 0.0010266, 0.0082132, 0.1284058, 1.02939 \text{ km}$.

1.2 Winkelmessung

Ein *Winkel* ist gegeben durch einen Punkt, den *Scheitelpunkt* des Winkels, und zwei von diesem Scheitelpunkt ausgehende Halbgeraden, den *Schenkeln* des Winkels. Die *Größe eines Winkels* wird als das Verhältnis der Öffnung zwischen seinen Schenkeln im Vergleich zum vollen Kreis bestimmt. Mißt man Winkel im *Gradmaß*, so entspricht dem vollen Kreis 360° , d. h. ein Winkel von 1° ist den 360sten Teil eines Vollkreises geöffnet. Zur feineren Messung wird jedes Grad in sechzig Minuten ($60'$) und jede Minute wiederum in sechzig Sekunden ($60''$) unterteilt. (Diese Einteilung geht auf die Babylonier zurück, die im Sexagesimal-System rechneten. Die Bezeichnungen Minute und Sekunde stammen aus dem Lateinischen: *minuere* = vermindern, verkleinern; *secundus* = der Zweite, d. h. Sekunde bedeutet den zweiten Verkleinerungsschritt.) Bei sehr genauen Messungen werden Bruchteile von Sekunden im Dezimalsystem angegeben.

Ein Winkel von 90° wird auch als *rechter Winkel* bezeichnet, man sagt, seine Schenkel stehen *senkrecht* oder *orthogonal* aufeinander (grch. *orthos* = recht, gerade). Winkel zwischen 0° und 90° nennt man *spitze Winkel*, solche größer als 90° *stumpfe Winkel*.

Zwei Winkel x und y mit $x + y = 90^\circ$ ($x + y = 180^\circ$) bezeichnet man als *Komplementwinkel* (*Supplementwinkel*) (lat. *completere* = vervollständigen bzw. *supplere* = ergänzen).

Im Vermessungswesen wird der Vollkreis auch in 400 gon (Neugrad) eingeteilt. Bruchteile von 1 gon werden dabei im Dezimalsystem angegeben.

Eine andere Möglichkeit für die Größenangabe eines Winkels besteht im *Bogenmaß*. Dazu wird die Länge des Bogens angegeben, den der Winkel zwischen seinen Schenkeln aus einem Kreis vom Radius 1 herausschneidet. Da der Umfang des vollen Einheitskreises gleich 2π ist, besitzt ein rechter Winkel das Bogenmaß $\frac{\pi}{2}$. Bezeichnet $\text{deg}(x)$ das Gradmaß eines Winkels x und $\text{arc}(x)$ (von lat. *arcus* = Bogen) sein Bogenmaß, so gilt

$$(1.1) \quad \frac{\text{deg}(x)}{360^\circ} = \frac{\text{arc}(x)}{2\pi}$$

Aufgabe 3 Wie groß ist das Gradmaß eines Winkel, dessen Bogenmaß gleich 1 ist? Wie groß ist das Bogenmaß eines Winkels, der das Gradmaß 1° besitzt? Wie groß ist das Gradmaß eines Winkels von 1 gon , wie groß ist ein Winkel von 1° in Neugrad?

Lösung 3 Aus $\text{arc}(x) = 1$ folgt $\text{deg}(x) = 57^\circ 17' 44.806236\dots''$, aus $\text{deg}(x) = 1^\circ$ folgt $\text{arc}(x) = 0.017453292\dots$

Aus $\text{gon}(x) = 1$ folgt $\text{deg}(x) = 54'$, aus $\text{deg}(x) = 1^\circ$ folgt $\text{gon}(x) = 1.111\dots \text{ gon}$.

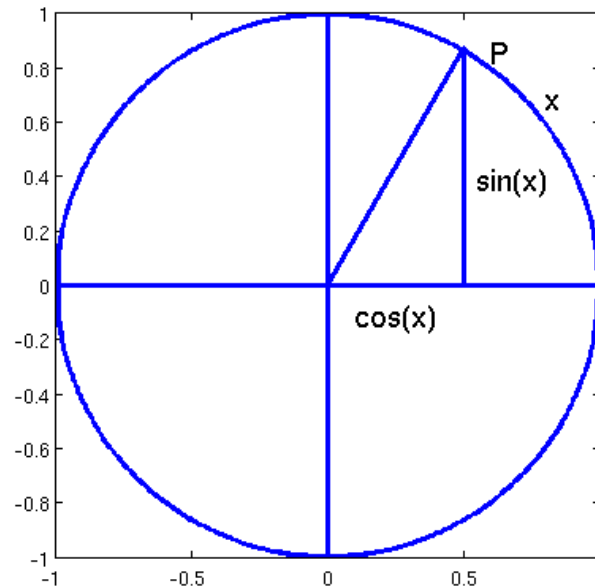
Man kann durch Unterscheidung von erstem und zweitem Schenkel eines Winkels diesen orientieren, wodurch auch negative Werte für die Größe eines Winkels möglich sind. Üblicherweise wird der Wert positiv gerechnet, wenn beim Übergang vom ersten zum zweiten Schenkel der Scheitelpunkt im mathematisch positiven Sinn umlaufen wird, also entgegen dem Uhrzeigersinn!

Aufgabe 4 Woran liegt es eigentlich, daß sich die Zeiger unserer Analoguhren alle "im Uhrzeigersinn" drehen?

Lösung 4 Weil die Schatten einer Sonnenuhr auf der Nordhalbkugel(!) sich in eben diesem Sinn bewegen.

1.3 Winkelfunktionen

Legt man einen orientierten Winkel x mit seinem Scheitelpunkt in den Ursprung O eines kartesischen Koordinatensystems (René Descartes, 1596 - 1650) und den ersten Schenkel auf die positive x -Achse, so schneidet der zweite Schenkel den Einheitskreis in einem Punkt P mit den Koordinaten (x_0, y_0) .



Man bezeichnet y_0 als den *Sinus* von x und x_0 als *Cosinus* von x :

$$(1.2) \quad \sin(x) = y_0 \quad \text{und} \quad \cos(x) = x_0.$$

Da P auf dem Einheitskreis liegt, gilt für seine Koordinaten $x_0^2 + y_0^2 = 1$, also für alle Winkel x

$$(1.3) \quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Weitere unmittelbare Konsequenzen aus der Definition dieser Winkelfunktionen sind:

Satz 1 a) *Die Winkelfunktionen sin und cos sind periodische Funktionen mit der Periode 2π , d. h. es gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$ und Winkel x*

$$(1.4) \quad \sin(x) = \sin(x + 2k\pi) \quad \text{und} \quad \cos(x) = \cos(x + 2k\pi).$$

b) *Für die Nullstellen dieser Funktionen gilt*

$$(1.5) \quad \sin(x) = 0 \iff x = k\pi \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \quad \text{und}$$

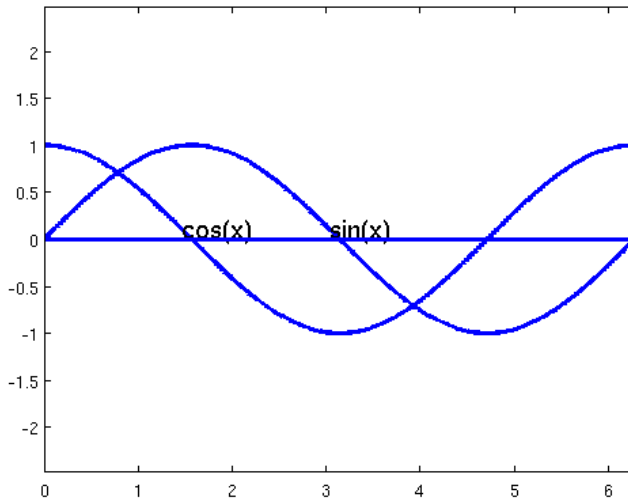
$$(1.6) \quad \cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

c) *Die Funktion sin ist ungerade, die Funktion cos gerade, d. h. für alle Winkel x gilt*

$$(1.7) \quad \sin(-x) = -\sin(x) \quad \text{und} \quad \cos(-x) = \cos(x).$$

d) *Für alle Winkel x gilt*

$$(1.8) \quad \sin(\pi - x) = \sin(x) \quad \text{und} \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x).$$



Für alle Winkel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ definiert man

$$(1.9) \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

und für alle Winkel $x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$

$$(1.10) \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Aus (1.3) erhält man, indem man durch $\cos^2(x)$ bzw. $\sin^2(x)$ dividiert

$$(1.11) \quad 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \text{und} \quad 1 + \cot^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}.$$

Insgesamt zeigen (1.3), (1.10) und (1.11), daß sich jede trigonometrische Funktion eines Winkels durch jede andere trigonometrische Funktion desselben Winkels ausdrücken läßt. Aus Satz 1 ergibt sich (evtl. durch kurze Rechnungen)

Satz 2 a) Die Winkelfunktionen \tan und \cot sind periodische Funktionen mit der Periode π , d. h. für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle Winkel x gilt

$$(1.12) \quad \tan(x) = \tan(x + k\pi) \quad \text{und} \quad \cot(x) = \cot(x + k\pi).$$

b) Für die Nullstellen dieser Funktionen gilt

$$(1.13) \quad \tan(x) = 0 \iff x = k\pi \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \quad \text{und}$$

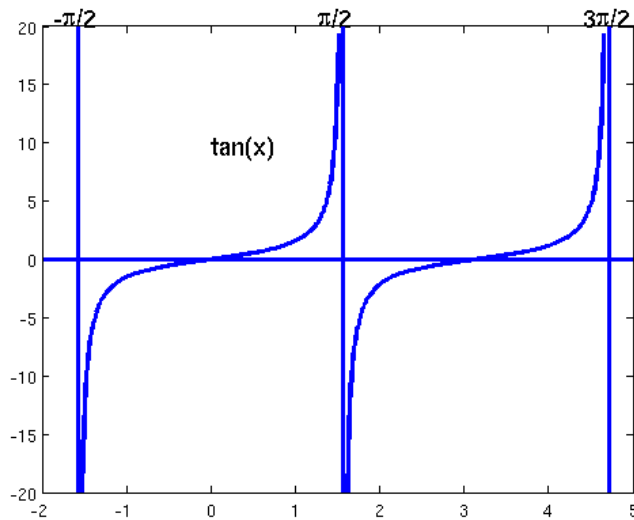
$$(1.14) \quad \cot(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

c) Die Funktionen \tan und \cot sind ungerade, d. h. für alle Winkel x gilt

$$(1.15) \quad \tan(-x) = -\tan(x) \quad \text{und} \quad \cot(-x) = -\cot(x).$$

d) Für alle Winkel x gilt

$$(1.16) \quad \tan(\pi - x) = -\tan(x) \quad \text{und} \quad \cot(\pi - x) = -\cot(x).$$



Die Sätze 1 und 2 zeigen, daß die Werte sämtlicher Winkelfunktionen für beliebige Winkel bereits durch die Werte dieser Funktionen für spitze Winkel bestimmt sind.

Zeichnet man zu einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck ein ähnliches mit der Hypotenusenlänge 1 (grch. *hypo* = unter; *tenein* = spannen), so ergeben sich aus den Strahlensätzen sofort folgende Beziehungen für jeden Basiswinkel x und die Katheten (grch. *kathetos* = herabgelassene (senkrechte) Linie) in einem rechtwinkligen Dreieck

$$(1.17) \quad \sin(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}},$$

$$(1.18) \quad \cos(x) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}},$$

$$(1.19) \quad \tan(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}},$$

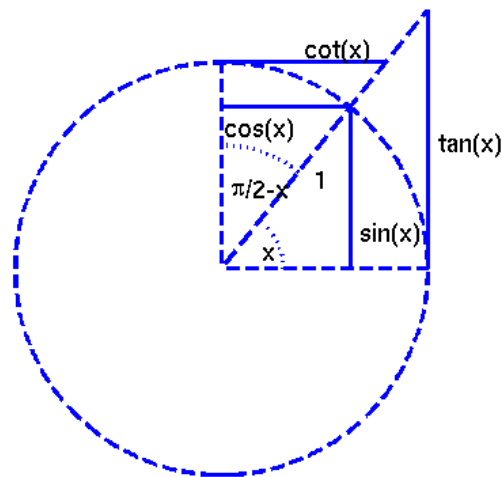
$$(1.20) \quad \cot(x) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}.$$

Da die beiden Basiswinkel in einem rechtwinkligen Dreieck Komplementwinkel sind, erhält man zunächst für beliebige spitze Winkel x

$$(1.21) \quad \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{und} \quad \cot(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

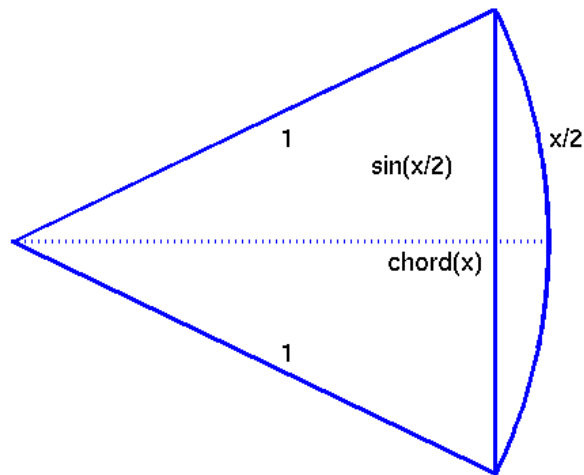
Durch einfache Überlegungen unter Benutzung der Sätze 1 und 2 zeigt man, daß (1.21) für beliebige Winkel x gilt.

Bemerkung 1 Die Beziehungen (1.21) erklären auch die Bezeichnungen “Cosinus” (complementi sinus) und “Cotangens” für diese Winkelfunktionen. Die Bezeichnung “Sinus” (lat. *sinus* = Meerbusen) hat seinen Ursprung im indischen *jiva* = Sehne und im gleichbedeutenden arabischen *dschiba*, das mit *dschaib* = Bucht verwechselt wurde. Im 5. Jahrhundert benutzte nämlich der indische Mathematiker und Astronom Aryabhata eine Sinustafel mit einer Schrittweite von $3\frac{3}{4}^\circ$. Diese entstand unter Benutzung der folgenden Formeln (1.39) und (1.40) durch fortgesetztes Halbieren eines 60° -Winkels. Um 1150 n. Chr. verbesserte Bhaskara diese Tafel mit Hilfe der Additionstheoreme, indem er die Schrittweite 1° und die Näherung $\sin(x) = x$ für $x = 1^\circ$ verwendete.



Die Bezeichnung “Tangens” kommt daher, daß sich der Tangens eines (spitzen) Winkels x als der Teil einer Tangente (lat. *tangere* = berühren) an den Einheitskreis im Punkt $(1, 0)$ wiederfindet, den der Winkel x aus dieser Tangente ausschneidet. Allerdings wurde dieser Name erst im 16. Jahrhundert für diese Winkelfunktion üblich. Vorher bezeichnete man den Tangens als *umbra versa* (= umgekehrter Schatten) und den Cotangens als *umbra recta* (= richtiger Schatten). Denn arabische Mathematiker hatten im 9. Jahrhundert diese Funktionen eingeführt bei der Aufgabe, die Schattenlänge eines waagerechten (senkrechten) Stabes auf einer senkrechten (waagerechten) Wand zu bestimmen.

Weitere historische Winkelfunktionen, die aber heute nur noch selten gebraucht werden sind der *Secans* $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, der *Cosecans* $\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ und der *Semiversus* $\operatorname{sem}(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(x))$. Die älteste Winkelfunktion, die Hipparchos von Nikäa (um 180 - 125 v. Chr.) zum erstenmal tabelliert hat, ist die Sehnenfunktion $\operatorname{chord}(x)$ (grch. *chorde* = Saite, Sehne).



Auch sie läßt sich durch die Sinusfunktion ausdrücken:

$$(1.22) \quad \text{chord}(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

1.4 Additionstheoreme

Für die Winkelfunktionen, angewandt auf die Summe zweier beliebiger Winkel x und y gelten

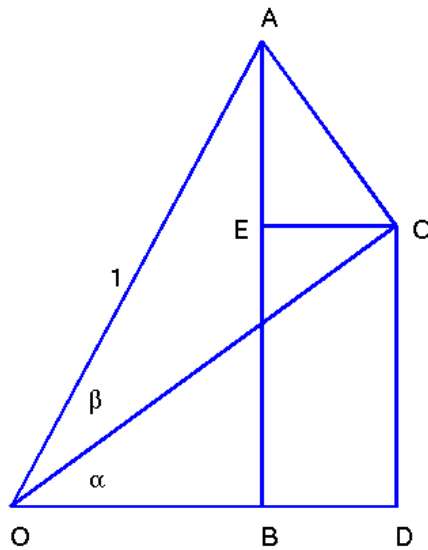
$$(1.23) \quad \sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

$$(1.24) \quad \cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$(1.25) \quad \tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}$$

$$(1.26) \quad \cot(x + y) = \frac{\cot(x) \cot(y) - 1}{\cot(y) + \cot(x)}$$

Den Beweis von (1.23) und (1.24) entnimmt man der folgenden Skizze, worin die Winkel $\angle(OCA)$, $\angle(ODC)$ und $\angle(BEC)$ rechte Winkel sind.



Dann gilt $\angle(EAC) = \alpha$ und man liest folgende Seitenlängen ab: $OC = \cos(\beta)$, $OD = \cos(\alpha) \cos(\beta)$, $EB = CD = \sin(\alpha) \cos(\beta)$, $AC = \sin(\beta)$, $EC = \sin(\alpha) \sin(\beta)$, $EA = \cos(\alpha) \sin(\beta)$ und schließlich $OB = \cos(\alpha + \beta)$ sowie $AB = \sin(\alpha + \beta)$.

Die Gleichungen (1.25) und (1.26) erhält man, wenn man (1.23) und (1.24) jeweils durcheinander dividiert und entsprechend kürzt.

