

# Verbandstheorie

Udo Hebisch

SS 2008

Dieses Skript enthält nur den “roten Faden”  
einer einführenden Vorlesung über Verbandstheorie.  
Zur selben Vorlesung gehört noch ein Teil zur  
Universellen Algebra.

Wesentliche Inhalte werden ausschließlich  
in der Vorlesung vermittelt. Daher ist dieses  
Skript nicht zum Selbststudium gedacht, sondern  
nur als “Erinnerungsstütze”.

# 1 Boolesche Algebren

Diese Algebren sind nach **George Boole** (1815 – 1864) benannt, der ihre Gesetzmäßigkeiten bei der Untersuchung aussagenlogischer Formeln feststellte.

**Definition 1.1** Es sei  $X$  eine beliebige nichtleere Menge und  $n \in \mathbb{N}_0$ . Eine  $n$ -stellige (innere) Verknüpfung auf  $X$  ist dann eine Abbildung  $v : X^n \rightarrow X$ . Im Falle  $n = 2$  notiert man das Verknüpfungsergebnis  $v(x, y)$  für  $x, y \in X$  im allgemeinen in Infix-Notation als  $xvy$ .

**Beispiel 1.2** Betrachtet man für eine beliebige Menge  $M$  auf der Potenzmenge  $\mathfrak{P}(M)$  die zweistelligen mengentheoretischen Verknüpfungen  $\cup$  (Vereinigung),  $\cap$  (Durchschnitt) und die einstellige Verknüpfung  $'$  (Komplementbildung), dann gelten z. B. für alle  $X, Y, Z \in \mathfrak{P}(M)$  die folgenden Gesetze:

$X \cap X = X$	( $\cap$ ist idempotent),
$X \cup X = X$	( $\cup$ ist idempotent),
$X \cap Y = Y \cap X$	( $\cap$ ist kommutativ),
$X \cup Y = Y \cup X$	( $\cup$ ist kommutativ),
$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$	( $\cap$ ist assoziativ),
$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$	( $\cup$ ist assoziativ),
$X \cap (X \cup Y) = X$	( $\cap$ ist absorptiv gegenüber $\cup$ ),
$X \cup (X \cap Y) = X$	( $\cup$ ist absorptiv gegenüber $\cap$ ),
$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$	( $\cap$ ist distributiv über $\cup$ ),
$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$	( $\cup$ ist distributiv über $\cap$ ),
$X \cap M = X$	( $M$ ist neutral bezüglich $\cap$ ),
$X \cup M = M$	( $M$ ist absorbierend bezüglich $\cup$ ),
$X \cap \emptyset = \emptyset$	( $\emptyset$ ist absorbierend bezüglich $\cap$ ),
$X \cup \emptyset = X$	( $\emptyset$ ist neutral bezüglich $\cup$ ),
$X \cup X' = M$	( $X'$ ist $\cup$ -Komplement von $X$ ),
$X \cap X' = \emptyset$	( $X'$ ist $\cap$ -Komplement von $X$ ).

**Definition 1.3** Eine *Boolesche Algebra*  $\mathcal{B} = (X, \wedge, \vee, ', o, e)$  besteht aus einer (nichtleeren) Menge  $X$ , zwei ausgezeichneten Elementen, dem *Nullelement*  $o \in X$

und dem *Einselement*  $e \in X$ , einer einstelligen Verknüpfung *Komplementbildung*  $'$  und zwei zweistelligen Verknüpfungen, der *Infimumsbildung*  $\wedge$  und der *Supremumbildung*  $\vee$ . Dabei müssen für alle  $x, y, z \in X$  folgende Axiome erfüllt sein:

$$(1) \quad x \wedge y = y \wedge x,$$

$$(2) \quad x \vee y = y \vee x,$$

$$(3) \quad x \vee o = x,$$

$$(4) \quad x \wedge e = x,$$

$$(5) \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$$(6) \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

$$(7) \quad x \vee x' = e,$$

$$(8) \quad x \wedge x' = o.$$

**Bemerkung 1.4** a) Nach Beispiel 1.2 ist jede Potenzmenge eine Boolesche Algebra. Die Umkehrung hiervon gilt nicht, vgl. Satz 1.14.

b) Jede (in der Maßtheorie definierte)  $\sigma$ -Algebra ist eine Boolesche Algebra. Auch hierunter gibt es Beispiele (vgl. Bemerkung 1.15 b)), die keine Potenzmengen sind.

c) Das angegebene Axiomensystem für Boolesche Algebren ist minimal, d. h., läßt man eine der Forderungen (1) – (8) fort, so gibt es Algebren, die alle restlichen Axiome erfüllen, aber das fortgelassene Axiom nicht, vgl. auch Beispiel 1.7.

d) Das Axiomensystem ist selbstdual, genauer: Je zwei in einem Paar zusammengefaßten Axiome gehen ineinander über, wenn man Infimums- und Supremumbildung miteinander vertauscht und gleichzeitig  $o$  und  $e$ .

**Satz 1.5** In jeder Booleschen Algebra  $\mathcal{B} = (X, \wedge, \vee, ', o, e)$  gelten die folgenden Gesetze für alle  $x, y, z \in X$ :

$$(9) \quad x \wedge x = x,$$

$$(10) \quad x \vee x = x,$$

$$(11) \quad x \wedge o = o,$$

$$(12) \quad x \vee e = e,$$

$$(13) \quad x \wedge (x \vee y) = x,$$

$$(14) \quad x \vee (x \wedge y) = x,$$

$$(15) \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,$$

$$(16) \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,$$

$$(17) \quad (x')' = x,$$

$$(18) \quad o' = e,$$

$$(19) \quad e' = o,$$

$$(20) \quad (x \wedge y)' = x' \vee y',$$

$$(21) \quad (x \vee y)' = x' \wedge y'.$$

**Bemerkung 1.6** Die Formeln (20) und (21) werden auch *De Morgansche Gesetze* ([Augustus De Morgan](#), 1806 - 1871) genannt.

**Beispiel 1.7** Es bezeichne  $\mathbb{I} = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  das reelle Einheitsintervall und  $N : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  die gemäß  $N(x) = 1 - x$  für  $x \in \mathbb{I}$  definierte Bijektion. Weiterhin sei  $\emptyset \neq W \subseteq \mathbb{I}$  eine beliebige Teilmenge von  $\mathbb{I}$  mit  $0, 1 \in W$  und  $N(W) = W$ , also etwa  $W = \{0, 1\}$ ,  $W = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$  oder  $W = \mathbb{I}$ . Für eine beliebige nichtleere Menge  $M$  sei  $X = \{\mu_A : M \rightarrow W\}$  die Menge aller *verallgemeinerten charakteristischen Funktionen*. (Für  $W = \{0, 1\}$  charakterisiert eine solche Funktion  $\mu_A \in X$  gemäß  $\mu_A(x) = 1 \iff x \in A$  genau eine Teilmenge  $A$  von  $M$ . Für  $W = \mathbb{I}$  nennt man die Elemente  $\mu_A$  auch *Fuzzy-Teilmengen von  $M$* .) Durch

$$(22) \quad (\mu_A \wedge \mu_B)(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

$$(23) \quad (\mu_A \vee \mu_B)(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \text{ und}$$

$$(24) \quad (\mu_A)'(x) = N(\mu_A(x)) = 1 - \mu_A(x)$$

für alle  $x \in M$  werden dann zwei zweistellige Verknüpfungen  $\wedge$  und  $\vee$  und eine einstellige Verknüpfung  $'$  auf  $X$  definiert. Setzt man noch  $e = \mu_M$  bzw.  $o = \mu_\emptyset$  für die charakteristischen Funktionen der ganzen Menge  $M$  bzw. der leeren Menge  $\emptyset$ , so sind (1) – (21) mit Ausnahme von (7) und (8) erfüllt.

**Definition 1.8** Ein Ring  $\mathcal{R} = (X, +, \cdot)$  mit Einselement  $e$  heißt *Boolescher Ring*, wenn  $x^2 = x$  für alle  $x \in X$  erfüllt ist.

**Folgerung 1.9** In jedem Booleschen Ring  $\mathcal{R} = (X, +, \cdot)$  gelten  $x + x = o$  und  $x \cdot y = y \cdot x$  für alle  $x, y \in X$ .

**Beweis:** Aufgabe 11.6.

**Satz 1.10** Definiert man in einer Booleschen Algebra  $\mathcal{B} = (X, \wedge, \vee, ', o, e)$

$$(25) \quad x + y := (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \text{ und}$$

$$(26) \quad x \cdot y := x \wedge y$$

für alle  $x, y \in X$ , dann ist  $\mathcal{R} = (X, +, \cdot)$  ein Boolescher Ring.

**Bemerkung 1.11** a) Die durch (25) definierte *Verknüpfung* wird in der Schaltalgebra auch *Exklusives Oder* (XOR) genannt; bei Potenzmengen spricht man dagegen von *symmetrischer Differenz*, denn man kann die Durchschnittsbildung mit den Komplementen dann durch die mengentheoretische Differenz ausdrücken.

b) In Analogie zur *mengentheoretischen Differenz* in einer Potenzmenge kann man in jeder Booleschen Algebra eine *Differenz* durch  $x - y := x \wedge y'$  definieren und die Eigenschaften dieser Operation untersuchen. Daneben spielt (speziell bei den Booleschen Algebren der Aussagenlogik) die hierzu duale Operation  $x \rightarrow y := x' \vee y$  eine große Rolle. Bei ihr handelt es sich dann um die logische *Implikation*. (Man vergleiche hierzu auch Abschnitt 10.)

**Satz 1.12** Es sei  $\mathcal{R} = (X, +, \cdot)$  ein Boolescher Ring mit dem Nullelement  $o$  und dem Einselement  $e$ . Definiert man

$$(27) \quad x \wedge y := x \cdot y,$$

$$(28) \quad x \vee y := x + y + x \cdot y \text{ und}$$

$$(29) \quad x' := e + x$$

für alle  $x, y \in X$ , dann ist  $\mathcal{B} = (X, \wedge, \vee, ', o, e)$  eine Boolesche Algebra.

**Bemerkung 1.13** In Analogie zu (28) kann man in jedem Ring die aus Addition und Multiplikation abgeleitete Operation  $x * y := x + y - x \cdot y$  definieren und ihre Eigenschaften untersuchen.

**Satz 1.14** *Eine Boolesche Algebra  $\mathcal{B} = (X, \wedge, \vee, ', o, e)$  ist genau dann zur Booleschen Algebra  $(\mathfrak{P}(M), \cap, \cup, ', \emptyset, M)$  für eine Menge  $M$  **isomorph**, wenn  $\mathcal{B}$  **vollständig** (vgl. Abschnitt 5) und **atomar** (vgl. Definition 3.17) ist.*

**Bemerkung 1.15** a) Jede endliche Boolesche Algebra  $\mathcal{B} = (X, \wedge, \vee, ', o, e)$  ist vollständig und atomar und daher zu  $\mathfrak{P}(M)$  mit  $M = \{1, \dots, n\}$  für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  isomorph. Damit gilt  $|X| = 2^n$  (vgl. Aufgabe 11.1).

b) Es gibt Boolesche Algebren, die nicht vollständig sind. Ein einfaches Beispiel liefert für jede unendliche Menge  $M$  die Menge

$$X = \{A \subseteq M \mid A \text{ ist endlich oder } M \setminus A \text{ ist endlich}\}.$$

Es ist dann stets  $X \neq \mathfrak{P}(M)$  (vgl. Aufgabe 11.3).

c) Es gibt Boolesche Algebren, die nicht atomar sind.

## 2 Verbände und Halbverbände

Die Begriffsbildung des Verbandes geht auf **Richard Dedekind** (1831 – 1916) zurück.