Aus diesen Formeln ergeben sich mit (1.7) und (1.15) sofort die Formeln für die Differenz zweier Winkel x und y

$$(1.27) \quad \sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)$$

$$(1.28) \quad \cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$$

$$(1.29) \quad \tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)}$$

$$(1.30) \quad \cot(x - y) = \frac{\cot(x) \cot(y) + 1}{\cot(y) - \cot(x)}$$

Weiterhin erhält man für $x = y$

$$(1.31) \quad \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$(1.32) \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2 \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1$$

$$(1.33) \quad \tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$(1.34) \quad \cot(2x) = \frac{1 - \tan^2(x)}{2 \tan(x)}$$

Ersetzt man hierin $2x$ durch x , so erhält man

$$(1.35) \quad \sin(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$(1.36) \quad \cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$(1.37) \quad \tan(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$(1.38) \quad \cot(x) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Aus (1.36) ergeben sich nun durch einfache Rechnung die Formeln für die Funktionen des halben Winkels

$$(1.39) \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$$

$$(1.40) \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$$

$$(1.41) \quad \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$

$$(1.42) \quad \cot\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}}$$

Aus (1.23), (1.24), (1.27) und (1.28) erhält man

$$(1.43) \quad \sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin(x) \cos(y)$$

$$(1.44) \quad \sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \cos(x) \sin(y)$$

$$(1.45) \quad \cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos(x) \cos(y)$$

$$(1.46) \quad \cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \sin(x) \sin(y)$$

Ersetzt man hierin x durch $\frac{x+y}{2}$ und y durch $\frac{x-y}{2}$, so ergeben sich folgende Formeln, in denen Summen der Winkelfunktionen durch Produkte ausgedrückt sind

$$(1.47) \quad \sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$(1.48) \quad \sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$(1.49) \quad \cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$(1.50) \quad \cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

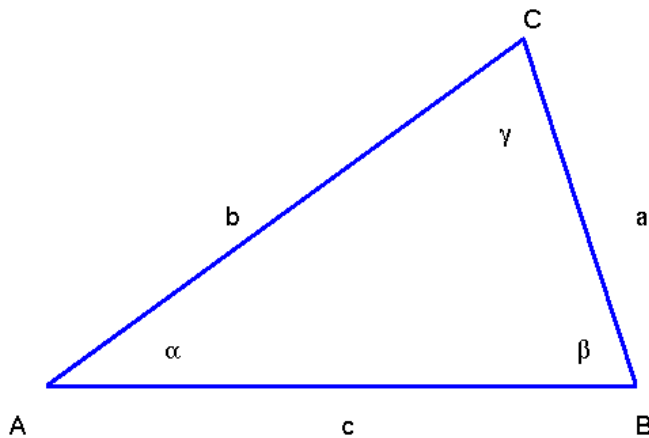
Aufgabe 5 Aus den Additionstheoremen leite man Formeln her für $\sin(3x)$, $\cos(3x)$, $\sin(4x)$, $\cos(4x)$, $\sin(5x)$ und $\cos(5x)$.

Lösung 5

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x), \\ \cos(3x) &= 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x), \\ \sin(4x) &= 4 \sin(x) \cos(x)(1 - 2 \sin^2(x)), \\ \cos(4x) &= 8 \cos^4(x) - 8 \cos^2(x) + 1, \\ \sin(5x) &= 5 \sin(x) - 20 \sin^3(x) + 16 \sin^5(x), \\ \cos(5x) &= 16 \cos^5(x) - 20 \cos^3(x) + 5 \cos(x).\end{aligned}$$

1.5 Dreiecksberechnung

Wir legen für ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$, das durch drei Punkte A , B und C gegeben ist, die nicht auf einer Gerade liegen, die folgenden Bezeichnungen fest.



Der bei A liegende Innenwinkel sei α , der bei B liegende Innenwinkel sei β , der bei C liegende Innenwinkel sei γ . Bekanntlich gilt dann für die Winkelsumme

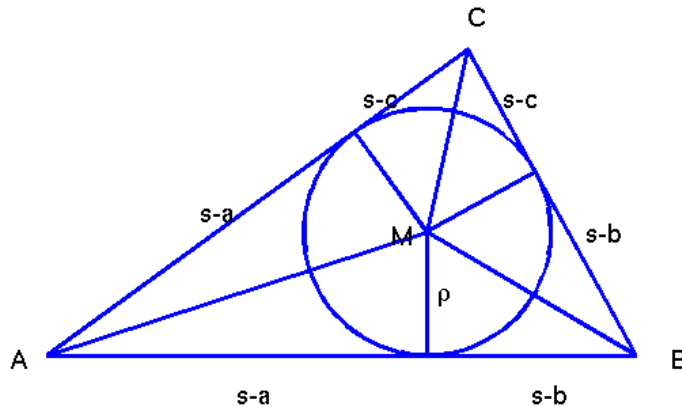
$$(1.51) \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Die A gegenüberliegende Seite von $\triangle ABC$ sei a , die B gegenüberliegende Seite sei b und die C gegenüberliegende Seite sei c . Weiterhin sei $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ der halbe Umfang von $\triangle ABC$.

Aus Symmetriegründen schneiden sich die drei Winkelhalbierenden im Mittelpunkt M_I des Inkreises dieses Dreiecks und die drei Mittelsenkrechten der Seiten im Mittelpunkt M_U des Umkreises. Wir bezeichnen mit ρ den Radius des Inkreises und mit r den Radius des Umkreises.

Zerlegt man $\triangle ABC$ in drei kleinere Dreiecke, indem man M_I mit den Punkten A , B und C verbindet, so haben diese Dreiecke jeweils die Höhe ϱ und die Grundseiten a , b und c . Daher ergibt sich für den Flächeninhalt F von $\triangle ABC$

$$(1.52) \quad F = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot \varrho = s \cdot \varrho.$$



Weiterhin liest man aus der Zeichnung für die Tangentenabschnitte die folgenden Werte ab: $s - a$ für die Tangenten von A an den Inkreis, $s - b$ für die Tangenten von B an den Inkreis und $s - c$ für die Tangenten von C an den Inkreis. Dies ergibt

$$(1.53) \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\varrho}{(s - a)}, \quad \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\varrho}{(s - b)}, \quad \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\varrho}{(s - c)}.$$

1.5.1 Berechnung rechtwinkliger Dreiecke

Wir verabreden generell $\gamma = 90^\circ$ für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$. Dann sind also α und β Komplementwinkel. Weiterhin nennt man c die *Hypotenuse* und a und b die *Katheten* des rechtwinkligen Dreiecks. Es gilt bekanntlich der *Satz des Pythagoras* (um 570 - um 505 v. Chr.)

$$(1.54) \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Die Berechnung aller Stücke a, b, c sowie α und β eines rechtwinkligen Dreiecks ist möglich, wenn zwei unabhängige Stücke (also nicht α und β) gegeben sind. Es gibt daher fünf prinzipiell mögliche Fälle.

1. Hypotenuse c und ein anliegender Winkel, etwa α , gegeben.
2. Hypotenuse c und eine Kathete, etwa a , gegeben..

3. Eine Kathete und der gegenüberliegende Winkel, etwa a und α , gegeben.
4. Eine Kathete und der anliegende Winkel, etwa a und β , gegeben.
5. Beide Katheten a und b gegeben.

Aufgabe 6 Man gebe in jedem der fünf Fälle Formeln zur Berechnung der jeweils nicht gegebenen drei Stücke an.

Lösung 6 1. $\beta = 90^\circ - \alpha$, $a = c \cdot \sin(\alpha)$, $b = c \cdot \cos(\alpha)$.

2. $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, $\beta = 90^\circ - \alpha$.

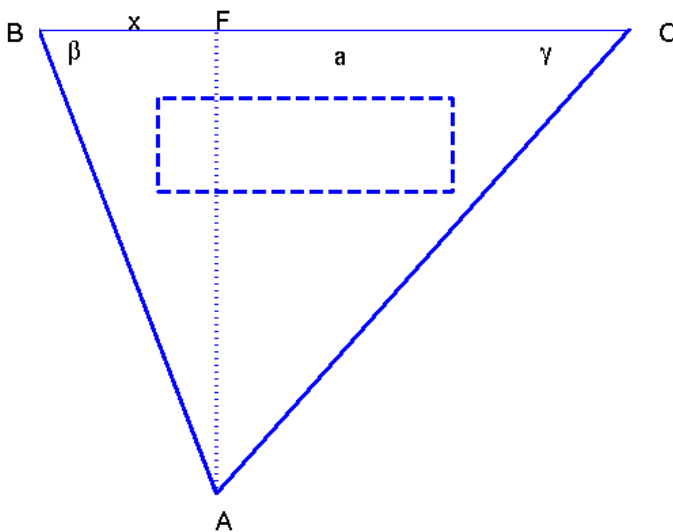
3. $\beta = 90^\circ - \alpha$, $c = \frac{a}{\sin(\alpha)}$, $b = a \cdot \cot(\alpha)$.

4. $\alpha = 90^\circ - \beta$, $c = \frac{a}{\cos(\beta)}$, $b = a \cdot \tan(\alpha)$.

5. $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$, $\beta = 90^\circ - \alpha$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

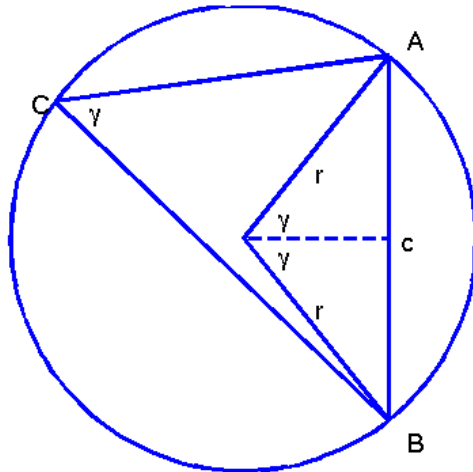
Beispiel 1 Rechter Winkel bei Sichtbehinderung Im Gelände ist von einem Punkt A auf eine Gerade g das Lot zu fällen, wenn zwischen A und g ein Sichthindernis liegt, das ein unmittelbares Bestimmen des Lotfußpunktes F unmöglich macht.

Zur Lösung wird auf der Geraden eine Strecke BC bekannter Länge a abgesteckt, so daß von B und C aus der Punkt A sichtbar ist. Dort werden die Winkel β und γ gemessen. Zu berechnen ist nun etwa die Entfernung x von F zu B .



Aus $AF = x \cdot \tan(\beta)$ und $AF = (a - x) \cdot \tan(\gamma)$ erhält man

$$x = \frac{a \tan(\gamma)}{\tan(\beta) + \tan(\gamma)}.$$



Beispiel 2 Sehnenlänge Man gebe in einem Kreis mit Radius r die Länge c der Sehne zwischen zwei Punkten A und B auf dem Kreis als Funktion des Umfangswinkels γ bzw. des Zentriwinkels 2γ an.

Es ist offensichtlich $\frac{c}{2} = r \cdot \sin(\gamma)$, also $c = 2r \cdot \sin(\gamma)$, vgl. (1.22) in Bemerkung 1.

Da für ein gleichseitiges Dreieck ($a = b = c$) aus Symmetriegründen auch alle Winkel gleich sein müssen, woraus mit (1.51) $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$ folgt, ist solch ein Dreieck durch die Angabe der Seitenlänge eindeutig bestimmt und nichts zu berechnen.

Aufgabe 7 Durch welche Stücke ist ein gleichschenkliges Dreieck ($a = b$) und speziell ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck eindeutig bestimmt?

Lösung 7 Gleichschenkliges Dreieck: Ist mindestens ein Winkel gegeben, so sind dadurch wegen $\alpha = \beta$ und damit $2\alpha + \gamma = \pi$ alle Winkel eindeutig bestimmt.

Wegen

$$\frac{c}{2} = a \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

ist daher das Dreieck durch zwei Seiten, etwa $a(= b)$ und c , oder durch einen Winkel und eine Seite, etwa $a(= b)$ oder c , eindeutig bestimmt.

Gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck: Es sind von vorn herein alle drei Winkel bekannt, nämlich $\gamma = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$. Weiterhin folgt aus dem Satz des Pythagoras und $a = b$ sofort $c = a\sqrt{2}$. Daher ist zur Bestimmung die Angabe von genau einer Seite notwendig.

1.5.2 Berechnung beliebiger Dreiecke

Aus Beispiel 2 erhält man $\frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$ und daraus durch zyklisches Vertauschen der Seiten und Winkel des Dreiecks $\triangle ABC$ den **Sinussatz** für beliebige Dreiecke:

$$(1.55) \quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r.$$

Insbesondere läßt sich hieraus der Umkreisradius eines beliebigen Dreiecks berechnen, wenn die anderen Stücke bekannt sind.

Aus dem Sinussatz erhält man unter anderem

$$(1.56) \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$

und hieraus weiter

$$(1.57) \quad \frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} - 1}{\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} + 1}$$

und nach Erweitern mit b bzw. $\sin(\beta)$

$$(1.58) \quad \frac{a - b}{a + b} = \frac{\sin(\alpha) - \sin(\beta)}{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}$$

Dies ergibt mit (1.48) und (1.47)

$$(1.59) \quad \frac{a - b}{a + b} = \frac{2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}$$

und schließlich den **Tangenssatz**

$$(1.60) \quad \frac{a - b}{a + b} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}$$

oder

$$(1.61) \quad \tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{a - b}{a + b} \tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

Sind also a, b und γ gegeben, so kann man hieraus wegen $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{180^\circ - \gamma}{2}$ sofort $\frac{\alpha - \beta}{2}$ und dann α und β bestimmen.

Ein weiterer wichtiger Satz der ebenen Trigonometrie ist der **Cosinussatz**:

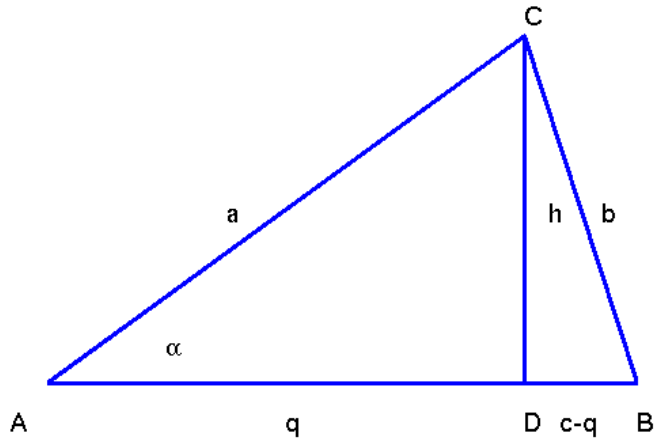
Satz 3 *In jedem Dreieck gelten zwischen den Seiten a, b und c und ihren Gegenwinkeln α, β und γ die Beziehungen*

$$(1.62) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$(1.63) \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos(\beta)$$

$$(1.64) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

Sein Beweis ergibt sich aus der folgenden Skizze (zunächst nur für spitze Winkel α ; er läßt sich jedoch mit analogen Überlegungen auch für stumpfe Winkel zeigen).



Man liest unmittelbar $h = b \sin(\alpha)$ und $q = b \cos(\alpha)$ ab. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $a^2 = h^2 + (c - q)^2$, woraus man durch Einsetzen und Umformen leicht (1.62) herleitet.

Aus dem Cosinussatz und (1.40) erhält man

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b + c - a)(b + c + a)}{4bc}},$$

also

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s - a)s}{bc}},$$

und analog mit (1.39)

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}}.$$

Dividiert man beide Gleichungen durcheinander, so erhält man den **Halbwinkelsatz**

Satz 4 Bezeichnet $s = \frac{a+b+c}{2}$ den halben Umfang eines beliebigen Dreiecks, so gilt für die Winkel α , β und γ

$$(1.65) \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}}$$

$$(1.66) \quad \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s - c)(s - a)}{s(s - b)}}$$

$$(1.67) \quad \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

Mit (1.53) ergibt sich hieraus für den Inkreisradius

$$(1.68) \quad \varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

und daher nach (1.52) für den Flächeninhalt die *Heron'sche Formel* (Heron von Alexandria, um 60 n. Chr.)

$$(1.69) \quad F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Mit der Sinusfunktion kann man die Höhen im Dreieck aber auch direkt berechnen und erhält so für die Fläche

$$(1.70) \quad F = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha) = \frac{1}{2}ca \sin(\beta) = \frac{1}{2}ab \sin(\gamma).$$

Mit dem Sinussatz (1.60) kann man einerseits die Winkel eliminieren und erhält so

$$(1.71) \quad F = \frac{abc}{4r}.$$

Andererseits kann man gemäß $a = 2r \sin(\alpha)$, $b = 2r \sin(\beta)$, $c = 2r \sin(\gamma)$ auch die Dreiecksseiten eliminieren und erhält zunächst

$$(1.72) \quad F = 2r^2 \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma)$$

und weiter mit $r = \frac{a}{2 \sin(\alpha)} = \frac{b}{2 \sin(\beta)} = \frac{c}{2 \sin(\gamma)}$

$$(1.73) \quad F = a^2 \frac{\sin(\beta) \sin(\gamma)}{2 \sin(\alpha)} = b^2 \frac{\sin(\alpha) \sin(\gamma)}{2 \sin(\beta)} = c^2 \frac{\sin(\alpha) \sin(\beta)}{2 \sin(\gamma)}.$$

Schließlich ergibt sich aus (1.69) und (1.71) der Umkreisradius als Funktion der Dreiecksseiten

$$(1.74) \quad r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Bemerkung 2 Der erste Beweis des Sinussatzes stammt von dem arabischen Mathematiker Abu Nasr (um 1000 n. Chr.), weitere Beweise vom persischen Astronomen Nasir al-Din Tusi (1201 - 1274), dessen Werk *Über die Figur der Schneidenden* zum erstenmal die Trigonometrie als selbständige Wissenschaft darstellt. Auch den Cosinussatz hat ein persischer Astronom, Al Biruni, erstmals (1036) ausgesprochen. In der geometrischen Form des allgemeinen pythagoräischen Satzes war er allerdings schon griechischen Mathematikern bekannt.

Auf das Werk des Nasir al-Din Tusi stützte sich der deutsche Mathematiker *Regiomontanus*, eigentlich Johannes Müller, (1436 - 1476) aus Königsberg in Franken. Sein Buch *De triangulis omnimodis* wurde grundlegend für die Entwicklung der Trigonometrie in Europa. Von den zahlreichen Mathematikern, die bei der Ausgestaltung der Trigonometrie mitwirkten sind besonders Francois Vieta (1540 - 1603) und Leonhard Euler (1707 - 1783) zu nennen. Der erste sprach den Cosinussatz allgemein aus und stellte die Dreiecksberechnung systematisch dar, der zweite dehnte die Winkelfunktionen auf beliebige Winkel aus und gab der Trigonometrie mit Hilfe der modernen Formelsprache ihre heutige Form.

Die Methode der Triangulierung (lat. *angulum* = Winkel), d. h. der praktischen Trigonometrie in der Landvermessung, geht auf den Leidener Professor Willebrod Snellius (1580 - 1626) zurück, ebenso das unten geschilderte Verfahren des Rückwärtseinschneidens. In Deutschland wurde die erste Landesvermessung von Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) im Jahr 1821 in Hannover durchgeführt.

Mit den oben bereitgestellten Hilfsmitteln können jetzt sämtliche ebenen Dreiecke berechnet werden. Je nachdem, welche Stücke gegeben sind, hat man genau einen der folgenden vier möglichen Fälle zu betrachten.

1. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind gegeben (sws).
2. Drei Seiten sind gegeben (sss).
3. Eine Seite und zwei (also alle) Winkel sind gegeben (sww).
4. Zwei Seiten und ein Winkel, der einer von ihnen gegenüberliegt, sind gegeben (ssw).

Aufgabe 8 Man gebe in jedem der vier Fälle Formeln zur Berechnung der jeweils nicht gegebenen drei Stücke an.

Lösung 8 1. Gegeben seien etwa $a < c$ und β . Wegen

$$\frac{\gamma + \alpha}{2} = \frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

ergibt der Tangenssatz

$$\tan\left(\frac{\gamma - \alpha}{2}\right) = \frac{c - a}{c + a} \cot\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

Hierdurch sind α und γ eindeutig bestimmt, woraus mit dem Sinussatz noch

$$b = \frac{a \sin(\beta)}{\sin(\alpha)}$$

folgt.

Eine andere Berechnung ergibt sich aus dem Cosinussatz

$$b = \sqrt{c^2 + a^2 - 2ca \cos(\beta)}$$

und dem Sinussatz

$$\sin(\alpha) = \frac{a \sin(\beta)}{b}$$

(man beachte $a < c \implies \alpha < \gamma$, also insbesondere $\alpha < 90^\circ$) sowie $\gamma = \pi - \alpha - \beta$.

2. Mit $s = \frac{a+b+c}{2}$ ergeben sich die Winkel eindeutig aus den Formeln (1.65) - (1.67) des Halbwinkelsatzes. Benennt man die drei Seiten so, daß $a < b < c$ gilt, so sind α und β spitze Winkel und ergeben sich ebenfalls eindeutig aus dem Cosinussatz

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

und dem Sinussatz

$$\sin(\beta) = \frac{b \sin(\alpha)}{a}.$$

Hieraus erhält man eindeutig $\gamma = \pi - \alpha - \beta$.

3. Gegeben seien etwa c , α , β und $\gamma = \pi - \alpha - \beta$. Der Sinussatz ergibt in eindeutiger Weise

$$a = \frac{c \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \quad \text{und} \quad b = \frac{c \sin(\beta)}{\sin(\gamma)}.$$

4. 1. Fall: Der gegebene Winkel liegt der größeren Seite gegenüber.

Gegeben seien etwa c , γ und $a < c$. Der Sinussatz liefert

$$\sin(\alpha) = \frac{a \sin(\gamma)}{c},$$

woraus sich wegen $a < c \implies \alpha < \gamma$ genau ein zulässiger Wert für α ergibt. Hieraus erhält man $\beta = \pi - \gamma - \alpha$ und wiederum nach dem Sinussatz schließlich

$$b = \frac{c \sin(\beta)}{\sin(\gamma)}.$$

2. Fall: Der gegebene Winkel liegt der kleineren Seite gegenüber.

Gegeben seien etwa $a < c$ und α . Nach dem Sinussatz gilt

$$\sin(\gamma) = \frac{c \sin(\alpha)}{a},$$

$$\beta = \pi - \alpha - \gamma \text{ und}$$

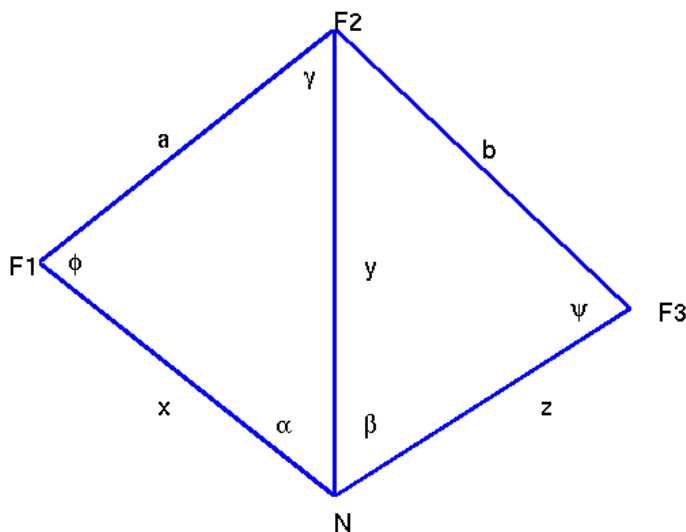
$$b = \frac{c \sin(\beta)}{\sin(\gamma)}.$$

Aus der ersten Gleichung ergeben sich im allgemeinen zwei Lösungen für γ , also auch zwei für β und b . Es gibt dann also zwei Lösungsdreiecke. Sie fallen genau dann zusammen, wenn es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt.

1.5.3 Praktische Beispiele

Beispiel 3 Rückwärtseinschneiden Von drei Festpunkten F_1 , F_2 und F_3 mit bekannten Koordinaten sind durch Winkelmessung und anschließende Berechnung die Koordinaten eines Neupunktes N zu bestimmen. Eine Winkelmessung ist nur im Neupunkt möglich.

Diese Aufgabe wird auch als Snelliussche Aufgabe bezeichnet, denn Snellius löste diese Aufgabe erstmals 1617. Diese Lösung geriet jedoch in Vergessenheit. Daher wird sie auch Snellius-Pothenotsche Aufgabe genannt, da Pothenot (? - 1732), Professor am College Royal de France, seine neue Lösung 1692 der Pariser Akademie vorlegte.



Bekannt sind also $F_1F_2 = a$, $F_2F_3 = b$ und $\angle(F_1F_2F_3) = \gamma$. Gemessen werden $\angle(F_1NF_2) = \alpha$ und $\angle(F_2NF_3) = \beta$. Gesucht sind $NF_1 = x$, $NF_2 = y$, $NF_3 = z$, $\angle(NF_1F_2) = \varphi$ und $\angle(NF_3F_2) = \psi$.

Der Sinussatz liefert

$$\frac{y}{a} = \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\alpha)} \quad \text{und} \quad \frac{y}{b} = \frac{\sin(\psi)}{\sin(\beta)}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\sin(\psi)}{\sin(\varphi)} = \frac{a \sin(\beta)}{b \sin(\alpha)} = \frac{a'}{b'}$$

Der Beweis des Tangenssatzes (1.56) ff. liefert

$$\tan\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right) = \frac{a' - b'}{a' + b'} \tan\left(\frac{\psi + \varphi}{2}\right).$$

Wegen $\psi + \varphi = 2 \cdot 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma$ kann man hieraus $\frac{\psi - \varphi}{2}$ berechnen und somit ψ und φ . Mit dem Sinussatz ergeben sich dann

$$x = a \frac{\sin(180^\circ - \varphi - \alpha)}{\sin(\alpha)}, \quad y = a \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\alpha)}, \quad z = b \frac{\sin(180^\circ - \psi - \beta)}{\sin(\beta)}.$$

Bemerkung 3 Das Verfahren versagt, wenn $\psi + \varphi = 180^\circ$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ist. Dann gilt nämlich $a' = b'$ und $\tan\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right)$ ist der unbestimmte Ausdruck $0 \cdot \infty$.

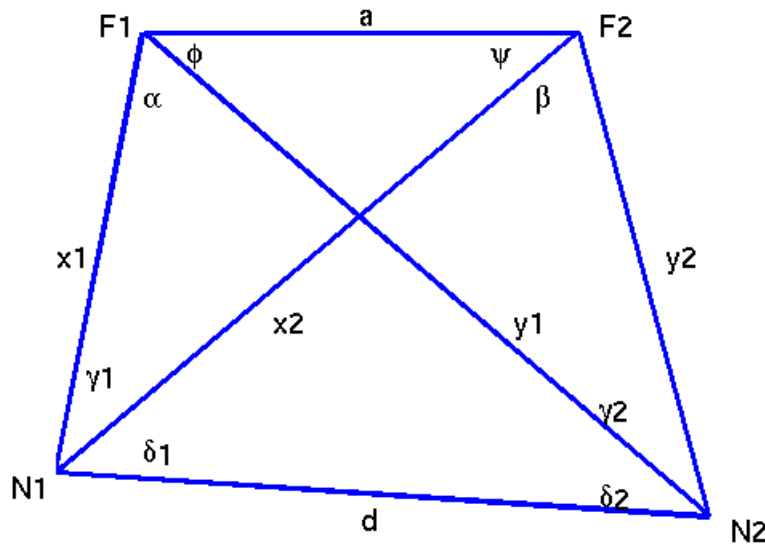
In der Praxis bestimmt man N im allgemeinen durch Rückwärtseinschneiden nach mehr als drei Punkten und Ausgleichsrechnung.

Aufgabe 9 Konkrete Zahlenwerte: Bekannt seien $a = 625.30$, $b = 418.40$ und $\gamma = 152.62^\circ$, gemessen werden $\alpha = 47.43^\circ$, $\beta = 38.89^\circ$.

Lösung 9 $\varphi + \psi = 121.06^\circ$, $\frac{\psi - \varphi}{2} = 12.04^\circ$, $\varphi = 48.49^\circ$, $\psi = 72.57^\circ$, $x = 844.54$, $y = 635.82$, $z = 620.22$.

Beispiel 4 Die Hansensche Aufgabe Bei dieser Aufgabe geht es um die Bestimmung der Entfernung zwischen zwei Neupunkten N_1 und N_2 durch Rückwärtseinschneiden nach zwei unzugänglichen Festpunkten F_1 und F_2 bekannten Abstandes. Eine Winkelmessung ist nur in den Neupunkten möglich. Man spricht daher auch von der "Einschaltung eines Doppelpunktes".

Obwohl diese Aufgabe ebenfalls bereits durch Snellius erstmals 1617 gelöst wurde, wird sie zur Unterscheidung vom Rückwärtseinschneiden nach drei Punkten nach dem Astronomen und Geodäten Peter Andreas Hansen (1795 - 1874) benannt, der die Aufgabe 1841 mit allgemeinen Formeln gelöst und auf ihre Wichtigkeit hingewiesen hat.



Bekannt sind also $F_1F_2 = a$, $\angle(F_1N_1F_2) = \gamma_1$, $\angle(F_1N_2F_2) = \gamma_2$, $\angle(F_2N_1N_2) = \delta_1$ und $\angle(F_1N_2N_1) = \delta_2$, also auch $\angle(N_1F_1N_2) = \alpha$ und $\angle(N_1F_2N_2) = \beta$.

Aus dem Sinussatz folgt

$$\frac{a}{y_2} = \frac{\sin(\gamma_2)}{\sin(\varphi)} \quad \text{und} \quad \frac{y_2}{d} = \frac{\sin(\delta_1)}{\sin(\beta)}$$

also

$$\frac{a}{d} = \frac{\sin(\gamma_2) \sin(\delta_1)}{\sin(\varphi) \sin(\beta)}.$$

Analog folgt

$$\frac{a}{d} = \frac{\sin(\gamma_1) \sin(\delta_2)}{\sin(\psi) \sin(\alpha)}.$$

Hieraus erhält man

$$\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\psi)} = \frac{\sin(\alpha) \sin(\gamma_2) \sin(\delta_1)}{\sin(\beta) \sin(\gamma_1) \sin(\delta_2)} = \frac{a'}{b'}.$$

Der Beweis des Tangenssatzes (1.56) ff. liefert nun

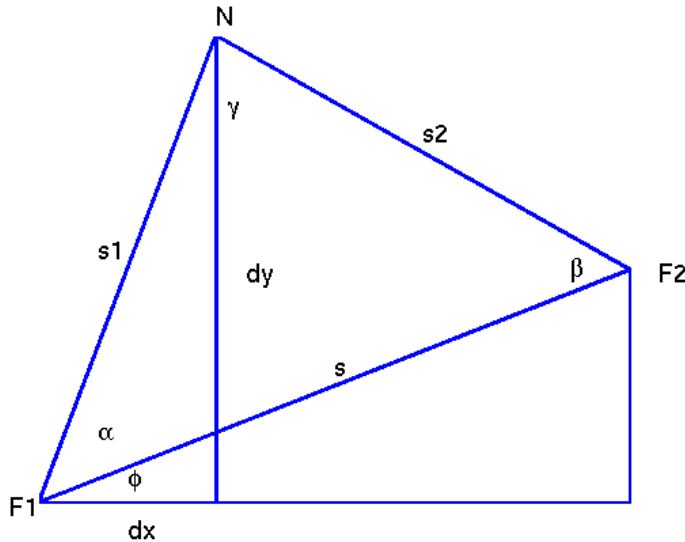
$$\tan\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right) = \frac{a' - b'}{a' + b'} \tan\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right).$$

Wegen $\varphi + \psi = \delta_1 + \delta_2$ kann man hieraus φ und ψ berechnen. Damit erhält man

$$d = a \frac{\sin(\varphi) \sin(\beta)}{\sin(\gamma_2) \sin(\delta_1)} = a \frac{\sin(\psi) \sin(\alpha)}{\sin(\gamma_1) \sin(\delta_2)}.$$

Die Stücke x_1, x_2, y_1 und y_2 liefert dann jeweils der Sinussatz.

Beispiel 5 Vorwärtseinschneiden Von zwei Festpunkten F_1 und F_2 mit bekannten Koordinaten bzw. Abstand sind durch Winkelmessung und anschließende Berechnung die Koordinaten bzw. die Abstände zu einem Neupunkt N zu bestimmen. Eine Winkelmessung ist dabei nur in den Festpunkten möglich.



Zunächst bestimmt man, falls nicht gegeben, den Abstand s von F_1 und F_2 gemäß $s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Nun ergeben sich die anderen Seiten des Dreiecks $\triangle NF_1F_2$ aus dem Sinussatz zu $s_1 = s \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$ und $s_2 = s \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$.

Der Hilfswinkel φ muß $\sin(\varphi) = (y_2 - y_1)/s$ erfüllen, wobei $y_2 > y_1$ angenommen wird. Sonst sind die Rollen von F_1 und F_2 zu vertauschen.

Hieraus erhält man schließlich $dx = s_1 \cdot \cos(\alpha + \varphi)$ und $dy = s_1 \cdot \sin(\alpha + \varphi)$ und somit die Koordinaten x und y von N . (Bei vertauschten Rollen von F_1 und F_2 erhält man entsprechend $dx = s_2 \cdot \cos(\beta + \varphi)$ und $dy = s_2 \cdot \sin(\beta + \varphi)$.)

Aufgabe 10 Konkrete Zahlenwerte: $x_1 = 24950.98$, $y_1 = 11619.35$, $x_2 = 25616.57$, $y_2 = 10664.92$, $\alpha = 61^\circ 13' 33''$, $\beta = 31^\circ 27' 45''$.

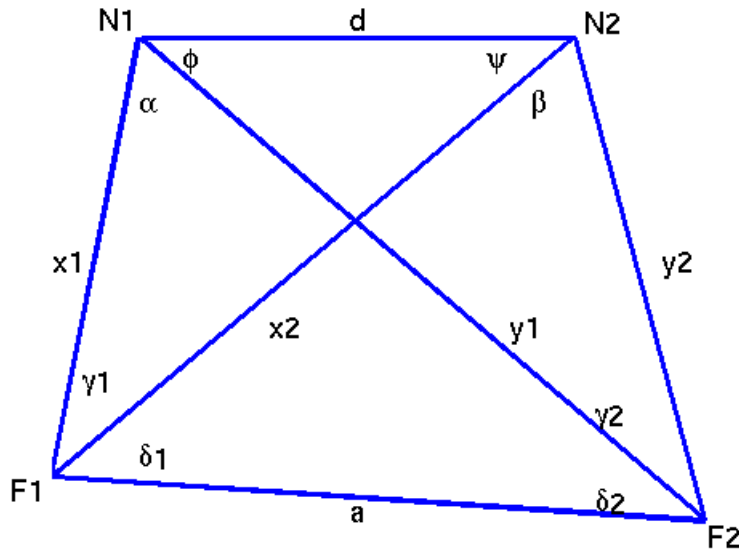
Lösung 10 $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 87^\circ 18' 42''$, $\varphi = -55.109272^\circ$, $s = 1163.59$, $s_1 = 607.99$, $s_2 = 1021.04$, $dy = 1019.21$, $dx = 61.06$, $x = 25555.51$, $y = 11684.13$.

Bemerkung 4 Seitwärtseinschneiden Das Problem ist dasselbe wie beim Vorwärtseinschneiden, jedoch ist die Winkelmessung nur in einem Festpunkt und im Neupunkt möglich.

Beispiel 6 Bestimmung einer unzugänglichen Entfernung Um die Entfernung d zwischen zwei nicht zugänglichen Punkten N_1 und N_2 zu bestimmen, werden diese Punkte von den Endpunkten F_1 und F_2 einer zugänglichen Standlinie der Länge a aus angepeilt. Dabei werden die Winkel $\angle(N_2F_1N_1) = \gamma_1$,

1.5. DREIECKSBERECHNUNG KAPITEL 1. EBENE TRIGONOMETRIE

$\angle(F_2F_1N_2) = \delta_1$, $\angle(N_1F_2F_1) = \delta_2$ und $\angle(N_2F_2N_1) = \gamma_2$ gemessen, wodurch auch die Winkel $\angle(F_1N_1F_2) = \alpha$ und $\angle(F_1N_2F_2) = \beta$ bestimmt sind. Die zunächst noch unbekannt Winkel bei N_1 und N_2 seien $\angle(F_2N_1N_2) = \varphi$ und $\angle(N_1N_2F_1) = \psi$.



Analog zum Vorgehen bei der Hansenschen Aufgabe liefert der Sinussatz in geeigneten Dreiecken

$$\frac{d}{y_2} = \frac{\sin(\gamma_2)}{\sin(\varphi)} \quad \text{und} \quad \frac{y_2}{a} = \frac{\sin(\delta_1)}{\sin(\beta)}$$

sowie

$$\frac{d}{x_1} = \frac{\sin(\gamma_1)}{\sin(\psi)} \quad \text{und} \quad \frac{x_1}{a} = \frac{\sin(\delta_2)}{\sin(\alpha)}$$

Durch Gleichsetzen und Umformen erhält man

$$\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\psi)} = \frac{\sin(\alpha) \sin(\gamma_2) \sin(\delta_1)}{\sin(\beta) \sin(\gamma_1) \sin(\delta_2)} = \frac{a'}{b'}$$

Wiederum zeigt der Beweis des Tangenssatzes (1.56) ff.

$$\tan\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right) = \frac{a' - b'}{a' + b'} \tan\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right).$$

Da auch $\varphi + \psi = \delta_1 + \delta_2$ gilt, lassen sich φ und ψ hieraus berechnen. Damit ergibt sich die gesuchte Entfernung zu

$$d = a \frac{\sin(\gamma_2) \sin(\delta_1)}{\sin(\varphi) \sin(\beta)} = a \frac{\sin(\gamma_1) \sin(\delta_2)}{\sin(\psi) \sin(\alpha)}.$$

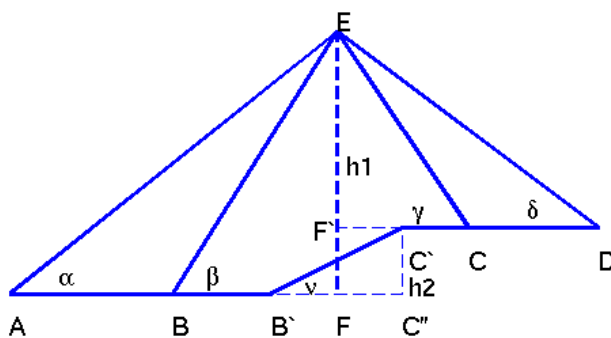
Aufgabe 11 Konkrete Zahlenwerte: $a = 311.16$, $\alpha = 58.41^\circ$, $\beta = 18.99^\circ$, $\gamma = 78.98^\circ$, $\delta = 28.29^\circ$.