**Definition 2.1** Ein *Verband*  $\mathcal{V} = (X, \wedge, \vee)$  besteht aus einer nichtleeren Menge  $X$  und zwei zweistelligen **Verknüpfungen** auf  $X$ , der *Infimumsbildung*  $\wedge$  und der *Supremumbildung*  $\vee$ , so daß für alle  $x, y, z \in X$  folgende Axiome erfüllt sind:

$$(30) \quad x \wedge y = y \wedge x,$$

$$(31) \quad x \vee y = y \vee x,$$

$$(32) \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,$$

$$(33) \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,$$

$$(34) \quad x \wedge (x \vee y) = x,$$

$$(35) \quad x \vee (x \wedge y) = x.$$

Gelten außerdem noch

$$(36) \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \text{ und}$$

$$(37) \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

so heißt  $\mathcal{V} = (X, \wedge, \vee)$  ein *distributiver Verband*.

**Folgerung 2.2** In jedem Verband  $\mathcal{V} = (X, \wedge, \vee)$  gelten für alle  $x, y, z \in X$

$$(38) \quad x \wedge x = x,$$

$$(39) \quad x \vee x = x,$$

$$(40) \quad x \wedge y = x \iff x \vee y = y,$$

$$(41) \quad x \wedge y = x \vee y \iff x = y.$$

Außerdem sind (36) und (37) äquivalent. Ist  $\mathcal{V}$  sogar distributiv, so hat man noch

$$(42) \quad x \wedge y = x \wedge z \text{ und } x \vee y = x \vee z \implies y = z.$$

**Definition 2.3** Es sei  $\mathcal{V} = (X, \wedge, \vee)$  ein Verband mit einem Nullelement  $o$  gemäß (3) und einem Einselement  $e$  gemäß (4). Ein  $y \in X$  heißt *Komplement von  $x \in X$* , wenn

$$(43) \quad x \wedge y = o \text{ und } x \vee y = e$$

gilt. Man nennt  $\mathcal{V}$  *komplementär*, wenn jedes  $x \in X$  (mindestens) ein Komplement besitzt.

**Folgerung 2.4** a) Ist  $\mathcal{V} = (X, \wedge, \vee)$  ein distributiver Verband mit einem Nullelement  $o$  und einem Einselement  $e$ , dann besitzt jedes  $x \in X$  höchstens ein Komplement.

b) Die *Booleschen Algebren* sind genau die distributiven komplementären Verbände.

**Beweis:** Aufgabe 11.7.

**Definition 2.5** Ein *Halbverband*  $\mathcal{H} = (X, \cdot)$  besteht aus einer nichtleeren Menge  $X$  und einer zweistelligen *Verknüpfung*  $\cdot$  auf  $X$ , die *kommutativ*, *idempotent* und *assoziativ* ist. (Es handelt sich bei  $(X, \cdot)$  also um eine kommutative und idempotente Halbgruppe.)

**Folgerung 2.6** Für jeden Verband  $\mathcal{V} = (X, \wedge, \vee)$  sind  $(X, \wedge)$  und  $(X, \vee)$  Halbverbände, zwischen denen die Beziehung (40) besteht. Sind umgekehrt  $(X, \wedge)$  und  $(X, \vee)$  Halbverbände auf  $X$ , so daß (40) für alle  $x, y \in X$  erfüllt ist, dann ist  $(X, \wedge, \vee)$  ein Verband.

**Definition 2.7** Es sei  $M$  eine beliebige Menge und  $\emptyset \neq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ , so daß

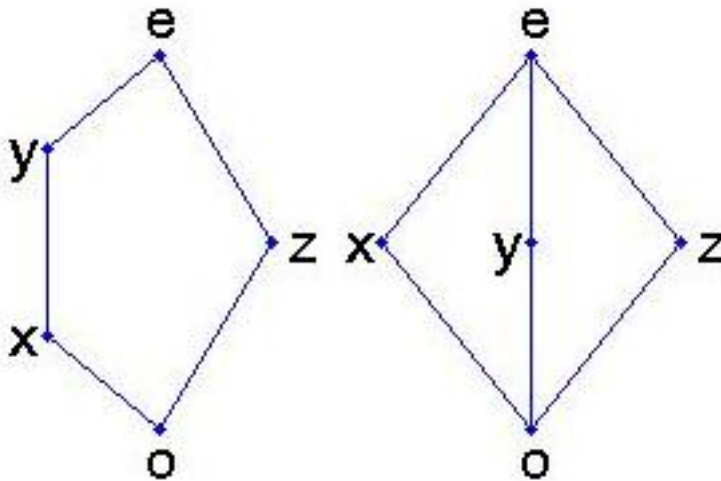
$$(44) \quad M_1, M_2 \in \mathfrak{M} \implies M_1 \cap M_2 \in \mathfrak{M} \text{ und } M_1 \cup M_2 \in \mathfrak{M}$$

erfüllt ist. Dann heißt  $(\mathfrak{M}, \cap, \cup)$  ein *Mengenverband*.

**Satz 2.8** Jeder Mengenverband ist ein *distributiver Verband*. Umgekehrt ist jeder distributive Verband zu einem Mengenverband *isomorph*.

**Definition 2.9** Es sei  $\mathcal{V} = (X, \wedge, \vee)$  ein Verband und  $\emptyset \neq X' \subseteq X$ . Wenn  $x \wedge y \in X'$  und  $x \vee y \in X'$  für alle  $x, y \in X'$  erfüllt sind, dann heißt  $\mathcal{V}' = (X', \wedge, \vee)$  ein *Unterverband* oder *Teilverband* von  $\mathcal{V}$ . Handelt es sich bei  $\mathcal{V}'$  sogar um eine **Boolesche Algebra** mit der Komplementbildung  $'$ , und gilt auch  $x' \in X'$  für alle  $x \in X'$ , dann nennt man  $\mathcal{V}'$  eine *Unteralgebra* von  $\mathcal{V}$ .