Lösung 11 $\varphi + \psi = \beta + \delta = 47.28^\circ$, $\varphi = 21.51^\circ$, $\psi = 25.77^\circ$, $d = 215.75$.

Aufgabe 12 Um die Breite eines Flusses zu bestimmen, wird parallel zum Ufer eine Standlinie $AB = 311.47 \text{ m}$ abgesteckt und eine unmittelbar am anderen Ufer stehende Landmarke C anvisiert. Die Winkel zwischen der Basis und der Richtung zur Landmarke sind $\angle(BAC) = \alpha = 109^\circ 25' 16''$ und $\angle(ABC) = \beta = 43^\circ 45' 20''$. Wie breit ist der Fluß wenn die Standlinie 8.12 m vom Ufer entfernt ist?

Aufgabe 13 Für die Projektierung einer Brücke benötigt man die Breite eines Flusses. Da die Genauigkeit der vorhandenen Kartenunterlagen nicht ausreicht, soll die Strecke $AB = x$ durch indirekte Messung bestimmt werden. Zu diesem Zweck mißt man wegen Sichtbehinderung an dem einen Ufer zwei Standlinien $AC = a = 46.22 \text{ m}$ und $AD = b = 53.77 \text{ m}$ sowie die Winkel $\angle(BCA) = \alpha = 95^\circ 29' 58''$, $\angle(ADB) = \beta = 68^\circ 37' 29''$ und $\angle(CAD) = \gamma = 145^\circ 51' 25''$.

Aufgabe 14 Vor dem Bau eines Tunnels sollen seine Länge $x = B'C'$ und seine Neigung ν bestimmt werden. Zu diesem Zweck steckt man beiderseits des Berges zwei horizontale Standlinien $AB = 262.71 \text{ m}$ und $CD = 380.50 \text{ m}$ ab, die mit der Bergspitze E sowie mit dem Tunneleingang B' und dem Tunnelausgang C' in einer Vertikalebene liegen. Ferner mißt man die horizontalen Strecken $BB' = 144.20 \text{ m}$ und $CC' = 79.33 \text{ m}$. Dabei sind B und C so gewählt, daß von ihnen aus das auf der Bergspitze aufgestellte Signal E sichtbar ist. In A, B, C und D werden die Höhenwinkel $\alpha = 28^\circ 58'$, $\beta = 40^\circ 30'$, $\gamma = 58^\circ 50'$ und $\delta = 32^\circ 20'$ gemessen.



Aufgabe 15 Ein Vermessungsschiff hat einen Teil der Ostseeküste zu vermessen. Da das Dreieck $\triangle ABC$ zur Bestimmung der Strecke $x = BC$ aus der bekannten

1.5. DREIECKSBERECHNUNG KAPITEL 1. EBENE TRIGONOMETRIE

Basis $AC = a = 2966.80 \text{ m}$ zu stumpf ist, wählt man den Großmast M des Schiffes als Hilfspunkt und mißt in den Küstenstationen A, B und C zur gleichen Zeit die Winkel $\alpha = \angle(MAC) = 30^\circ 17' 40''$, $\beta = \angle(ACM) = 95^\circ 53'$, $\gamma = \angle(MCB) = 89^\circ 41' 10''$ und $\delta = \angle(MBC) = 51^\circ 24' 20''$. Nachträglich wird festgestellt, daß die Messung von δ um 15 Minuten zu spät erfolgt war. In dieser Zeit war das Schiff durch Windeinwirkung um 13 m in Richtung der Verlängerung von CM abgetrieben worden. Man berechne x .

Kapitel 2

Sphärische Trigonometrie

2.1 Geometrie der Kugel

Die *Kugel(oberfläche)* ist der geometrische (grch. *ge* = Erde) Ort aller Punkte P des Raumes, die von einem gegebenen Punkt O , dem *Mittelpunkt* der Kugel, einen bestimmten Abstand $R > 0$, den *Radius* der Kugel, besitzen. Legt man den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems in den Mittelpunkt der Kugel, dann gilt für die Koordinaten (x, y, z) eines beliebigen Punktes P der Kugeloberfläche die Gleichung

$$(2.1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Für das Volumen einer Kugel vom Radius R gilt

$$(2.2) \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

für ihre Oberfläche

$$(2.3) \quad O = 4\pi R^2.$$

Aufgabe 16 Welches Volumen hätte ein kugelförmiger Kleinplanet mit derselben Oberfläche wie der Erdkontinent Europa (ca. 10 000 000 km^2)?

Lösung 12 $V = 2973\,500\,000\,km^3$ bei $R = 892.0621\,km$.

Eine Ebene, die mit einer Kugel überhaupt einen Punkt gemeinsam hat, schneidet diese in einem Kreis vom Radius r mit $0 \leq r \leq R$. Legt man nämlich das kartesische Koordinatensystem so in den Mittelpunkt der Kugel, daß der Einheitsvektor in z -Richtung Normaleneinheitsvektor der Ebene ist, so lautet die Hessesche Normalform (Ludwig Otto Hesse, 1811 - 1874) der Ebenengleichung

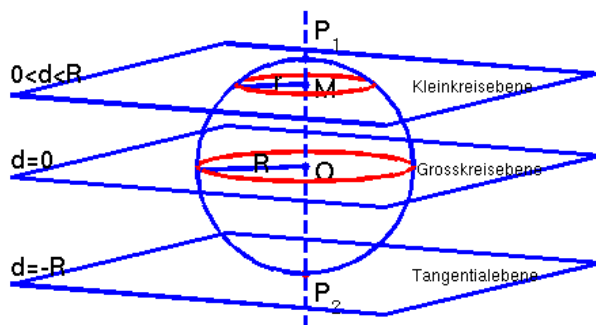
$$(2.4) \quad z = d$$

2.1. GEOMETRIE DER KUGEL KAPITEL 2. SPHÄRISCHE TRIGONOMETRIE

und eine derartige Ebene schneidet die Kugel vom Radius R genau für $-R \leq d \leq R$. Durch Einsetzen von (2.4) in (2.1) erhält man für die Schnittfigur die Gleichung

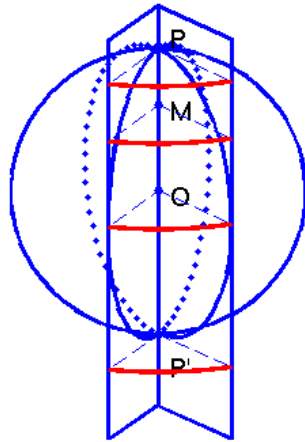
$$x^2 + y^2 = R^2 - d^2 = r^2,$$

also den behaupteten Kreis.



Genau für $r = R$ geht die Ebene durch den Kugelmittelpunkt O und man nennt den Schnittkreis einen *Grosskreis* der Kugel. (Alle Längengrade auf der Erdkugel sind Grosskreise, dagegen ist der Äquator der einzige Breitenkreis der ebenfalls ein Grosskreis ist.) In allen anderen Fällen entsteht ein *Kleinkreis* (oder ein Punkt). In jedem Fall steht die Gerade durch O und den Mittelpunkt M des Schnittkreises senkrecht auf der Ebene. Im Fall $r = 0$ hat die Ebene genau einen Punkt P mit der Kugeloberfläche gemeinsam, sie berührt diese also in P , und man nennt sie daher eine *Tangentialebene* an die Kugel.

Eine Gerade, die durch den Mittelpunkt einer Kugel verläuft, schneidet diese in genau zwei Punkten. Derartige Punkte P und P' heißen *Gegenpunkte*. Zwei verschiedene Grosskreise einer Kugel schneiden einander in zwei Gegenpunkten, denn die zugehörigen verschiedenen Ebenen der Grosskreise gehen beide durch den Kugelmittelpunkt und daher liegt dieser auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen. Der Winkel zwischen diesen Grosskreisen ist der zwischen ihren zugehörigen Ebenen und gleich dem Winkel zwischen den Tangenten an die Kreise in den Punkten P oder P' .



Zwei Punkte A und B einer Kugel, die keine Gegenpunkte sind, bestimmen (gemeinsam mit dem Kugelmittelpunkt eine Ebene und daher) genau einen Großkreis, auf dem sie liegen. Den kürzeren der beiden Großkreisbögen von A nach B bezeichnet man als *sphärischen Abstand* \widehat{AB} von A und B . Für Gegenpunkte A und B legt man ihren sphärischen Abstand zu einem halben Kugelumfang, also zu $\widehat{AB} = \pi R$, fest. Ist ganz allgemein a der im Bogenmaß gemessene *Zentriwinkel* $\angle(AOB)$, so gilt

$$(2.5) \quad \widehat{AB} = a \cdot R.$$

Wegen dieser Beziehung gibt man, speziell wenn der Kugelradius nicht interessiert oder unbekannt ist, den sphärischen Abstand auch als Winkel im Bogenmaß an.

Bemerkung 5 Man kann (mit Mitteln der Differentialgeometrie) zeigen, daß der sphärische Abstand zwischen zwei Punkten auf einer Kugeloberfläche tatsächlich der kürzeste Abstand zwischen A und B auf der Kugeloberfläche ist. Daher sind die Großkreise genau die geodätischen Linien in der Kugelgeometrie, entsprechen also den Geraden in der ebenen Geometrie. Da sich zwei Großkreise aber stets in zwei Gegenpunkten schneiden, gibt es in der Kugelgeometrie keine Parallelen. Es handelt sich um eine *nichteuklidische Geometrie* (Euklid, um 365 - um 300 v. Chr.).

Aufgabe 17 Wie weit (in m) sind zwei Orte auf der Erdoberfläche voneinander entfernt, die den sphärischen Abstand 90° besitzen?

Lösung 13 Ungefähr 10 000 000 m !

Definiert man einen (*sphärischen*) *Kreis* auf der Kugel als den geometrischen Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt auf der Kugeloberfläche einen

festen sphärischen Abstand haben, so erhält man gewöhnliche Kreise (im Raum). So sind etwa die Breitenkreise auf der Erdoberfläche solche sphärischen Kreise mit dem Nordpol (aber auch gleichzeitig dem Südpol) als “Mittelpunkt”. Die beiden Zentriwinkel sind dann jeweils Supplementwinkel.

Die *Polare* eines Punktes P der Kugel ist der geometrische Ort aller Punkte der Kugeloberfläche, die zu P (und damit auch zu seinem Gegenpunkt P') den sphärischen Abstand $\frac{\pi}{2}$ haben. Die Polare ist stets ein Großkreis und man bezeichnet P und P' als *Pole* dieses Großkreises. Durchläuft man den Großkreis außen auf der Kugel, so bezeichnet man den links liegenden Pol als *Linkspol* und seinen Gegenpunkt als *Rechtspol*. Zu den Erdpolen ist beispielsweise der Erdäquator die Polare. Durchläuft man ihn von Westen nach Osten, so ist der geographische Nordpol der Linkspol.

Der zwischen zwei parallelen Ebenen liegende Teil einer Kugel heißt *Kugelschicht*, der gekrümmte Teil seiner Oberfläche heißt *Kugelzone*. Der Abstand h der Ebenen heißt *Höhe* der Kugelschicht. Ist die vom Kugelmittelpunkt entferntere Ebene eine Tangentialebene, so spricht man statt von einer Kugelschicht von einem *Kugelabschnitt* oder *Kugelsegment* und statt von einer Kugelzone von einer *Kugelkappe*. Durch einen Kreiskegel, dessen Spitze im Kugelmittelpunkt liegt, wird aus einer Kugel ein *Kugelausschnitt* oder *Kugelsektor* ausgeschnitten.

Es gelten die folgenden Aussagen:

Satz 5 a) Die Fläche F einer Kugelzone (Kugelkappe) der Höhe h ist

$$(2.6) \quad F = 2\pi Rh.$$

b) Das Volumen V des Kugelabschnitts ist

$$(2.7) \quad V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h).$$

c) Das Volumen V des Kugelausschnitts ist

$$(2.8) \quad V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

2.2 Kugelzweiecke

Wie oben schon bemerkt, schneiden sich zwei Großkreise einer Kugel stets in zwei Gegenpunkten. Sie teilen einander dort in jeweils zwei Halbkreise. Je zwei dieser Halbkreise begrenzen ein *Kugelzweieck*. Es ist vollständig bestimmt durch den Winkel α , den die beiden Ebenen der Halbkreise miteinander bilden, denn die sphärische Länge der Zweiecksseiten beträgt im Bogenmaß jeweils π .

Ist O die Kugeloberfläche, so gilt für den Flächeninhalt F eines Kugelzweiecks mit dem Winkel α offensichtlich $F : O = \alpha : 2\pi$, also gemäß (2.3)

$$(2.9) \quad F = 2\alpha R^2.$$

2.3 Kugeldreiecke

Drei Punkte A , B und C einer Kugeloberfläche lassen sich jeweils durch (die kürzeren) Großkreisbögen a von B nach C , b von A nach C und c von A nach B miteinander verbinden und bestimmen so ein *Kugeldreieck* oder *sphärisches Dreieck*. Unter den Winkeln α , β und γ des Kugeldreiecks versteht man die Winkel zwischen den jeweiligen Großkreis(eben)en, wobei die Benennung wie beim ebenen Dreieck erfolgt. Die Seiten werden jedoch anders als in der ebenen Trigonometrie durch die zugehörigen Zentriwinkel im Bogen- oder Gradmaß gemessen. Die drei Großkreise durch die drei Eckpunkte eines sphärischen Dreiecks erzeugen auf der Kugeloberfläche sieben weitere Kugeldreiecke: Bezeichnet man mit A' , B' und C' die Gegenpunkte von A , B und C , so nennt man das Dreieck $\Delta A'B'C'$ das *Gegendreieck* zu ΔABC . Beide Dreiecke sind zentralsymmetrisch zueinander und stimmen daher in sämtlichen Winkeln und Seiten überein. Natürlich besitzen sie auch denselben Flächeninhalt. Weiterhin entstehen die drei *Scheiteldreiecke* $\Delta AB'C'$, $\Delta A'BC'$ und $\Delta A'B'C$, die mit ΔABC jeweils einen Scheitelwinkel gemeinsam haben, und die drei *Nebendreiecke* $\Delta A'BC$, $\Delta AB'C$ und $\Delta ABC'$, die mit ΔABC jeweils eine Seite gemeinsam haben.

Offensichtlich ergänzen sich ΔABC und jedes Nebendreieck zu einem Kugeldreieck mit dem jeweiligen Winkel α , β und γ . Daher gelten nach (2.9) für die Flächeninhalte

$$\begin{aligned}\Delta ABC + \Delta A'BC &= 2\alpha R^2 \\ \Delta ABC + \Delta AB'C &= 2\beta R^2 \\ \Delta ABC + \Delta ABC' &= 2\gamma R^2\end{aligned}$$

Hierin darf man das Dreieck $\Delta ABC'$ durch sein flächengleiches Gegendreieck $\Delta A'B'C$ ersetzen. Nun bilden aber die Dreiecke ΔABC , $\Delta A'BC$, $\Delta A'B'C$ und $\Delta AB'C$ zusammen gerade die vordere Halbkugel mit der Fläche $2\pi R^2$. Daher erhält man

$$(2.10) \quad 2\Delta ABC + 2\pi R^2 = 2(\alpha + \beta + \gamma)R^2,$$

oder den Flächeninhalt des Kugeldreiecks zu

$$(2.11) \quad F = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2.$$

Also ist die Winkelsumme im sphärischen Dreieck größer als π . Man bezeichnet den Wert

$$(2.12) \quad \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

als *sphärischen Exzeß* (lat. *excedere* = überschreiten) und kann (2.11) auch schreiben gemäß

$$(2.13) \quad F = \varepsilon R^2.$$

Aufgabe 18 Wie groß wäre der Winkel eines zum Erdkontinent Europa flächengleichen Kontinents ($10\,000\,000\text{ km}^2$), der die Gestalt eines gleichwinkligen ($\alpha = \beta = \gamma$) sphärischen Dreiecks hat, auf der Erde ($R = 6371\text{ km}$) und auf dem Erdmond ($R = 1740\text{ km}$)?

Lösung 14 Erde: $\alpha = 64.75^\circ$, Erdmond: $\alpha = 123^\circ$.

Bemerkung 6 Mit Hilfe der folgenden, zuerst von dem Schweizer Mathematiker Simon L'Huilier (1750 - 1840) angegebenen Formel läßt sich der durch die Winkel definierte sphärische Exzeß auch durch die Seiten ausdrücken. Bezeichne dazu wiederum $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ den halben Umfang des Dreiecks. Dann gilt

$$(2.14) \quad \tan\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \sqrt{\tan\left(\frac{s}{2}\right) \tan\left(\frac{s-a}{2}\right) \tan\left(\frac{s-b}{2}\right) \tan\left(\frac{s-c}{2}\right)}.$$

2.4 Dreikante

Drei Strahlen s_a , s_b und s_c , die von einem Punkt O ausgehen und nicht in einer Ebene liegen, bilden ein *Dreikant* oder eine *körperliche Ecke*. Dabei heißt O der *Scheitelpunkt* und s_a , s_b und s_c die *Kanten* des Dreikants. Legt man in O eine Kugel mit beliebigem Radius, so schneiden die von je zwei der Strahlen aufgespannten Ebenen aus der Kugeloberfläche ein sphärisches Dreieck aus, dessen Ecken A , B und C die Schnittpunkte von s_a , s_b und s_c mit der Kugeloberfläche sind. Die Seiten und Winkel dieses Dreiecks sind unabhängig vom Radius der Kugel und werden als Seiten bzw. Winkel des Dreikants bezeichnet. Sie sind die Winkel zwischen den Strahlen bzw. den von diesen aufgespannten Ebenen.