**Beispiel 2.10** Auf der Menge  $X = \{o, x, y, z, e\}$  sind durch die beiden folgenden *Hasse-Diagramme* (**Helmut Hasse**, 1898 - 1979) mit den üblichen Interpretationen von  $\wedge$  und  $\vee$  zwei Verbände gegeben, die beide nicht **distributiv** sind. Sie sind jedoch beide **komplementär**.



**Satz 2.11** Ein Verband  $\mathcal{V} = (X, \wedge, \vee)$  ist genau dann **distributiv**, wenn er keinen **Teilverband**  $\mathcal{V}'$  enthält, der zu einem der beiden Verbände aus **Beispiel 2.10** isomorph ist.

### 3 Partiiell geordnete Mengen

**Definition 3.1** Für beliebige Mengen  $A$  und  $B$  heißt jede Teilmenge  $\varrho$  von  $A \times B$  eine (binäre) *Relation von* (den Elementen von)  $A$  *zu* (den Elementen von)  $B$ . Für jedes Paar  $(a, b) \in A \times B$  schreibt man kurz  $a \varrho b$  im Falle  $(a, b) \in \varrho$  und  $a \not\varrho b$  im Falle  $(a, b) \notin \varrho$ . Im Spezialfall  $A = B$  nennt man  $\varrho \subseteq A \times A$  eine *Relation auf*  $A$  und  $i_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$  die *identische Relation auf*  $A$ . Für Teilmengen  $A' \subseteq A$  und  $B' \subseteq B$  heißt die Relation  $\varrho' = \varrho \cap (A' \times B')$  die *Einschränkung von*  $\varrho$  *auf*  $A' \times B'$ .

**Definition 3.2** Für beliebige Mengen  $A, B, C$  und  $D$  und Relationen  $\varrho \subseteq A \times B$  sowie  $\sigma \subseteq C \times D$  sei die zu  $\varrho$  *inverse Relation*  $\varrho^{-1} \subseteq B \times A$  durch  $b \varrho^{-1} a \iff a \varrho b$  für alle  $a \in A$  und  $b \in B$  definiert und das *Produkt*  $\sigma \circ \varrho \subseteq A \times D$  *von*  $\varrho$  *und*  $\sigma$  *durch*

$$a(\sigma \circ \varrho)d \iff \text{es gibt ein } x \in B \cap C \text{ mit } a \varrho x \text{ und } x \sigma d$$

für alle  $a \in A$  und  $d \in D$ .

**Definition 3.3** Für eine Relation  $\varrho$  auf einer Menge  $A$  werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt.

- (45)  $\varrho$  ist reflexiv  $\iff i_A \subseteq \varrho$ ,
- (46)  $\varrho$  ist irreflexiv  $\iff i_A \cap \varrho = \emptyset$ ,
- (47)  $\varrho$  ist symmetrisch  $\iff \varrho \subseteq \varrho^{-1} \iff \varrho^{-1} \subseteq \varrho \iff \varrho = \varrho^{-1}$ ,
- (48)  $\varrho$  ist antisymmetrisch  $\iff \varrho \cap \varrho^{-1} \subseteq i_A$ ,
- (49)  $\varrho$  ist asymmetrisch  $\iff \varrho \cap \varrho^{-1} = \emptyset$ ,
- (50)  $\varrho$  ist transitiv  $\iff \varrho \circ \varrho \subseteq \varrho$ ,
- (51)  $\varrho$  ist konnex  $\iff \varrho \cup \varrho^{-1} \cup i_A = A \times A$ ,
- (52)  $\varrho$  ist linear  $\iff \varrho \cup \varrho^{-1} = A \times A$ ,

Dann heißt  $\varrho$  *Ähnlichkeit*, wenn sie reflexiv und symmetrisch, *Toleranzrelation*, wenn sie symmetrisch und transitiv, und eine *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Dagegen heißt  $\varrho$  eine *Quasiordnung*, wenn sie reflexiv und transitiv ist, und eine *partielle Ordnung*, wenn sie außerdem noch antisymmetrisch ist. Eine partielle Ordnung heißt *lineare* (oder *totale*) *Ordnung*, wenn sie linear ist.

**Folgerung 3.4** *Ist*  $\varrho$  *eine Quasiordnung auf*  $A$ , *dann definiert*

$$(53) \quad a \sim b \iff a \varrho b \quad \text{und} \quad b \varrho a$$

für alle  $a, b \in A$  eine Äquivalenzrelation auf  $A$ . Weiterhin wird auf der Menge  $A/\sim = \{[a]_\sim \mid a \in A\}$  aller Äquivalenzklassen  $[a]_\sim = \{x \in A \mid a \sim x\}$  durch

$$(54) \quad [a]_\sim \bar{\rho} [b]_\sim \iff a \rho b$$

eine partielle Ordnung  $\bar{\rho}$  definiert.

**Folgerung 3.5** Ist  $\rho$  (oder  $\leq$ ) eine partielle Ordnung auf  $A$ , so ist die Relation  $\rho' = \rho \setminus i_A$  (oder  $<$ ) eine irreflexive, transitive und asymmetrische Relation. Ist umgekehrt  $\sigma$  (oder  $<$ ) eine irreflexive, transitive und asymmetrische Relation auf  $A$ , so ist  $\sigma' = \sigma \cup i_A$  eine partielle Ordnung auf  $A$ . Dabei gilt stets  $(\rho')' = \rho$  und  $(\sigma') = \sigma$ .

Entsprechendes gilt unter Einbeziehung der Linearität für  $\rho$  (oder  $\leq$ ) und der Konnexität für  $\sigma$  (oder  $<$ ).

**Beispiel 3.6** In jedem **Verband**  $\mathcal{V} = (X, \wedge, \vee)$  wird durch

$$(55) \quad x \leq y \iff x \wedge y = x$$

für alle  $x, y \in X$ , oder wegen (40) gleichwertig

$$(56) \quad x \leq y \iff x \vee y = y$$

eine partielle Ordnung  $\leq$  auf  $X$  definiert.

**Definition 3.7** Ist  $X$  eine beliebige Menge und  $\leq$  eine partielle Ordnung auf  $X$ , dann heißt  $(X, \leq)$  eine *partiell geordnete Menge*, kurz eine *p. o. Menge*. Handelt es sich bei  $\leq$  sogar um eine lineare Ordnung, so nennt man  $(X, \leq)$  eine *total geordnete (t. o.) Menge* oder *Kette*.

**Bemerkung 3.8** Ist  $(X, \leq)$  eine p. o. (t. o.) Menge und  $X' \subseteq X$ , so ist die Einschränkung von  $\leq$  auf  $X' \times X'$  ebenfalls eine partielle (totale) Ordnung auf  $X'$ . Man schreibt wieder  $(X', \leq)$  für die so entstehende p. o. (t. o.) Menge.

**Definition 3.9** Es sei  $(X, \leq)$  eine p. o. Menge und  $T \neq \emptyset$  eine Teilmenge von  $X$ . Dann heißt ein Element  $a \in T$  ein *minimales Element von  $T$* , wenn

$$(57) \quad t \leq a \implies t = a$$

für alle  $t \in T$  gilt. Dagegen heißt  $b \in T$  *kleinstes Element* oder *Minimum von  $T$* , wenn  $b \leq t$  für alle  $t \in T$  erfüllt ist.

**Bemerkung 3.10** a) Eine Teilmenge  $T$  einer p. o. Menge  $(X, \leq)$  kann beliebig viele minimale Elemente haben. Dagegen gibt es höchstens ein kleinstes Element  $b$  von  $T$ , welches dann auch das einzige minimale Element von  $T$  ist. Man schreibt dann  $b = \min T$ . Ist dagegen  $(X, \leq)$  oder wenigstens  $(T, \leq)$  eine **Kette**, so fallen die Begriffe “minimales Element von  $T$ ” und “kleinstes Element von  $T$ ” zusammen. Andererseits gibt es partiell geordnete Mengen  $(X, \leq)$  mit genau einem minimalen Element, welches aber nicht größtes Element von  $(X, \leq)$  ist.

b) Dem Übergang von einer p. o. Menge  $(X, \leq) = (X, \varrho)$  zu der p. o. Menge  $(X, \geq) = (X, \varrho^{-1})$  entspricht das *ordnungstheoretische Dualitätsprinzip*. Danach sind dann auch die Begriffe *maximales Element*, *größtes Element*, *Maximum* etc. definiert.

**Definition 3.11** Es sei  $(X, \leq)$  eine p. o. Menge und  $T$  eine beliebige Teilmenge von  $X$ . Ein Element  $x \in X$  heißt eine *untere Schranke von  $T$  (in  $X$ )*, wenn  $x \leq t$  für alle  $t \in T$  gilt. Existiert eine solche untere Schranke, so heißt  $T$  *in  $X$  nach unten beschränkt*. Ein Element  $d \in X$  heißt *größte untere Schranke von  $T$  (in  $X$ )* oder *Infimum von  $T$  (in  $X$ )*, wenn

$$(58) \quad d \leq t \text{ für alle } t \in T \text{ und}$$

$$(59) \quad s \leq t \text{ für alle } t \in T \implies s \leq d \text{ für alle } s \in X$$

gelten, wenn also  $d$  das Maximum der Menge aller unteren Schranken von  $T$  in  $X$  ist. Im Falle der Existenz ist also das Infimum  $d$  von  $T$  in  $X$  eindeutig bestimmt. Man schreibt dann  $d = \inf T$  oder  $d = \bigwedge_{t \in T} t$  und insbesondere  $d = a \wedge b$  für  $T = \{a, b\} \subseteq X$ , wenn der Bezug auf  $X$  klar ist.

**Beispiel 3.12** Ist  $\mathcal{V} = (X, \wedge, \vee)$  ein **Verband** und  $\leq$  gemäß (55) definiert, dann existieren in der p. o. Menge  $(X, \leq)$  für je zwei Elemente  $a, b \in X$  sowohl das Infimum als auch das Supremum, und es gilt  $a \wedge b = \inf\{a, b\}$  und  $a \vee b = \sup\{a, b\}$ .

**Definition 3.13** Eine p. o. Menge  $(X, \leq)$  heißt ein unterer **Halbverband** oder  $\wedge$ -Halbverband, wenn für alle  $a, b \in X$  stets das Infimum  $a \wedge b \in X$  existiert.

**Folgerung 3.14** a) Ist die p. o. Menge  $(X, \leq)$  ein  $\wedge$ -Halbverband, dann ist  $\wedge$  eine zweistellige Verknüpfung auf  $X$ , so daß  $(X, \wedge)$  ein Halbverband ist. Für  $x_1, \dots, x_n \in X$  gilt dann  $x_1 \wedge \dots \wedge x_n = \inf\{x_1, \dots, x_n\}$ .

b) Ist umgekehrt  $(X, \wedge)$  ein Halbverband, dann definiert (55) eine partielle Ordnung  $\leq$  auf  $X$ , so daß  $(X, \leq)$  ein  $\wedge$ -Halbverband ist, in dem  $a \wedge b = \inf\{a, b\}$  für alle  $a, b \in X$  gilt.

c) Wendet man a) und b) nacheinander an, so erhält man wieder den ursprünglichen  $\wedge$ -Halbverband  $(X, \leq)$ . Entsprechendes gilt für die Nacheinanderanwendung von b) und a).

**Bemerkung 3.15** Die **Verbände** sind also genau diejenigen p. o. Mengen, in denen zu je zwei Elementen das Infimum und das Supremum existiert.

**Beispiel 3.16** Seien  $A$  und  $B$  beliebige Mengen und  $X$  die Menge aller partiellen Abbildungen  $f : D_f \rightarrow B$  für  $D_f \subseteq A$ . Dann ist  $(X, \subseteq)$  eine p. o. Menge, die sogar ein  $\wedge$ -Halbverband ist. Für  $A \neq \emptyset$  und  $|B| > 1$  ist jedoch  $(X, \subseteq)$  kein Verband.