Mit Hilfe von Überlegungen am Dreikant lassen sich leicht Formeln für Berechnungen im allgemeinen sphärischen Dreieck herleiten. Sind beispielsweise alle Seiten a , b und c eines sphärischen Dreiecks bzw. des zugehörigen Dreikants kleiner als π (man vergleiche den nächsten Abschnitt), dann bilden die Seitenflächen des Dreikants bei O eine konvexe Spitze und daher ist ihre Summe kleiner als ein Vollkreis, also

$$(2.15) \quad a + b + c < 2\pi.$$

Für die folgenden Überlegungen werden die Großkreise der Seiten eines sphärischen Dreiecks $\triangle ABC$ so durchlaufen, daß beim Umlauf von A über B nach C und zurück nach A das Dreieck links liegt. Weiterhin seien A' der Linkspol zur Polaren durch B und C , B' der Linkspol zur Polaren durch C und A und C' der Linkspol zur Polaren durch A und B . Dann heißt das sphärische Dreieck $\triangle A'B'C'$ das *Polardreieck* zu $\triangle ABC$.

Aus dieser Definition ergibt sich sofort, daß die sphärischen Abstände $\widehat{C'A}$, $\widehat{C'B}$, $\widehat{B'A}$, $\widehat{B'C}$, $\widehat{A'B}$ und $\widehat{A'C}$ alle gleich $\frac{\pi}{2}$ sind. Hieraus entnimmt man, daß A Linkspol zur Polaren durch B' und C' , B Linkspol zur Polaren durch C' und A' sowie C Linkspol zur Polaren durch A' und B' ist. Man hat also

Satz 6 Das Dualitätsprinzip der Kugel Ist $\Delta A'B'C'$ Polardreieck zum sphärischen Dreieck ΔABC , so ist ΔABC Polardreieck von $\Delta A'B'C'$.

Dreht man die Polare durch A und C um den Punkt A um den Winkel $\pi - \alpha$, so geht sie in die Polare durch A und B über. Hierbei geht der Linkspol B' der ersten Polaren in den Linkspol C' der zweiten Polaren über, d. h. es gilt $a' = \pi - \alpha$. Analog erhält man die anderen Beziehungen des folgenden Satzes.

Satz 7 Sind $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks und entsprechend $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ die Seiten und Winkel des Polardreiecks, so gelten die Beziehungen

$$(2.16) a' + \alpha = \pi$$

$$(2.17) b' + \beta = \pi$$

$$(2.18) c' + \gamma = \pi$$

$$(2.19) \alpha' + a = \pi$$

$$(2.20) \beta' + b = \pi$$

$$(2.21) \gamma' + c = \pi$$

Alle für Berechnungen im sphärischen Dreieck notwendigen Formeln brauchen daher nur für die Winkel oder für die Seiten hergeleitet zu werden. Die anderen Formeln ergeben sich dann wegen des Dualitätsprinzips mit Satz 7.

2.5 Eulersche Dreiecke

Unter einem *Eulerschen Kugeldreieck* (Leonhard Euler, 1707 - 1783) versteht man eines, bei dem jede Seite und jeder Winkel kleiner als π ist, also

$$(2.22) \quad 0 < a, b, c < \pi \quad \text{und}$$

$$(2.23) \quad 0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi.$$

Wir werden im folgenden nur noch derartige Dreiecke betrachten.

In jedem Eulerschen Dreieck gelten die folgenden Aussagen.

E1. $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$.

Dies ergibt sich unmittelbar aus (2.7) und (2.23).

E2. $0 < a + b + c < 2\pi$.

Dies wurde in (2.15) bewiesen.

E3. Die Summe zweier Seiten ist größer als die dritte und daher ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte:

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad a + c > b \quad \text{also} \quad c - b < a, \quad c - a < b \dots$$

Klappt man die Ebenen eines Dreikants, in denen die Seiten a und b gemessen werden, nach innen in die Ebene, in der c gemessen wird, so kann nur dann eine körperliche Ecke vorliegen, wenn $a+b > c$ ist. Die anderen Ungleichungen ergeben sich analog.

E4. Die Summe zweier Winkel ist kleiner als der um π vermehrte dritte:

$$\alpha + \beta < \pi + \gamma, \quad \beta + \gamma < \pi + \alpha, \quad \alpha + \gamma < \pi + \beta.$$

Dies ergibt sich, da E3 auch im Polardreieck gilt. So folgt etwa aus $a' + b' > c'$ sofort $(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) > 180^\circ - \gamma$, also $-\alpha - \beta > -180^\circ - \gamma$ und damit die Behauptung.

E5. Der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber:

$$a > b \Rightarrow \alpha > \beta, \dots$$

Aus $a > b$ folgt $\sin(\frac{a-b}{2}) > 0$. Wegen $a, b, \gamma < \pi$ gilt auch $\sin(\frac{a+b}{2}) > 0$ und $\cot(\frac{\gamma}{2}) > 0$. Dann ergibt sich aus (2.38) $\tan(\frac{\alpha-\beta}{2}) > 0$, woraus $\alpha > \beta$ folgt.

E6. Ist die Summe zweier Seiten größer (kleiner) als π , dann ist auch die Summe der gegenüberliegenden Winkel größer (kleiner) als π :

$$\begin{aligned} a + b > \pi &\Rightarrow \alpha + \beta > \pi, \\ a + b < \pi &\Rightarrow \alpha + \beta < \pi, \dots \end{aligned}$$

Aus $a + b > \pi$ folgt $\cos(\frac{a+b}{2}) < 0$ und $\cos(\frac{a-b}{2}) > 0$ (denn es ist $\frac{\pi}{2} > \frac{a}{2} > \frac{a-b}{2} > \frac{\pi}{2} - b$). Da wiederum $\cot(\frac{\gamma}{2}) > 0$ gilt, folgt aus (2.37) $\tan(\frac{\alpha+\beta}{2}) < 0$, also $\frac{\alpha+\beta}{2} > \frac{\pi}{2}$ und damit $\alpha + \beta > \pi$.

2.6 Sinussatz und Cosinussätze

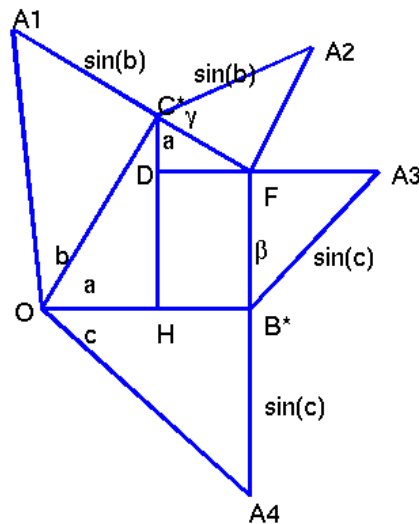
Die folgenden drei Sätze gestatten es im Prinzip, für jedes (eulersche) sphärische Dreieck aus drei beliebigen gegebenen Stücken die drei anderen Stücke zu berechnen. Bei konkreten Rechnungen zieht man jedoch oft die in den nächsten beiden Abschnitten angegebenen Formeln vor, die zwar komplizierter, aber numerisch oft leichter auszuwerten sind. Wir verzichten daher hier auf deren Beweis.

Satz 8 Sinussatz *In jedem (eulerschen) sphärischen Dreieck gilt*

$$(2.24) \quad \frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)}.$$

Der Sinussatz ist zu sich selbst dual, sein Beweis ergibt sich aus der folgenden Skizze. Darin ist das zu dem sphärischen Dreieck ΔABC gehörende Dreikant längs der durch O und A gehenden Kante aufgeschnitten und in die durch O , B und C gehende Ebene geklappt worden. Auf diese Weise liegen die drei Winkel a , b und c des Dreiecks nebeneinander in dieser Ebene. Der Punkt A wird einerseits

um die durch O und C gehende Kante nach links oben auf den Punkt A_1 geklappt, andererseits um die durch O und B gehende Kante nach rechts unten auf den Punkt A_4 . Dabei ist C^* die senkrechte Projektion von A auf die Kante durch O und C und analog B^* die senkrechte Projektion von A auf die Kante durch O und B . Hat insbesondere die Strecke OA die Länge 1, so hat $A_1C^* = AC^*$ die Länge $\sin(b)$ und $A_4B^* = AB^*$ die Länge $\sin(c)$. Weiterhin sei F der Fußpunkt des Lotes von A auf die Ebene, die durch O , B und C bestimmt wird. Dieses Lot ist nun einerseits um FB^* in diese Ebene geklappt worden, wodurch A auf A_3 geklappt wird, andererseits aber auch um FC^* in dieselbe Ebene, wodurch A auf A_2 geklappt wird. Daher sind die Winkel β bei B^* und γ bei C^* tatsächlich die entsprechenden Winkel des gegebenen sphärischen Dreiecks. Nun liest man in dem ebenen Dreieck $\triangle A_2FC^*$ ab $FA = FA_2 = \sin(\gamma) \sin(b)$ und in dem ebenen Dreieck $\triangle A_3FB^*$ entsprechend $FA = FA_3 = \sin(\beta) \sin(c)$. Hieraus folgt der Sinussatz.



Satz 9 Seitencosinussatz In jedem (eulerschen) sphärischen Dreieck gelten

$$(2.25) \cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\alpha)$$

$$(2.26) \cos(b) = \cos(c) \cos(a) + \sin(c) \sin(a) \cos(\beta)$$

$$(2.27) \cos(c) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \cos(\gamma)$$

Satz 10 Winkelcosinussatz In jedem (eulerschen) sphärischen Dreieck gelten

$$(2.28) \cos(\alpha) = -\cos(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\beta) \sin(\gamma) \cos(a)$$

$$(2.29) \cos(\beta) = -\cos(\gamma) \cos(\alpha) + \sin(\gamma) \sin(\alpha) \cos(b)$$

$$(2.30) \cos(\gamma) = -\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(c)$$

Der Seitencosinussatz und der Winkelcosinussatz sind zueinander dual, daher braucht nur einer von ihnen bewiesen zu werden. Man erhält etwa (2.27) folgendermaßen aus der vorangehenden Skizze. Zunächst sei noch das Lot von C^* auf

OB^* mit dem Fußpunkt H eingezeichnet und D als Schnittpunkt dieses Lotes mit der Verlängerung A_3F . Dann ist das Viereck $FDHB^*$ ein Rechteck und bei C^* entsteht im Dreieck $\triangle DFC^*$ tatsächlich der Winkel a des gegebenen sphärischen Dreiecks. Nun liest man ab $\cos(c) = OB^* = OH + HB^* = OH + DF$. Wegen $OH = SC^* \cos(a) = \cos(b) \cos(a)$ und $DF = \sin(a)FC^* = \sin(a) \sin(b) \cos(\gamma)$ zeigt dies aber (2.27).

2.7 Halbwinkel- und Halbseitenformeln

Die **Halbwinkelformeln** werden benutzt, um aus den gegebenen drei Seiten a , b und c eines sphärischen Dreiecks die drei Winkel α , β und γ zu berechnen. Bezeichnet man wieder den halben Umfang des Dreiecks mit s , also $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, so gelten

$$(2.31) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin(s) \sin(s-a)}}$$

$$(2.32) \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(s-c) \sin(s-a)}{\sin(s) \sin(s-b)}}$$

$$(2.33) \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin(s) \sin(s-c)}}$$

Die **Halbseitenformeln** werden benutzt, um aus den gegebenen drei Winkeln α , β und γ eines sphärischen Dreiecks die drei Seiten a , b und c zu berechnen. Bezeichnet man die halbe Winkelsumme mit σ , also $\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$, so gelten

$$(2.34) \tan\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{-\cos(\sigma) \cos(\sigma - \alpha)}{\cos(\sigma - \beta) \cos(\sigma - \gamma)}}$$

$$(2.35) \tan\left(\frac{b}{2}\right) = \sqrt{\frac{-\cos(\sigma) \cos(\sigma - \beta)}{\cos(\sigma - \gamma) \cos(\sigma - \alpha)}}$$

$$(2.36) \tan\left(\frac{c}{2}\right) = \sqrt{\frac{-\cos(\sigma) \cos(\sigma - \gamma)}{\cos(\sigma - \alpha) \cos(\sigma - \beta)}}$$

Natürlich sind die Halbwinkel- und die Halbseitenformeln zueinander dual.

2.8 Napiersche Analogien

Die **Napierschen Analogien** (John Napier, 1550 - 1617) (“Analogie” ist hier im Sinn von “Verhältnis” zu verstehen) dienen dazu, aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (oder aus zwei Winkeln und der eingeschlossenen Seite) eines

sphärischen Dreiecks die beiden übrigen Winkel (Seiten) zu berechnen. Das noch fehlende letzte Stück erhält man dann z. B. mit dem Sinussatz. Die Neperschen Analogien entsprechen dem Tangenssatz der ebenen Trigonometrie.

Satz 11 *Sind a und b zwei beliebige Seiten und γ der von ihnen eingeschlossene Winkel eines (eulerschen) sphärischen Dreiecks, so gelten*

$$(2.37) \quad \tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$(2.38) \quad \tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)} \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Sind analog α und β zwei beliebige Winkel und c die ihnen gemeinsame Seite eines (eulerschen) sphärischen Dreiecks, so gelten

$$(2.39) \quad \tan\left(\frac{a + b}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \tan\left(\frac{c}{2}\right)$$

$$(2.40) \quad \tan\left(\frac{a - b}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \tan\left(\frac{c}{2}\right)$$

2.9 Berechnungsformeln

2.9.1 Allgemeines Kugeldreieck

In einem (eulerschen) sphärischen Dreieck sind sämtliche sechs Stücke bereits durch drei beliebige von ihnen eindeutig bestimmt. Es können prinzipiell, je nach den gegebenen drei Stücken, die folgenden sechs Fälle auftreten.

1. Die drei Seiten sind gegeben (sss).
2. Die drei Winkel sind gegeben (www).
3. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind gegeben (sws).
4. Zwei Winkel und die eingeschlossene Seite sind gegeben (wsw).
5. Zwei Seiten und ein Gegenwinkel sind gegeben (ssw).
6. Zwei Winkel und eine Gegenseite sind gegeben (wws).

Dabei sind die Fälle 1. und 2., 3. und 4. sowie 5. und 6. jeweils dual zueinander.

Aufgabe 19 Man gebe in jedem der sechs Fälle Formeln zur Berechnung der jeweils nicht gegebenen drei Stücke an.

Lösung 15 1. Der Seitencosinussatz liefert

$$(2.41) \quad \cos(\alpha) = \frac{\cos(a) - \cos(b) \cos(c)}{\sin(b) \sin(c)}$$

und entsprechende Ausdrücke für β und γ . Es können aber auch die Halbwinkelformeln direkt benutzt werden.

2. Der Winkelcosinussatz liefert

$$(2.42) \quad \cos(a) = \frac{\cos(\alpha) + \cos(\beta) \cos(\gamma)}{\sin(\beta) \sin(\gamma)}$$

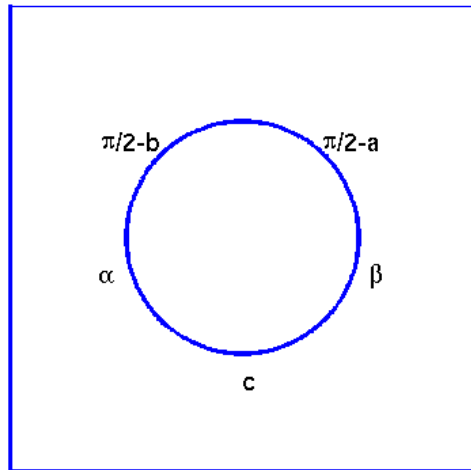
und entsprechende Ausdrücke für b und c . Es können aber auch die Halbseitenformeln direkt benutzt werden.

3. Zunächst können mit den Formeln (2.37) und (2.38) die anderen beiden Winkel ermittelt werden. Anschließend liefert etwa der Sinussatz oder der Winkelcosinussatz die restliche Seite.
4. Zunächst können mit den Formeln (2.39) und (2.40) die anderen beiden Seiten ermittelt werden. Anschließend liefert etwa der Sinussatz oder der Seitencosinussatz den restlichen Winkel.
5. Zunächst berechnet man nach dem Sinussatz den der zweiten gegebenen Seite gegenüberliegenden Winkel. Hierbei ist auf Mehrdeutigkeit zu achten! Die fehlende dritte Seite und den dritten Winkel kann man nun mit Hilfe der Neperschen Analogien berechnen.
6. Zunächst berechnet man nach dem Sinussatz die dem zweiten gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite. Hierbei ist auf Mehrdeutigkeit zu achten! Die fehlende dritte Seite und den dritten Winkel kann man nun mit Hilfe der Neperschen Analogien berechnen.

2.9.2 Rechtwinkliges Kugeldreieck

Die meisten, in konkreten Aufgabenstellungen auftretenden sphärischen Dreiecke sind rechtwinklige (oder rechtseitige) Dreiecke. Daher ist es zweckmäßig, diese Spezialfälle noch einmal gesondert zu betrachten. Zur Berechnung unbekannter Stücke in einem rechtwinkligen Kugeldreieck dient die folgende **Nepersche Regel**. Der Beweis ergibt sich durch die Spezialisierung $\gamma = \frac{\pi}{2}$ aus den Sätzen der vorhergehenden Abschnitte.

Satz 12 *Man ordne die Stücke eines rechtwinkligen Kugeldreiecks unter Auslassen des rechten Winkels in ihrer zyklischen Reihenfolge auf einem Kreis an, ersetze dabei aber die Katheten durch ihre Komplemente.*



Dann ist der Cosinus irgendeines Stückes gleich dem Produkt

1. der Cotangens der **an**liegenden Stücke
2. der Sinus der **nicht** anliegenden Stücke.

Also gelten die folgenden Formeln

$$(2.43) \cos(c) = \cot(\alpha) \cot(\beta)$$

$$(2.44) \cos(c) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos(a) \cos(b)$$

$$(2.45) \cos(\alpha) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \cot(c) = \tan(b) \cot(c)$$

$$(2.46) \cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin(\beta) = \cos(a) \sin(\beta)$$

$$(2.47) \cos(\beta) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cot(c) = \tan(a) \cot(c)$$

$$(2.48) \cos(\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \sin(\alpha) = \cos(b) \sin(\alpha)$$

$$(2.49) \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \cot(\beta) = \tan(b) \cot(\beta)$$

$$(2.50) \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a) = \sin(\alpha) \sin(c)$$

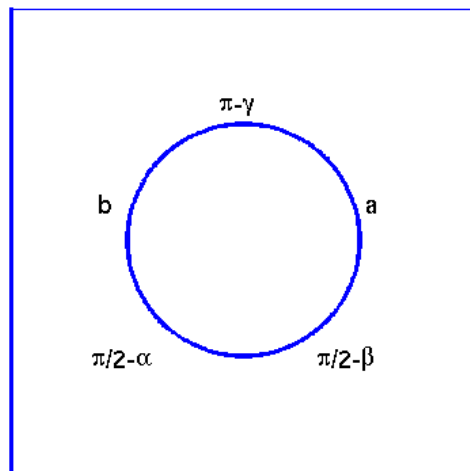
$$(2.51) \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin(b) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cot(\alpha) = \tan(a) \cot(\alpha)$$

$$(2.52) \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin(b) = \sin(\beta) \sin(c).$$

2.9.3 Rechtseitiges Kugeldreieck

Zur Berechnung unbekannter Stücke in einem rechtseitigen Kugeldreieck dient die folgende **Nepersche Regel**. Der Beweis ergibt sich durch die Spezialisierung $c = \frac{\pi}{2}$ aus den Sätzen der vorhergehenden Abschnitte.