**Definition 3.17** In einer p. o. Menge  $(X, \leq)$  mit kleinstem Element  $o$  heißen die **minimalen Elemente** von  $X' = X \setminus \{o\}$  **Atome**. Existiert dann zu jedem  $x \neq o$  aus  $X$  ein Atom  $a$  mit  $a \leq x$ , so heißt  $(X, \leq)$  **atomar**.

**Beispiel 3.18** a) In  $\mathcal{X} = (\mathfrak{P}(M), \subseteq)$  sind genau die einelementigen Teilmengen  $\{x\}$  für  $x \in M$  Atome und offensichtlich ist  $\mathcal{X}$  atomar.

b) Jede endliche p. o. Menge  $(X, \leq)$  mit kleinstem Element  $o$  ist trivialerweise atomar.

## 4 Wohlgeordnete Mengen

**Definition 4.1** Eine p. o. Menge  $(X, \leq)$  erfüllt die *Minimalbedingung*, wenn jede Teilmenge  $T \neq \emptyset$  von  $X$  ein **minimales Element** besitzt. Eine t. o. Menge  $(X, \leq)$ , welche die Minimalbedingung erfüllt, heißt *wohlgeordnet*.

**Folgerung 4.2** Für eine p. o. Menge  $(X, \leq)$  ist die Minimalbedingung gleichwertig mit der *absteigenden Kettenbedingung*:

Jede Kette der Form  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$  mit  $a_i \in X$  wird nach endlich vielen Schritten gemäß  $a_n = a_{n+1} = \dots$  stationär.

Eine offensichtlich gleichwertige Formulierung dazu ist:

Jede echte Kette  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$  mit  $a_i \in X$  bricht nach endlich vielen Schritten ab.

**Beweis:** Gilt die Minimalbedingung und ist  $T = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$  eine (echt) absteigende Kette in  $(X, \leq)$ , so ist  $T \neq \emptyset$  und besitzt daher ein minimales Element, etwa  $a_n$ . Dann kann es aber kein  $a_i \in T$  mit  $a_n > a_i$  geben, d. h. die Kette bricht mit  $a_n$  ab bzw. wird dort stationär.

Gelte umgekehrt die absteigende Kettenbedingung und sei  $T \neq \emptyset$  Teilmenge von  $X$ . Dann gibt es ein  $a_1 \in T$ . Ist dieses Element minimal in  $T$ , so ist ein minimales Element in  $T$  gefunden. Sonst existiert ein  $a_2 \in T$  mit  $a_1 > a_2$ . Ist nun  $a_2$  minimal in  $T$ , so ist ebenfalls ein minimales Element gefunden. Andernfalls fährt man mit dieser Konstruktion einer echt absteigenden Kette fort. Diese bricht aber genau dann ab, wenn ein minimales Element in  $T$  gefunden ist.  $\diamond$

**Folgerung 4.3** Eine p. o. Menge  $(X, \leq)$  ist genau dann wohlgeordnet, wenn jede Teilmenge  $T \neq \emptyset$  von  $X$  ein **kleinstes Element** besitzt.

**Beweis:** Ist  $(X, \leq)$  und  $T \neq \emptyset$  Teilmenge von  $X$ , dann ist wegen der totalen Ordnung von  $X$  (und damit auch von  $T$ ) jedes minimale Element bereits ein kleinstes Element.

Wenn jede nichtleere Teilmenge von  $X$  ein kleinstes Element besitzt, dann ist dieses Element auch minimal, d.h.  $(X, \leq)$  erfüllt die Minimalbedingung. Außerdem besitzt jede Teilmenge  $T = \{a, b\}$  ein kleinstes Element, d. h. es gilt  $a \leq b$  oder  $b \leq a$ . Also ist  $(X, \leq)$  auch total geordnet.  $\diamond$

**Beispiel 4.4** a) Die Menge  $\mathbb{N}_0$  der natürlichen Zahlen ist bezüglich der natürlichen Ordnung

$$m \leq n \iff n = m + k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0$$

wohlgeordnet.

Durch

$$1 < 2 < 3 < \dots < 0$$

wird eine andere Wohlordnung auf derselben Menge definiert. Dasselbe gilt für

$$1 < 3 < 5 \dots 0 < 2 < 4 \dots$$

Keine Wohlordnung wird dagegen durch

$$1 < 3 < 5 < \dots < 4 < 2 < 0$$

definiert, denn hier hat die Teilmenge der geraden Zahlen kein kleinstes Element.

b) Die Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen ist bezüglich der natürlichen Ordnung  $\leq$  nicht wohlgeordnet, denn sie besitzt kein kleinstes Element.

Durch

$$-1 < -2 < -3 \dots < 0 < 1 < 2 \dots$$

wird aber eine Wohlordnung auf  $\mathbb{Z}$  definiert.

**Bemerkung 4.5** a) Jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist selbst wohlgeordnet.

b) Ist  $(X, \leq_X)$  wohlgeordnet und  $f : X' \rightarrow X$  eine Bijektion, dann wird auch  $X'$  durch  $x <_{X'} y \iff f(x) <_X f(y)$  wohlgeordnet. Insbesondere läßt sich also jede endliche Menge  $\{x_1, \dots, x_n\}$  als bijektives Bild der endlichen Menge  $\{1, \dots, n\}$  natürlicher Zahlen wohlordnen.

Im Rahmen einer axiomatischen Mengenlehre sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

**Satz 4.6 (Wohlordnungssatz)**

*Jede Menge  $X$  kann wohlgeordnet werden.*

**Satz 4.7 (Auswahlaxiom)**

*Zu jeder Menge  $\mathfrak{x} = \{X_i \mid X_i \neq \emptyset\}$  nichtleerer Mengen  $X_i$  existiert eine Abbildung  $f : \mathfrak{x} \rightarrow \bigcup X_i$  mit  $f(X_i) \in X_i$  für alle  $X_i \in \mathfrak{x}$ . Solche Abbildungen heißen dann Auswahlfunktionen.*

**Satz 4.8 (Lemma von Zorn/Kuratowski)**

(*Max August Zorn, 1906 – 1993; Kazimierz Kuratowski, 1896 – 1980*)

Ist  $(X, \leq)$  eine p. o. Menge, so daß jede (bezüglich  $\leq$ ) aufsteigende Kette in  $X$  eine obere Schranke besitzt, dann besitzt  $X$  ein (bezüglich  $\leq$ ) maximales Element.

**Satz 4.9 (Maximalitätsprinzip)** *Besitzt in dem Mengensystem  $\mathfrak{x} = \{X_i \mid i \in I\}$  jede (bezüglich  $\subseteq$ ) aufsteigende Kette eine obere Schranke, dann besitzt  $\mathfrak{x}$  ein (bezüglich  $\subseteq$ ) maximales Element.*

**Satz 4.10 (Lemma von Teichmüller/Tukey)**

(*P. J. Oswald Teichmüller, 1913 – 1943*)

Sei  $X$  eine Menge und  $\emptyset \neq \mathfrak{x} \subseteq \mathfrak{P}(X)$  derart, daß für  $T \in \mathfrak{P}(X)$  genau dann  $T \in \mathfrak{x}$  gilt, wenn jede endliche Teilmenge von  $T$  ebenfalls zu  $\mathfrak{x}$  gehört. Dann besitzt  $\mathfrak{x}$  ein bezüglich  $\subseteq$  maximales Element.

**Satz 4.11 (Satz von Hausdorff/Birkhoff)**

(*Felix Hausdorff, 1868 – 1942; Garrett Birkhoff, 1911 – 1996*)

Jede p. o. Menge  $(X, \leq)$  besitzt eine maximale Kette.

**Bemerkung 4.12** Manchmal wird das Lemma von Zorn/Kuratowski auch in der folgenden Fassung formuliert, die zu Satz 4.8 gleichwertig ist:

Ist  $(X, \leq)$  eine p. o. Menge, so daß jede aufsteigende Kette eine obere Schranke besitzt, dann existiert zu jedem  $x \in X$  ein maximales Element  $m \in X$  mit  $x \leq m$ .

**Bemerkung 4.13** Man sagt, daß eine beliebige Eigenschaft  $E$  von “endlichem Charakter” sei, wenn die leere Menge diese Eigenschaft hat und wenn weiterhin eine beliebige Menge  $T$  diese Eigenschaft hat, sobald alle endlichen Teilmengen von  $T$  die Eigenschaft  $E$  haben. Dann kann man das **Lemma von Teichmüller und Tukey** auch so formulieren:

Ist  $E$  eine Eigenschaft von endlichem Charakter und  $X$  eine beliebige Menge, dann besitzt die Menge  $\mathfrak{x} = \{T \subseteq X \mid T \text{ hat die Eigenschaft } E\}$  ein bezüglich  $\subseteq$  maximales Element.

**Beispiel 4.14** Aus dem Lemma von Teichmüller/Tukey folgt sofort, daß jeder Vektorraum eine Basis (also eine maximale linear unabhängige Teilmenge) besitzt, denn die lineare Unabhängigkeit einer Menge von Vektoren ist eine Eigenschaft von endlichem Charakter.

Aus der zweiten Fassung des Lemmas von Zorn folgt sogar, daß sich jede linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums zu einer Basis erweitern läßt.

**Definition 4.15** Eine Teilmenge  $A$  einer p. o. Menge  $(X, \leq)$  heißt *unterer Abschnitt* von  $X$ , wenn für alle  $x \in X$  und  $a \in A$  aus  $x \leq a$  bereits  $x \in A$  folgt.

**Folgerung 4.16** Sei  $(X, \leq)$  eine p. o. Menge. Sind  $A_i \subseteq X$  für  $i \in I$  untere Abschnitte von  $X$ , dann auch  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ .

**Beweis:** Ist  $a \in A$  und  $x \leq a$ , so gilt  $a \in A_i$  für ein  $i \in I$  und, da  $A_i$  unterer Abschnitt ist, auch  $x \in A_i$ , also  $x \in A$ .  $\diamond$

**Bemerkung 4.17** a)  $X$  ist stets unterer Abschnitt von  $(X, \leq)$ .

b) Für jedes  $b \in X$  sind die Mengen  $A(b) = \{x \in X \mid x < b\}$  untere Abschnitte von  $X$ . Sie werden auch *untere Hauptabschnitte* genannt.

c) Ist  $(X, \leq)$  wohlgeordnet, dann ist jeder untere Abschnitt  $A \neq X$  gegeben durch ein  $b \in X$  gemäß  $A = \{x \in X \mid x < b\}$ , denn mit  $b = \min(X \setminus A)$  gilt für alle  $x \in X$

$$x \in A \iff x \notin X \setminus A \iff x < b.$$

## 5 Vollständigkeit

**Satz 5.1** In einer *p. o. Menge*  $(X, \leq)$  werden die folgenden Eigenschaften betrachtet:

(1) Jede nichtleere *nach oben beschränkte Teilmenge* hat ein *Supremum*.

(2) Jede nichtleere *nach unten beschränkte Teilmenge* hat ein *Infimum*.

(3) Jede nichtleere *beschränkte Teilmenge* hat ein *Supremum* und ein *Infimum*.

Dann gilt  $(1) \iff (2) \implies (3)$ . Ist  $(X, \leq)$  sogar ein  $\wedge$ -*Halbverband* oder ein  $\vee$ -*Halbverband*, so sind alle drei Eigenschaften gleichwertig.

**Definition 5.2** Eine p. o. Menge  $(X, \leq)$  heißt *bedingt vollständig*, wenn sie (1) und (2) aus Satz 5.1 erfüllt; sie heißt *vollständig*, wenn jede Teilmenge  $T$  von  $X$  ein Supremum und ein Infimum besitzt.