Satz 13 *Man ordne die Stücke eines rechtseitigen Kugeldreiecks unter Auslassen der rechten Seite in ihrer zyklischen Reihenfolge auf einem Kreis an, ersetze dabei aber die der rechten Seite anliegenden Winkel durch ihre Komplemente und den ihr gegenüberliegenden Winkel durch sein Supplement.*



Dann ist der Cosinus irgendeines Stückes gleich dem

1. Produkt der Cotangens der **an**liegenden Stücke
2. Produkt der Sinus der **nicht** anliegenden Stücke.

Also gelten die folgenden Formeln

$$(2.53) \cos(\gamma) = -\cot(a) \cot(b)$$

$$(2.54) \cos(\gamma) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = -\cos(\alpha) \cos(\beta)$$

$$(2.55) \cos(a) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cot(\pi - \gamma) = -\tan(\beta) \cot(\gamma)$$

$$(2.56) \cos(a) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(b) = \cos(\alpha) \sin(b)$$

$$(2.57) \cos(b) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cot(\pi - \gamma) = -\tan(\alpha) \cot(\gamma)$$

$$(2.58) \cos(b) = \sin(a) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin(a) \cos(\beta)$$

$$(2.59) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cot(b) = \tan(\beta) \cot(b)$$

$$(2.60) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) = \sin(\pi - \gamma) \sin(a) = \sin(\gamma) \sin(a)$$

$$(2.61) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin(\beta) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cot(a) = \tan(\alpha) \cot(a)$$

$$(2.62) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin(\beta) = \sin(b) \sin(\pi - \gamma) = \sin(b) \sin(\gamma).$$

Bemerkung 7 Zur Geschichte der sphärischen Trigonometrie Menelaos von Alexandria schreibt um 100 n. Chr. ein Buch über sphärische Trigonometrie, die *Sphairika*. Auf einem dort bewiesenen Satz, dem Transversalensatz oder Satz des Menelaos, bauen die astronomischen Berechnungen des Klaudios Ptolemaios auf, die er in seinem *Almagest* niederlegt, dem Standardwerk der Astronomie bis zur Zeit Keplers.

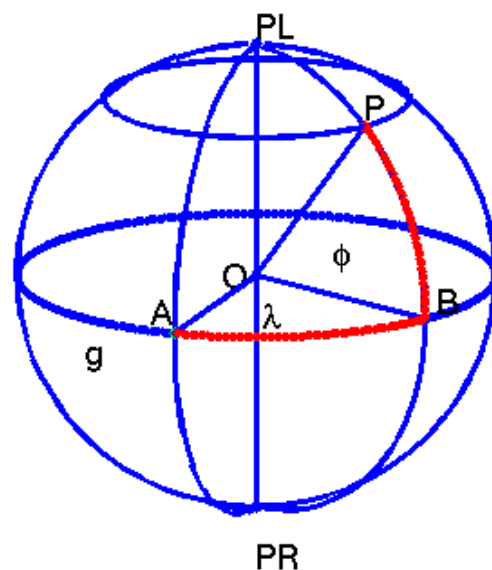
2.9. BERECHNUNGSFORMELN KAPITEL 2. SPHÄRISCHE TRIGONOMETRIE

Kapitel 3

Mathematische Geographie

3.1 Sphärische Koordinatensysteme

Zur Festlegung eines *sphärischen Koordinatensystems* wählt man einen Großkreis g der Kugel und einen Punkt A auf g . Weiterhin orientiert man g und erhält so einen Linkspol P_L und einen Rechtspol P_R zu g .

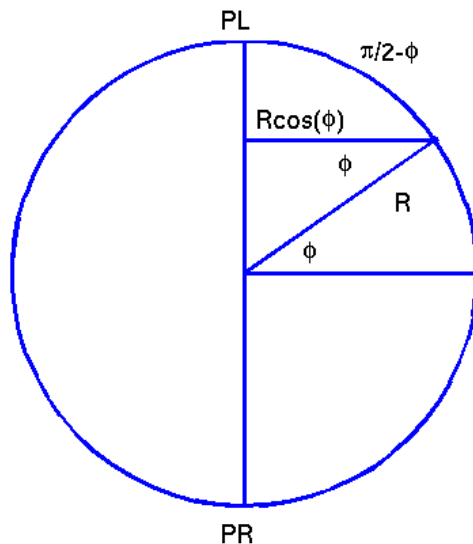


Für einen beliebigen, aber von beiden Polen verschiedenen Punkt P der Kugel legt man die Koordinaten wie folgt fest: Der Großkreisbogen durch P_L , P und P_R schneidet g in genau einem Punkt B . Unter der *Länge* λ von P versteht man dann den Zentriwinkel $\angle(AOB)$ und unter der *Breite* φ von P den Zentriwin-

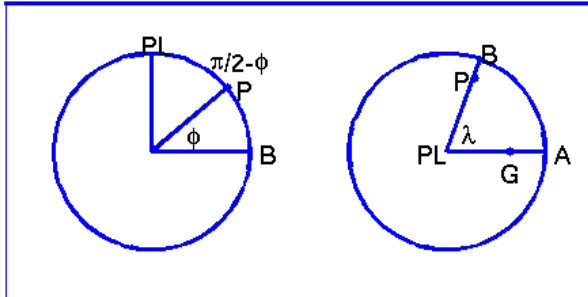
3.1. SPHÄRISCHE KOORDINATENSYSTEME / MATHEMATISCHE GEOGRAPHIE

kel $\angle(BOP)$. Dabei wird die Länge im Sinne der Orientierung von g gemessen und üblicherweise auf Werte $0 \leq \lambda < 2\pi$ oder $-\pi < \lambda \leq \pi$ normiert. Für die Breite gilt $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, wobei die positiven Werte für Punkte P auf der zu P_L gehörenden Halbkugel genommen werden. Der anfangs gewählte Punkt A hat die Koordinaten $(0, 0)$, ist also der Koordinatenursprung. Schließlich ordnet man noch P_L die Breite $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und P_R die Breite $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ zu. Beide Pole besitzen keine Länge.

Man sieht unmittelbar, daß nach Wahl von g und A jedem Wertepaar (λ, φ) aus den angegebenen Bereichen eindeutig ein Punkt P auf der Kugel entspricht. Punkte gleicher Länge liegen auf einem halben, durch die Pole gehenden Großkreis, Punkte gleicher Breite $\varphi \neq 0$ liegen auf einem zu g parallelen Kleinkreis. Dieser hat den Radius $R \cos(\varphi)$ und die Punkte auf ihm haben von P_L den sphärischen Abstand $\frac{\pi}{2} - \varphi$ und von P_R den sphärischen Abstand $\frac{\pi}{2} + \varphi$.



Beispiel 7 Auf der (mathematischen) Erdkugel wählt man für das übliche geographische (grch. *graphein* = (be)schreiben) Koordinatensystem als g den Äquator (lat. *aequus* = gleich), also die Polare zu den beiden Rotationspolen der Erde. Ihn orientiert man von West nach Ost. Damit wird P_L zum geographischen Nordpol und P_R zum Südpol. Als Punkt A wählt man (aus historischen Gründen) denjenigen Äquatorpunkt, der auf dem Großkreisbogen durch die Pole und die Sternwarte des Londoner Ortsteils Greenwich liegt. Längen(halb)kreise in diesem System heißen Meridiane (lat. *meridies* = Mittag), weil die Sonne für alle Punkte gleicher Länge zur selben Zeit ihre obere (und natürliche auch ihre untere) Kulmination (lat. *culmen* = Gipfel) erreicht. Der *Nullmeridian* ist also der durch Greenwich verlaufende Längen(halb)kreis.



Will man die Kugeloberfläche in einem kartesischen Koordinatensystem beschreiben, so legt man den Koordinatenursprung zweckmäßigerweise in den Kugelmittelpunkt O , die x -Achse von O in Richtung A , die y -Achse in die Ebene von g bei einer Länge von $\lambda = \frac{\pi}{2}$ und die z -Achse in Richtung des Linkspols. Dann bilden die drei Achsen in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem. Die kartesischen Koordinaten eines Kugelpunktes ergeben sich aus den sphärischen Koordinaten gemäß

$$(3.1) \quad x = R \cos(\varphi) \cos(\lambda), \quad y = R \cos(\varphi) \sin(\lambda), \quad z = R \sin(\varphi).$$

Koordinaten einiger ausgewählter Orte (ohne Gewähr)

Ort	λ	φ
Acapulco	$-99^{\circ}53'$	$16^{\circ}58'$
Alma-Ata	$76^{\circ}55'$	$43^{\circ}18'$
Berlin	$13^{\circ}22'$	$52^{\circ}30'$
Bombay	$72^{\circ}48'$	$19^{\circ}00'$
Colombo	$79^{\circ}46'$	$6^{\circ}59'$
Dar es Salaam	$39^{\circ}28'$	$-6^{\circ}49'$
Dresden	$13^{\circ}46'$	$51^{\circ}16'$
Galapagos	$-91^{\circ}31'$	$0^{\circ}00'$
Irkutsk	$104^{\circ}16'$	$52^{\circ}21'$
Jena	$11^{\circ}35'$	$50^{\circ}56'$
Lissabon	$-9^{\circ}13'$	$38^{\circ}45'$
Madras	$80^{\circ}28'$	$13^{\circ}02'$
Moskau	$37^{\circ}42'$	$56^{\circ}18'$
Napier	$177^{\circ}18'$	$-39^{\circ}56'$
Porto	$-8^{\circ}39'$	$41^{\circ}10'$
Rio de Janeiro	$-43^{\circ}28'$	$-22^{\circ}49'$
Santiago de Cuba	$-75^{\circ}44'$	$20^{\circ}01'$
Straßburg	$7^{\circ}46'$	$48^{\circ}35'$
Tiflis	$44^{\circ}45'$	$41^{\circ}43'$
Valdivia	$-73^{\circ}28'$	$-39^{\circ}56'$

3.2 Die Gestalt der Erde

Unter der *physischen Erdgestalt* versteht man die unmittelbar in der Natur sichtbare Erdgestalt mit Bergen und Tälern.

Dagegen bezeichnet man die *physikalische Erdgestalt* als *Geoid*. Darunter versteht man einen Körper, dessen Oberfläche eine stetige Fortsetzung der Meeresoberfläche unter dem Festland hindurch ist, so daß die Schwerkraft in allen Punkten senkrecht auf dieser Niveaulfläche steht.

Die *mathematische Erdgestalt* faßt man in erster Näherung als Kugel mit dem Radius R auf, bei genauerer Betrachtung wegen der Abplattung an den (Rotations-)Polen als *Rotationsellipsoid*, d. h. als zweiachsiges Ellipsoid mit großer Halbachse a , kleiner Halbachse b und Abplattung $\frac{a-b}{a}$,

Friedrich Wilhelm Bessel (1841): Große Halbachse $a = 6377.397 \text{ km}$, kleine Halbachse $b = 6356.079 \text{ km}$, Abplattung $\frac{1}{299}$

F. Hayford (1909/10): Große Halbachse $a = 6378.388 \text{ km}$, kleine Halbachse $b = 6356.912 \text{ km}$, Abplattung $\frac{1}{297}$

Internationales Erdellipsoid (1924): die Hayfordschen Werte werden genommen. Hieraus folgt für die Bogenlänge eines Äquatorgrades 111.329 km , und für eine *geographische Meile* als $1/15$ Äquatorgrad 7.422 km . Die Bogenlänge eines Me-

ridianquadranten als ein Viertel des Umfanges einer Ellipse mit den Achsen a und b beträgt 10002.288 km . (Das *Meter* als Einheit der Längenmessung sollte ursprünglich der 10millionste Teil hiervon sein.) Die mittlere Bogenlänge eines Meridiangrades ist 111.137 km (eine *Seemeile* ist hiervon $1/60$, also eine mittlere Längengradminute: 1.852 km).

Für eine volumengleiche Kugel ergibt sich ein Radius von $R = 6371.221 \text{ km}$, für eine oberflächengleiche Kugel $R = 6371.228 \text{ km}$.

3.3 Orthodrome und Abweitung

Seien A und B zwei Punkte auf der Erdkugel mit derselben geographischen Breite φ und den geographischen Längen λ_A und λ_B . Der von ihnen bestimmte Großkreis heißt eine *Orthodrome* (grch. *dromos* = Lauf) und ihr sphärischer Abstand $e = \widehat{AB}$ *orthodromische Entfernung*. Dagegen heißt ihre auf dem gemeinsamen Breitenkreis gemessene Entfernung ihre *Abweitung* a . Ist N der Nordpol, so kann man das gleichschenklige sphärische Dreieck $\triangle ANB$ durch die Höhe durch N in zwei spiegelsymmetrische rechtwinklige Dreiecke zerlegen, in denen man mit Hilfe der Napierschen Regel ablesen kann

$$(3.2) \quad \sin\left(\frac{e}{2}\right) = \cos(\varphi) \sin\left(\frac{|\lambda_A - \lambda_B|}{2}\right).$$

Dagegen ergibt sich für die Abweitung a die Länge des zum Zentriwinkel $\lambda_A - \lambda_B$ gehörenden Bogens auf dem Breitenkreis, der wie oben bemerkt den Radius $R \cos(\varphi)$ besitzt. Daher gilt

$$(3.3) \quad a = R \cos(\varphi) |\lambda_A - \lambda_B|.$$

Aufgabe 20 Berechnen Sie die orthodromische Entfernung e und die Abweitung a zwischen Mainz ($\lambda_A = 8^\circ 16'$, $\varphi = 50^\circ$) und Charkov ($\lambda_B = 36^\circ 12'$, $\varphi = 50^\circ$).

Lösung 16 $e = 1984.9 \text{ km}$ und $a = 1996.6 \text{ km}$.

3.4 Loxodrome

Unter dem *Kurswinkel* eines durch den Ort A gehenden Großkreises versteht man den Winkel α , den dieser Großkreis mit dem Meridian von A bildet. Er wird stets vom Meridian aus im Uhrzeigersinn gerechnet. Unter einer *Loxodrome* (grch. *loxos* = schief) auf einer Kugel versteht man eine Kurve "festen Kurses", d. h. eine Kurve, die alle Längengrade unter demselben Kurswinkel schneidet. Für einen gewählten Kurswinkel α muß diese Kurve der Differentialgleichung

$$(3.4) \quad \frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{\tan(\alpha)}{\cos(\varphi)}$$

genügen. Zur Herleitung dieser Gleichung betrachte man die Loxodrome in einem Punkt $P(\lambda, \varphi)$, die den dortigen Längengrad unter dem Winkel α schneidet. Ein weiterer Punkt, der von P den auf der Loxodrome gemessenen Abstand Δs habe, sei $P'(\lambda + \Delta\lambda, \varphi + \Delta\varphi)$. Schließlich sei $Q(\lambda + \Delta\lambda, \varphi)$ der Punkt auf demselben Längengrad wie P' und demselben Breitenkreis wie P . Man betrachte das Dreieck $\triangle PP'Q$ aus dem Stück PP' der Loxodrome, aus dem Großkreisbogen $P'Q$ und dem Stück PQ des Breitenkreises. Es ist also kein sphärisches Dreieck, besitzt aber bei Q einen rechten Winkel (zwischen Längengrad und Breitenkreis). Die Seitenlängen dieses Dreiecks sind neben $PP' = \Delta s$ noch $P'Q = R\Delta\varphi$ und $PQ = R\cos(\varphi)\Delta\lambda$. Läßt man nun Δs gegen 0 gehen, so gehen auch $\Delta\lambda$ und $\Delta\varphi$ gegen 0 und das Dreieck geht gegen ein ebenes rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $PP' = ds$ und den Katheten $P'Q = Rd\varphi$ und $PQ = R\cos(\varphi)d\lambda$. Der Winkel bei P' ist ebenfalls der Kurswinkel α , so daß gilt

$$(3.5) \quad \tan(\alpha) = \frac{R\cos(\varphi)d\lambda}{Rd\varphi},$$

also (3.4). Als Lösung dieser Differentialgleichung erhält man

$$(3.6) \quad \lambda = \tan(\alpha) \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) + c.$$

Damit ergibt sich die Gleichung der Loxodrome zum Kurswinkel α , die durch einen gegebenen Punkt (λ_0, φ_0) geht, zu

$$(3.7) \quad \lambda - \lambda_0 = \tan(\alpha) \ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)}\right).$$

Für die Bogenlänge s der Loxodrome zum Kurswinkel α zwischen den beiden auf ihr liegenden Punkten (λ_1, φ_1) und (λ_2, φ_2) gilt

$$(3.8) \quad s = \frac{R}{\cos(\alpha)} |\varphi_2 - \varphi_1|.$$

Aufgabe 21 Die beiden Punkte $A(0^\circ, 20^\circ)$ und $B(140^\circ, 30^\circ)$ sollen auf einer Loxodrome liegen. Welchen Kurswinkel α besitzt diese Loxodrome? Wie groß ist die loxodromische Entfernung s zwischen A und B ? Wie groß ist der Unterschied zwischen loxodromischer Entfernung und sphärischem Abstand d (siehe die folgende Grundaufgabe "Entfernungsbestimmung")?

Lösung 17 $\alpha = 85^\circ 29' 10''$, $s = 14127 \text{ km}$, $d = 12998 \text{ km}$, $s - d = 1129 \text{ km}$.

3.5 Grundaufgaben

Beispiel 8 Entfernungsbestimmung Zu zwei Orten P_1 und P_2 auf der Erdoberfläche mit den Koordinaten (λ_1, φ_1) und (λ_2, φ_2) ist ihr sphärischer Abstand d zu bestimmen.

Bezeichnet N den Nordpol, so sind in dem sphärischen Dreieck ΔP_1NP_2 die Seiten $P_1N = 90^\circ - \varphi_1$ und $P_2N = 90^\circ - \varphi_2$ und der eingeschlossene Winkel $\angle(P_1NP_2) = |\lambda_2 - \lambda_1|$ bekannt. Daher kann die Entfernung $d = P_1P_2$ z. B. aus dem Seitencosinussatz berechnet werden:

$$(3.9) \quad \cos(d) = \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \cos(|\lambda_2 - \lambda_1|).$$

Beispiel 9 Kursbestimmung Unter dem *Kurswinkel* eines durch den Ort A gehenden Großkreises versteht man den Winkel α , den dieser Großkreis mit dem Meridian von A bildet. Er wird stets vom Meridian aus im Uhrzeigersinn gerechnet.

Verläuft der Großkreis etwa durch die beiden Orte P_1 und P_2 mit den Koordinaten (λ_1, φ_1) und (λ_2, φ_2) für $\lambda_2 > \lambda_1$ und ist N der Nordpol, so ist in dem sphärischen Dreieck ΔP_1NP_2 der Kurswinkel bei P_1 gerade der Winkel $\alpha = \angle(NP_1P_2)$, während für den Kurswinkel bei P_2 der Wert $180^\circ - \beta$ für $\beta = \angle(NP_2P_1)$ zu nehmen ist.

Aus den Neperschen Analogien ergeben sich die folgenden Ausdrücke, aus denen beide Winkel ermittelt werden können

$$(3.10) \quad \tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)} \cot\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\right)$$

$$(3.11) \quad \tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)} \cot\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\right)$$

Beispiel 10 Fremdpeilung Von zwei festen Stationen P_1 und P_2 mit den Koordinaten (λ_1, φ_1) und (λ_2, φ_2) werden die Azimutwinkel, d. h. die gegen die Nordrichtung gemessenen Winkel δ_1 und δ_2 , der von einem Schiff ausgesandten Funkwellen gepeilt. Die Koordinaten (λ_0, φ_0) des Standortes P_0 des Schiffes sind zu berechnen.

Diese Aufgabe aus der Nautik stellt ein Vorwärtseinschneiden auf der Kugel dar und wird ähnlich zum Vorwärtseinschneiden in der Ebene gelöst.

Ist N der Nordpol, dann sind im sphärischen Dreieck ΔP_1NP_2 die beiden Seiten $P_iN = 90^\circ - \varphi_i$ und der eingeschlossene Winkel $\angle(P_1NP_2) = \lambda_2 - \lambda_1$ bekannt. Daher können die Entfernung $d = P_1P_2$ und die Winkel $\varepsilon_1 = \angle(NP_1P_2)$ und $\varepsilon_2 = \angle(NP_2P_1)$ berechnet werden. Diese Werte sind natürlich unabhängig von P_0 .

Weiterhin ist $\angle(P_2P_1P_0) = \xi_1 = \delta_1 - \varepsilon_1$ und $\angle(P_1P_2P_0) = \xi_2 = 360^\circ - (\delta_2 + \varepsilon_2)$. Damit sind im sphärischen Dreieck $\Delta P_0P_1P_2$ die Seite d und die anliegenden

3.5. GRUNDAUFGABEN KAPITEL 3. MATHEMATISCHE GEOGRAPHIE

Winkel ξ_i bekannt. Daher können die anderen beiden Seiten $d_1 = P_1P_0$ und $d_2 = P_2P_0$ berechnet werden.

Jetzt sind im sphärischen Dreieck ΔNP_1P_0 die Seiten $P_1N = 90^\circ - \varphi_1$, $P_1P_0 = d_1$ und der eingeschlossene Winkel δ_1 gegeben. Damit lassen sich die Seite $NP_0 = 90^\circ - \varphi_0$ und der Winkel $\angle(P_1NP_0) = \lambda_0 - \lambda_1$ berechnen. Hiermit sind die geographischen Koordinaten von P_0 bestimmt.

Natürlich kann man im letzten Schritt auch P_2 anstelle von P_1 benutzen und hat so die Möglichkeit einer Probe.

Aufgabe 22 Konkrete Zahlenwerte: $\lambda_1 = -80^\circ 0'$, $\varphi_1 = 32^\circ 42'$, $\lambda_2 = -8^\circ 39'$, $\varphi_2 = 41^\circ 10'$, $\delta_1 = 112^\circ 47'$, $\delta_2 = 250^\circ 52'$.

Lösung 18 $d = 56^\circ 04' 12''$, $\varepsilon_1 = 59^\circ 16' 42''$, $\varepsilon_2 = 73^\circ 56' 18''$, $d_1 = 29^\circ 24' 42''$, $d_2 = 43^\circ 13' 54''$, $\lambda_0 = -51^\circ 33' 12''$, $\varphi_0 = 18^\circ 5' 36''$.

Kapitel 4

Sphärische Astronomie

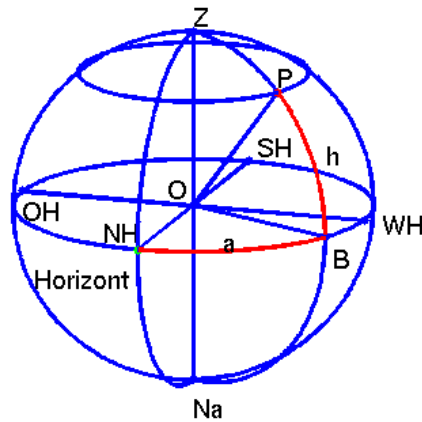
4.1 Die Himmelskugel

Astronomische Beobachtungen und Messungen geschehen in der Regel von einem Punkt der Erde aus und beziehen sich auf Punkte, die auf (der Innenseite) der *Himmelskugel* liegen. Hierunter versteht man eine *gedachte Kugel* mit unendlichem Radius, deren Mittelpunkt mit dem Erdmittelpunkt (oder auch mit dem Standpunkt des Beobachters) zusammenfällt. Diese fiktive Himmelskugel wird nun je nach Bedarf mit unterschiedlichen Koordinatensystemen versehen. Dabei ist es manchmal zweckmäßig, sich die Himmelskugel als feste Kugel vorzustellen, unter der sich die Erde hinwegdreht, manchmal hingegen läßt man die Himmelskugel die Rotation der Erde mitmachen.

4.2 Astronomische Koordinatensysteme

4.2.1 Das Horizont-Zenit-System

Hierbei nimmt man als ausgezeichneten Großkreis g auf der Himmelskugel den *Horizont* des jeweiligen Beobachters, also den Schnittkreis der Tangentialebene an die Erdkugel (oder das Rotationsellipsoid) im Punkt des Beobachters mit der Himmelskugel. Wegen des unendlichen Radius der Himmelskugel kann man auch die Parallelebene durch den Erdmittelpunkt mit der Himmelskugel schneiden. Als ausgezeichneten Punkt A nimmt man entweder den *Nordpunkt* N_H oder den *Südpunkt* S_H des Horizontes. Diese werden durch den unteren bzw. oberen Kulminationspunkt der Sonne auf ihrer täglichen Bahn am Himmel des Beobachtungsortes festgelegt. Die Verbindungslinie $N_H S_H$ heißt *Mittagslinie* oder (Orts-) *Meridian*. Man kann sie aus der Beobachtung des Schattens eines senkrecht aufgestellten Stabes (grch. *gnomon*) um die Mittagszeit herum bestimmen.



Senkrecht zum Meridian verläuft die Ost-West-Richtung, wobei der Ostpunkt O_H vom Nordpunkt auf dem Horizont um 90° nach rechts und der Westpunkt W_H um 90° nach links entfernt liegt, beides jeweils vom Beobachtungsort O aus betrachtet. Die Orientierung von g erfolgt dann von N_H über O_H nach S_H . Der zu dieser Orientierung gehörende Rechtspol heißt *Zenit* Z und ist der senkrecht über dem Beobachter liegende Punkt der Himmelskugel, der Linkspol heißt *Nadir* Na . Beide Bezeichnungen sind (ebenso wie einige der folgenden) arabischen Ursprungs. In diesem Horizont-Zenit-System wird die φ -Koordinate eines Punktes als *Höhe* h und die λ -Koordinate als *Azimut* a bezeichnet. Alle Punkte mit demselben Azimut liegen auf einem *Vertikalkreis*, alle Punkte mit derselben Höhe auf einem *Höhenparallel* oder *Almukantarat*. Da das Horizont-Zenit-System an den jeweiligen Beobachtungsort gebunden ist, macht es dessen tägliche Drehung um die Erdachse mit, so daß sich die Koordinaten eines Fixsterns, der seinen Ort relativ zur fest gedachten Himmelskugel beibehält, laufend ändern. Man wählt daher für astronomische Zwecke meist andere Koordinatensysteme, die unabhängig vom Beobachtungsort sind.

4.2.2 Das erste Äquator-Pol-System

Als ausgezeichneten Großkreis g nimmt man hierbei den *Himmelsäquator*, das ist der Schnittkreis der Ebene des Erdäquators mit der Himmelskugel. Die Verlängerung der Rotationsachse der Erde bezeichnet man als *Himmelsachse*, ihre Schnittpunkte mit der Himmelskugel als *Himmelsnord*- H_N bzw. *Himmels südpol* H_S . Man sieht unmittelbar, daß für einen Beobachtungsort der geographischen Breite φ die Höhe des Himmelsnordpols im Horizont-Zenit-System gerade $h = \varphi$ ist. Das Azimut des Himmelsnordpols dagegen ist $a = 0^\circ$. Die durch die Himmelspole laufenden Großkreise der Himmelskugel heißen *Stundenkreise*. Sie sind die Schnittkreise der Ebenen der geographischen Längengrade mit der Himmelskugel.

Der durch den Zenit und den Nadir eines Beobachtungsortes gehende Stundenkreis heißt *Orts-* oder *Himmelsmeridian*. Als ausgezeichneten Punkt A in diesem System wählt man den Schnittpunkt des Himmelsäquators mit derjenigen Hälfte des Ortsmeridians, die durch den Südpunkt S_H des Horizontes geht. Die Orientierung des Himmelsäquators erfolgt im Uhrzeigersinn, also im Sinne der täglichen scheinbaren Umdrehung des Sternenhimmels auf der Nordhalbkugel. Die λ -Koordinate eines Punktes P der Himmelskugel in diesem System bezeichnet man als *Ortsstundenwinkel* t_P . Er gibt den Abstand des Punktes von seiner oberen Kulmination an und wird üblicherweise im *Zeitmaß* gemessen $360^\circ = 24 h$ *Sternzeit*. Den Winkel $\tau_P = t_P + 12 h$ bezeichnet man auch als *Zeitwinkel* des Punktes. Er gibt die seit der unteren Kulmination vergangene Zeit an. Die φ -Koordinate im ersten Äquator-Pol-System bezeichnet man als *Deklination* δ (lat. *deklinare* = abweichen), den dazugehörigen Breitenkreis der Himmelskugel als *Deklinationkreis*. Zur Umrechnung der Koordinaten eines Punktes P der Himmelskugel vom Horizont-Zenit-System (a, h) ins erste Äquator-Pol-System (t_P, δ) und umgekehrt betrachtet man das *nautische Dreieck* $\Delta H_N Z P$. In diesem sind die Seiten $PZ = 90^\circ - h$, $ZH_N = 90^\circ - \varphi$, $PH_N = 90^\circ - \delta$ und die Winkel $\angle(PZH_N) = a$ sowie $\angle(ZH_N P) = t_P$. Bei bekannter geographischer Breite φ des Beobachtungsortes sind also jeweils drei Größen gegeben und die anderen beiden lassen sich berechnen.

4.2.3 Das zweite Äquator-Pol-System

Das zweite Äquator-Pol-System unterscheidet sich vom ersten nur dadurch, daß der ausgezeichnete Punkt A auf dem Himmelsäquator als *Frühlingspunkt* oder *Widderpunkt* Υ gewählt wird. Dies ist der Schnittpunkt des Himmelsäquators mit der Ebene der (scheinbaren) jährlichen Sonnenbahn am Himmel, in dem diese zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche im Frühling befindet (*Frühlingsäquinoktium*, lat. *nox* = Nacht) steht. Die λ -Koordinate eines Punktes P in diesem System bezeichnet man als *Sternwinkel* β_P . Die φ -Koordinate ist wie beim ersten Äquator-System die Deklination δ_P . In der Astronomie wird anstelle des Sternwinkels auch die *Rektaszension* (lat. *ascensio recta* = gerade Aufsteigung) α_P benutzt. Es gilt der Zusammenhang

$$(4.1) \quad \alpha_P + \beta_P = 360^\circ = 24 h,$$

die Rektaszension eines Sternes gibt also die Zeit an, die der Stern nach dem Widderpunkt kulminiert, der Sternwinkel dagegen die Zeit, die der Stern vor dem Widderpunkt kulminiert. Zu einer Umrechnung der Koordinaten eines Punktes der Himmelskugel zwischen den beiden äquatorialen Systemen (und damit auch ins Horizont-Zenit-System) benötigt man nur den Stundenwinkel des Widderpunktes. Dies wird weiter unten im Abschnitt über Zeitmessung besprochen.

4.2.4 Das Ekliptik-System

Bei diesem System wählt man als ausgezeichneten Großkreis g die *Ekliptik* (grch. *ekleipsis* = Verschwinden, Finsternis), das ist der Schnittkreis der Erdbahnebene mit der Himmelskugel, also die Bahn, die die Sonne im Verlaufe eines Jahres vor dem Hintergrund der Fixsterne beschreibt. Die Erdbahnebene ist (zur Zeit) rund 23.5° gegenüber der Ebene des Himmelsäquators geneigt. Die Ekliptik wird so orientiert, daß ihr Linkspol, der *ekliptische Nordpol*, auf der Nordhalbkugel zum Himmelsäquator liegt. Als ausgezeichneten Punkt A wählt man den Frühlingspunkt Υ , also den Schnittpunkt der Ekliptik mit dem Himmelsäquator, in dem sich die Sonne zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche im Frühling befindet (*Frühlingsäquinoktium*, lat. *nox* = Nacht), wenn sie von der Südhalbkugel des Himmels auf die Nordhalbkugel wechselt. Die λ -Koordinate in diesem System bezeichnet man als *ekliptische Länge* λ , die φ -Koordinate als *ekliptische Breite* β .

4.3 Zeitmessung

4.3.1 Sternzeit

Ein *Sterntag* ist die Zeit, die die Erde zu einer vollen 360° -Umdrehung um ihre Achse benötigt, also die Zeit zwischen zwei (oberen) Meridiandurchgängen eines beliebigen Fixsterns oder des Frühlingspunktes. Dieser Sterntag wird in 24 Sternstunden zu je 60 Minuten zu je 60 Sekunden eingeteilt. Für jeden Ort auf der Erde ist es zum Zeitpunkt der oberen Kulmination des Frühlingspunktes 0^h Sternzeit. Stets ist also die Sternzeit eines Ortes gleich dem Stundenwinkel des Frühlingspunktes an diesem Ort OSW_Υ . Ist β_G der Sternwinkel bzw. α_G die Rektaszension eines Gestirns G , so gilt für den Stundenwinkel OSW_G von G an diesem Ort

$$(4.2) \quad OSW_G = OSW_\Upsilon + \beta_G = OSW_\Upsilon - \alpha_G,$$

d.h. für jedes Gestirn ist die Summe aus seiner Rektaszension und seinem Stundenwinkel (an einem Ort) gleich der Sternzeit (an diesem Ort).

4.3.2 Ortszeiten

Die durch den Stundenwinkel der Sonne an einem Ort gemessene Zeit heißt *wahre Ortszeit* WOZ . Dabei wird 0^h WOZ als Zeitpunkt der unteren Kulmination (Mitternacht) festgesetzt, es gilt also

$$(4.3) \quad WOZ = OSW_\odot + 12^h,$$

mit (4.2) also

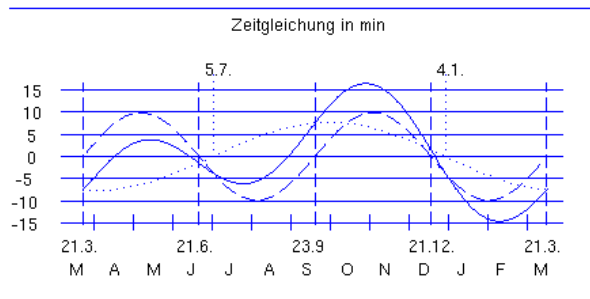
$$(4.4) \quad WOZ = OSW_\Upsilon - \alpha_\odot + 12^h.$$

Nun ändert sich die auf dem Himmelsäquator gemessene Rektaszension der wahren Sonne aber von Tag zu Tag aus zwei Gründen in ungleichförmiger Weise. Zum einen bewegt sich die Erde auf ihrer ellipsenförmigen Bahn um die Sonne mit ungleichmäßiger Geschwindigkeit nach dem 2. Keplerschen Gesetz. Die wahre Sonne bewegt sich auf der Ekliptik also ungleichmäßig. Zum anderen würde aber auch bei gleichmäßigem Sonnenlauf auf der Ekliptik die Rektaszension sich noch ungleichförmig ändern, denn zwar gehen in gleichen Zeiten gleiche Stücke des Himmelsäquators durch den Ortsmeridian, aber nicht gleiche Stücke der Ekliptik. Daher benutzt man zur Zeitmessung eine fiktive “mittlere” Sonne, die sich im Laufe eines Jahres so bewegt, daß ihre Rektaszension gleichförmig wächst. Man definiert also eine *mittlere Ortszeit* über den Stundenwinkel OSW_m der mittleren Sonne:

$$(4.5) \quad MOZ = OSW_m + 12^h.$$

Den Unterschied zwischen wahrer und mittlerer Ortszeit bezeichnet man als *Zeitgleichung* Zgl

$$(4.6) \quad Zgl = WOZ - MOZ.$$



4.3.3 Zonenzeiten

Die wahre und die mittlere Ortszeit haben den Nachteil, daß sie von dem jeweiligen Beobachtungsort abhängen und nur für Orte auf demselben Längengrad übereinstimmen. Dagegen unterscheiden sich die wahren und mittleren Ortszeiten für zwei Beobachter auf verschiedenen geographischen Längengraden um die Längendifferenz im Zeitmaß. Der weiter östlich gelegene Beobachter hat die jeweils spätere (= größere) Ortszeit, denn für ihn findet die obere Kulmination der Sonne früher

statt. Die mittlere Ortszeit des Nullmeridians bezeichnet man als *Weltzeit* oder *mittlere Greewicher Zeit* (MGZ). Es gilt also für einen Ort der geographischen Länge λ

$$(4.7) \quad MOZ = MGZ + \lambda.$$

Kapitel 5

Kartenentwürfe

5.1 Allgemeine Bemerkungen

Bildet man die *Erdoberfläche* oder einen Teil von ihr auf eine *Ebene* ab, so entsteht eine *geographische Karte*. Es wäre ideal, eine längentreue Karte zu finden. In ihr würden alle Entfernungen im selben Verhältnis zu den wirklichen Entfernungen stehen. Eine solche Karte aber kann es nicht geben, da die Kugel kein *abwickelbarer Körper* ist, wie man mit Hilfe differentialgeometrischer Methoden beweisen kann. (Den ersten strengen Beweis hierfür lieferte Leonhard Euler (1707 - 1783) im Jahre 1777 in seinen Arbeiten *Über die Abbildung einer Kugeloberfläche in einer Ebene* und *Über die Darstellung einer Kugelfläche auf einer Karte*, die in den Abhandlungen der Petersburger Akademie erschienen.) Kleine Gebiete der Kugel lassen sich zwar praktisch unverzerrt in eine Ebene abbilden (etwa Meßtischblatt), die Schwierigkeiten werden jedoch umso größer, je ausgedehnter die Gebiete sind. Man hat daher eine große Vielfalt von Abbildungsvorschriften mit unterschiedlichen Eigenschaften untersucht: Es können die Winkel oder die Flächen richtig wiedergegeben werden, Längentreue wenigstens in einer Richtung vorhanden sein, etc.

Bemerkung 8 Zwischen den wichtigsten kartographischen Forderungen der Längentreue, Winkeltreue und Flächentreue bestehen folgende Zusammenhänge: Die Längentreue impliziert beide anderen Eigenschaften und umgekehrt implizieren Winkeltreue und Flächentreue gemeinsam auch die Längentreue. Für längentreue Abbildungen gehen geodätische Linien als kürzeste Verbindungen wieder in geodätische Linien über. Also werden Großkreisbögen auf Strecken und damit sphärische Dreiecke auf ebene Dreiecke abgebildet. Daher kann es keine längentreue (und damit auch winkeltreue) Abbildung der Kugeloberfläche in eine Ebene geben, da in einem beliebigen sphärischen Dreieck die Winkelsumme größer als π ist, die Winkelsumme im ebenen Bilddreieck aber genau π beträgt.

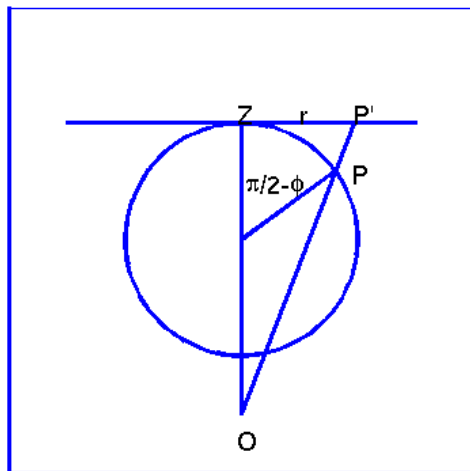
Der allgemeine Kartenentwurf wird durch Abbildungsgleichungen der Gestalt

$$(5.1) \quad x = f_1(\varphi, \lambda), \quad y = f_2(\varphi, \lambda)$$

gegeben, wobei durch f_1 und f_2 jedem Punkt P mit geographischen Koordinaten (φ, λ) auf der Kugel ein Kartenpunkt $P'(x, y)$ in einem kartesischen Koordinatensystem der Tafel Ebene zugeordnet wird. Die Verzerrungsgesetze, die sich für verschiedene Wahlen von f_1 und f_2 ergeben, werden in der Differentialgeometrie genauer untersucht. Hier erfolgt nur eine Übersicht über die gängigsten Entwürfe. Neben der direkten Projektion der Kugeloberfläche auf die Tafel Ebene werden auch Verfahren betrachtet, bei denen zunächst auf einen Zylinder oder einen Kegel abgebildet wird. Anschließend wickelt man diesen in die Tafel Ebene ab. Bei diesen Projektionsverfahren kann man prinzipiell drei unterschiedliche Lagen unterscheiden, die aber mathematisch völlig gleichwertig sind.

5.2 Perspektivische Entwürfe

Hierbei wird eine (zentral)perspektivische Projektion der Kugeloberfläche in die Tafel Ebene vorgenommen, welche eine Tangentialebene an die Erdkugel in einem Punkt Z (meist der Nord- oder Südpol) ist. Das Zentrum O der Projektion ist ein Punkt auf der Verbindungsgeraden von Z mit dem Kugelmittelpunkt. Je nach Lage von O unterscheidet man zwischen *gnomonischer Projektion* (O ist der Kugelmittelpunkt), *stereographischer Projektion* (O ist der Gegenpunkt von Z) und *orthographischer Projektion* (O liegt "im Unendlichen", d. h. man benutzt eine senkrechte Parallelprojektion).



Für die folgenden Abbildungsgleichungen wird der *Entwurfspol* Z als geographischer Nordpol gewählt. Dann lautet die allgemeine Abbildungsgleichung dieser *azimutalen Entwürfe*

$$(5.2) \quad x = f(\varphi) \cos(\lambda), \quad y = f(\varphi) \sin(\lambda),$$

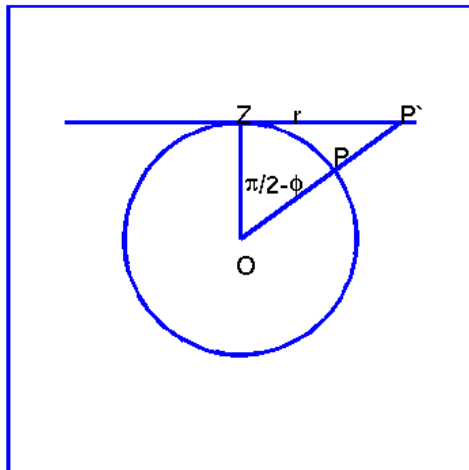
mit verschiedenen Funktionen $f(\varphi)$. Der Name *azimutale Zentralprojektion*

kommt daher, daß die Punkte der Tafelenebene meist durch *Polarkoordinaten* als *Azimuthwinkel* λ und *Radius* r angegeben werden. Dabei gilt der übliche Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten

$$(5.3) \quad x = r \cos(\lambda), \quad y = r \sin(\lambda),$$

also $r = f(\varphi)$. Die Großkreise der Kugel durch den Kartenmittelpunkt Z werden geradlinig und winkeltreu abgebildet, denn ihre Ebenen gehen durch das Projektionszentrum, so daß alle Projektionsstrahlen in ihnen liegen. (Dies ist speziell in der Schifffahrt sehr nützlich, weshalb diese Art der Projektion dort auch weit verbreitet ist.) Ist Z ein geographischer Pol, dann gilt dies also für alle Meridiane, und die Breitenkreise erscheinen als konzentrische Kreise um Z .

5.2.1 Gnomonischer Entwurf



Hierbei wird sogar jeder Großkreis (Orthodrome) der Kugel als Gerade abgebildet, deshalb spricht man auch von *orthodromischer Projektion*.

Mit diesem Verfahren kann nur ein Gebiet abgebildet werden, das kleiner als eine Halbkugel ist, denn der Äquator wird ins Unendliche abgebildet, und in seiner Umgebung liegende Gebiete werden sehr stark verzerrt. Dagegen ist die Verzerrung in der Nähe von Z (Polargebiete!) sehr gering. Daher wählt man für Z zweckmäßigerweise einen Punkt im Zentrum des darzustellenden Gebietes. Die Abbildungsgleichungen sind bestimmt durch

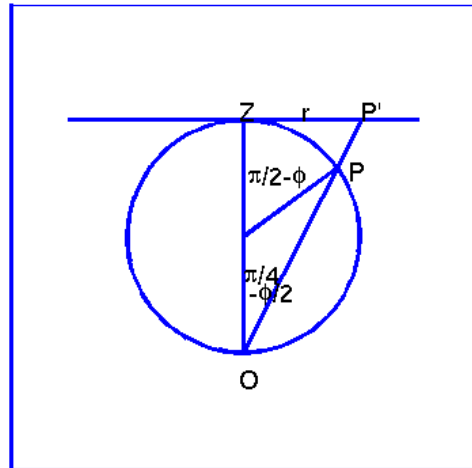
$$(5.4) \quad f(\varphi) = R \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = R \cot(\varphi).$$

5.2.2 Stereographische Projektion

Dieses Verfahren geht schon auf Hipparch (190 - 125 v. Chr.) zurück. Zwar kann hierdurch prinzipiell die ganze Erdkugel (mit Ausnahme des Projektions-

5.2. PERSPEKTIVISCHE ENTWÜRFE KAPITEL 5. KARTENENTWÜRFE

zentrums) abgebildet werden, wegen der Randverzerrungen beschränkt man sich i. a. jedoch auch auf eine Halbkugel. Solche ebenen Darstellungen von Halbkugeln nennt man *Planigloben* (lat. *planus* = eben, *globus* = Kugel, Ball). Die stereographische Projektion ist *winkeltreu* und *kreistreu*.



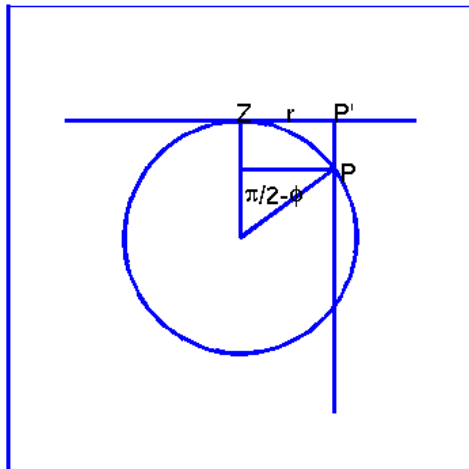
Die Abbildungsgleichungen sind bestimmt durch

$$(5.5) \quad f(\varphi) = 2R \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Man kann zeigen, daß die Bilder von Loxodromen logarithmische Spiralen sind. Die stereographische Projektion wird seit Hipparch zum Zeichnen von Sternkarten verwendet. Dabei wird der *Nadir* der Himmelskugel zum Projektionszentrum gemacht, die Tafelebene im *Zenit* angelegt.

5.2.3 Orthographische Projektion

Hierbei wird eine senkrechte Parallelprojektion auf eine Tangentialebene durchgeführt. Sie ist weder winkel- noch längentreu.



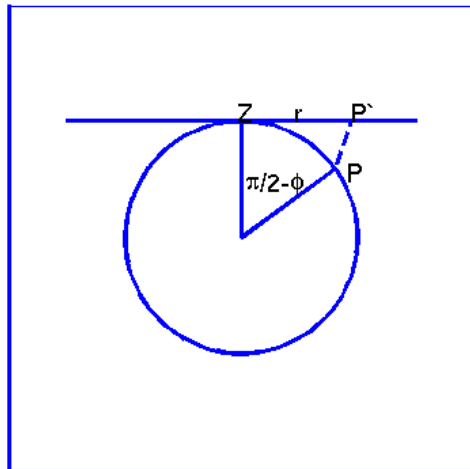
Die Abbildungsgleichungen sind bestimmt durch

$$(5.6) \quad f(\varphi) = R \cos(\varphi).$$

Zu diesen perspektivischen Azimutalentwürfen gibt es abstandstreue und flächentreue Variationen.

5.2.4 Mittelabstandstreuer Azimutalentwurf

Indem man nicht nur den Azimutwinkel sondern auch den Abstand des abzubildenden Punktes vom Berührungspunkt Z der Tafelenebene in wahrer Größe abträgt, gelangt man zu einer Karte, in der wenigstens die Entfernungen zu Z unverzerrt wiedergegeben werden. Dieser Entwurf wurde von Gerhard Mercator (1512 - 1594) angegeben, ist aber nicht die berühmte *Mercator-Projektion*. (Dies ist vielmehr die unten angegebene winkeltreue Zylinderprojektion.)



Die Abbildungsgleichungen für den mittelabstandstreuen Azimutalentwurf sind gegeben durch

$$(5.7) \quad f(\varphi) = R\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Eigenschaften: Längentreue Abstände zum Entwurfspol, geeignet für Zonenkarten.

5.2.5 Flächentreuer Azimutalentwurf

Von Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) wurde in seinem 1765 erschienenen Buch "Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung" im Abschnitt "Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung von Land- und Himmelskarten" ein Entwurf mit der Abbildungsgleichung

$$(5.8) \quad f(\varphi) = 2R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

vorgeschlagen. Er ist flächentreu und gut geeignet für Polarkarten.

5.3 Abbildungen mittels Zylinder und Kegel

Hierbei wird generell eine Projektion vom Kugelmittelpunkt bzw. von der Kugelachse auf einen Zylinder- oder Kegelmantel vorgenommen. Man unterscheidet prinzipiell zwischen den beiden Varianten, in denen der Zylinderkegel (Kegel) die Kugel in einem oder in zwei Breitenkreisen schneidet. Alle Längen auf diesen Schnittkreisen werden in ihrer wahren Größe wiedergegeben. Die Verzerrungen werden umso größer, je weiter man von den Schnittkreisen entfernt ist. Außerdem kann man auch stets alle Längengrade längentreu abbilden.

5.4 Zylinderentwürfe

Für den allgemeinen rotationssymmetrischen Zylinderentwurf gelten die Abbildungsgleichungen

$$(5.9) \quad x = R\lambda, \quad y = Rf(\varphi).$$

Die Breitenkreise erscheinen also als Parallelen zur x -Achse.

5.4.1 Lambertscher Entwurf

Dieser Entwurf, der nach Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) benannt wird, war bereits Archimedes (287 - 212 v. Chr.) bekannt. Er ist durch die Abbildungsgleichungen mit

$$(5.10) \quad f(\varphi) = \sin(\varphi)$$

gegeben, ist flächentreu und bildet den Äquator längentreu ab, ist also geeignet zur Darstellung der Tropenzone.

5.4.2 Der abstandstreue Zylinderentwurf

Ebenfalls bereits in der Antike (Marinos von Tyros um 100 n. Chr.) bekannt war dieser Entwurf, der auch "Quadratische Plattkarte" genannt wird, da die Maschen des Gradnetzes der Kugel auf Quadrate in der Ebene abgebildet werden. Läßt man den Zylinder die Kugel in zwei Parallelkreisen schneiden, statt am Äquator berühren, so erhält man eine "Rechteckige Plattkarte". Die Abbildungsgleichungen sind bestimmt durch

$$(5.11) \quad f(\varphi) = \varphi$$

bzw.

$$(5.12) \quad x = R \cos(\varphi_0)\lambda, \quad f(\varphi) = \varphi,$$

wobei φ_0 und $-\varphi_0$ die beiden Breitenkreise bestimmen, in denen der Zylinder die Kugel schneidet.

5.4.3 Mercatorscher Entwurf

Von Gerhard Mercator (1512 - 1594) stammt der berühmte winkeltreue Zylinderentwurf, bei dem die Loxodromen auf Geraden abgebildet werden und der daher die Grundkarte der See- und Luftfahrt darstellt. Seine Abbildungsgleichungen sind gegeben durch

$$(5.13) \quad f(\varphi) = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

5.4.4 Der querachsige Mercatorentwurf

Diese Variante, die auch *Gauß-Krüger-Entwurf* genannt wird (Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855), Johannes Heinrich Louis Krüger (1857 - 1923)), entsteht aus dem ursprünglichen Mercatorentwurf, wenn man die Zylinderachse in die Äquatorebene legt. Dann lauten die Abbildungsgleichungen

$$(5.14) x = R\xi, \quad y = R \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\eta}{2}\right)$$

mit $\sin(\eta) = \cos(\varphi) \sin(\lambda)$ und $\cot(\xi) = \cot(\varphi) \cos(\lambda)$.

5.5 Kegelentwürfe

Ist σ der Öffnungswinkel des in der Ebene ausgebreiteten Kegelmantels, dann bezeichnet $k = \frac{\sigma}{2\pi}$ die *Abbildungskonstante* des jeweiligen Kegelentwurfs. Es ist $0 < k < 1$. (Für $k = 0$ ergäbe sich ein Zylinderentwurf, für $k = 1$ ein Azimutalentwurf.) Die allgemeine Abbildungsgleichung für den Fall der polaren Kegelachse lautet

$$(5.15) x = f(\varphi) \cos(k\lambda), \quad y = f(\varphi) \sin(k\lambda).$$

Die Breitenkreise erscheinen also als konzentrische Kreisbögen.

5.5.1 Abstandstreuer Kegelentwurf (Pol als Punkt)

$$(5.16) x = \varrho \sin(\psi), \quad y = R \tan(\theta_0) - \varrho \cos(\psi)$$

mit $\varrho = R(\tan(\theta_0) - (\theta_0 - \theta))$ und $\psi = (\lambda - \lambda_0) \cos(\theta_0)$.

5.5.2 Bonnescher Entwurf

Rigobert Bonne (1727 - 1795)

$$(5.17) x = s \sin(t), \quad y = s_0 - s \cos(t)$$

mit $s_0 - s = (\varphi - \varphi_0)R$, $s_0 = R \cot(\varphi_0)$ und $ts = R\lambda \cos(\varphi)$.

Eigenschaften: Flächentreue, Längentreue der Parallelkreise, geeignet zur Darstellung der gemäßigten Breiten.

Läßt man bei diesem Entwurf die Spitze des Kegels ins Unendliche wandern, so geht er in den flächentreuen Zylinderentwurf von Sanson (1600 - 1667) über, der durch die folgenden Abbildungsgleichungen gegeben ist

$$(5.18) x = R \cos(\varphi)(\lambda - \lambda_0), \quad y = R\varphi.$$

5.5.3 Abstandstreuer Entwurf auf Tangentialkegel (Pol als Kreisbogen)

5.5.4 Flächentreuer Kegelentwurf (Pol als Punkt)

5.5.5 Flächentreuer Entwurf auf Tangentialkegel (Pol als Kreisbogen)

5.5.6 Flächentreuer Kegelentwurf mit zwei längentreuen Breitenkreisen

H. Ch. Albers (1805)

5.5.7 Winkeltreuer Kegelentwurf

5.6 Weitere Entwürfe

5.6.1 Globularprojektion

5.6.2 Der Entwurf von Apianus

Peter Bienewitz, genannt Apianus, Zeitgenosse Mercators.

$$(5.19)x = R\lambda\sqrt{1 - \left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^2}, \quad y = R\varphi.$$

5.6.3 Mollweidescher Entwurf

Carl Brandau Mollweide (1774 - 1825)

$$(5.20)x = \frac{2\sqrt{2}R}{\pi}\lambda\cos(\psi), \quad y = \sqrt{2}R\sin(\psi)$$

mit $2\psi + \sin(2\psi) = \pi\sin(\varphi)$.

Eigenschaften: Flächentreue, geeignet zur Darstellung der gesamten Erdoberfläche, Meridianbilder sind Ellipsen.

5.6.4 Flächentreuer Entwurf von Hammer

Ernst von Hammer (1858 - 1925).

5.6.5 Entwurf von Aithoff

David Aithoff (1854 - 1934).

5.6.6 Der Mischentwurf von Winkel

Oswald Winkel (1874 - 1953).