**Folgerung 5.3** Insbesondere ist also jede vollständige p. o. Menge  $(X, \leq)$  ein *Verband* mit dem kleinsten Element  $o = \sup \emptyset = \inf X$  und dem größten Element  $e = \inf \emptyset = \sup X$ .

**Satz 5.4** Für eine p. o. Menge  $(X, \leq)$  sind äquivalent:

(1)  $(X, \leq)$  ist ein *vollständiger Verband*.

(2) Jede Teilmenge hat ein *Supremum*.

(3) Jede Teilmenge hat ein *Infimum*.

(4) Es ist  $X \neq \emptyset$  und jede nichtleere Teilmenge hat ein *Supremum* und ein *Infimum*.

**Folgerung 5.5** Für eine endliche p. o. Menge  $(X, \leq)$  sind äquivalent:

(1)  $(X, \leq)$  ist ein *vollständiger Verband*.

(2)  $(X, \leq)$  ist ein *Verband*.

(3)  $(X, \leq)$  ist ein  $\vee$ -*Halbverband* mit einem kleinsten Element.

(4)  $(X, \leq)$  ist ein  $\wedge$ -*Halbverband* mit einem größten Element.

**Folgerung 5.6** *Es sei  $(X, \leq)$  eine p. o. Menge. Adjungiert man dazu ein größtes Element  $\infty \notin X$  und ein kleinstes Element  $-\infty \notin X$ , so ist  $(X, \leq)$  genau dann bedingt vollständig, wenn  $X' = X \cup \{-\infty, \infty\}$  bezüglich der erweiterten partiellen Ordnung ein vollständiger Verband ist.*

## 6 Homomorphismen und Galois-Korrespondenzen

(Evariste Galois, 1811 – 1832)

**Definition 6.1** Es seien  $(X, \leq)$  und  $(X', \leq')$  p. o. Mengen. Dann heißt eine Abbildung  $f : X \rightarrow X'$  *isoton*, *ordnungserhaltend* oder ein *Ordnungshomomorphismus*, wenn

$$(60) \quad x \leq y \implies f(x) \leq' f(y)$$

für alle  $x, y \in X$  erfüllt ist, und eine (*Ordnungs-*)*Einbettung*, wenn sogar

$$(61) \quad x \leq y \iff f(x) \leq' f(y)$$

gilt. Ein (*Ordnungs-*)*Isomorphismus* ist eine surjektive Einbettung. Dagegen heißt  $f$  *antiton* oder *ordnungsumkehrend*, wenn

$$(62) \quad x \leq y \implies f(x) \geq' f(y)$$

für alle  $x, y \in X$  erfüllt ist. Ein *Anti-Isomorphismus* ist eine antitone bijektive Abbildung, deren Umkehrabbildung ebenfalls antiton ist.

**Folgerung 6.2** *Jede Einbettung ist injektiv. Daher sind die Isomorphismen genau die isotonen bijektiven Abbildungen, deren Umkehrabbildungen ebenfalls isoton sind.*

**Definition 6.3** Es seien  $(X, \leq)$  und  $(X', \leq')$  p. o. Mengen. Dann heißt eine Abbildung  $f : X \rightarrow X'$  ein  $\wedge$ -*Homomorphismus*, wenn

$$(63) \quad z = x \wedge y \implies f(z) = f(x) \wedge' f(y)$$

für alle  $x, y, z \in X$  erfüllt ist. Dual dazu werden  $\vee$ -*Homomorphismen* definiert. Sind  $(X, \leq)$  und  $(X', \leq')$  *Verbände* und ist  $f : X \rightarrow X'$  sowohl ein  $\wedge$ - als auch ein  $\vee$ -*Homomorphismus*, dann heißt  $f$  ein *Verbandshomomorphismus*.

**Folgerung 6.4** Jeder Isomorphismus ist ein  $\wedge$ - und ein  $\vee$ -Homomorphismus.

**Folgerung 6.5** Sind  $(X, \leq)$  und  $(X', \leq')$   $\wedge$ -Halbverbände und ist  $f : X \rightarrow X'$  eine bijektive Abbildung, dann sind äquivalent:

- (1)  $f$  ist ein Isomorphismus.
- (2)  $f$  ist ein  $\wedge$ -Homomorphismus.

**Folgerung 6.6** Seien  $(X, \leq)$  und  $(X', \leq')$  Verbände. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow X'$  ist genau dann ein Isomorphismus, wenn sie ein bijektiver Verbandshomomorphismus ist. In diesem Fall ist auch die Umkehrabbildung  $f^{-1} : X' \rightarrow X$  ein Isomorphismus.

**Definition 6.7** Eine Selbstabbildung  $f : X \rightarrow X$  einer p. o. Menge  $(X, \leq)$  heißt *extensiv*, wenn

$$(64) \quad x \leq f(x),$$

und *idempotent*, wenn

$$(65) \quad f(f(x)) = f(x),$$

für alle  $x \in X$  gilt. Eine extensive, isotone und idempotente Selbstabbildung heißt *Hüllenfunktion von  $X$* . Für  $x \in X$  heißt  $f(x)$  dann die *Hülle* von  $x$ .

**Bemerkung 6.8** Für jede Selbstabbildung  $f : X \rightarrow X$  ist die Menge  $Fix(f) = \{x \in X \mid x = f(x)\}$  aller *Fixpunkte* von  $f$  natürlich im Bild  $f(X)$  enthalten. Offensichtlich sind beide Mengen genau dann gleich, wenn  $f$  idempotent ist.

**Folgerung 6.9** Eine Selbstabbildung  $f : X \rightarrow X$  einer p. o. Menge  $(X, \leq)$  ist genau dann eine Hüllenfunktion, wenn für alle  $x, y \in X$  gilt

$$(66) \quad x \leq f(y) \iff f(x) \leq f(y).$$

**Beispiel 6.10** Es sei  $(X, \leq)$  ein vollständiger Verband und  $Y \subseteq X$ . Definiert man  $f : X \rightarrow X$  gemäß  $f(x) = \inf\{y \in Y \mid x \leq y\}$ , dann ist  $f$  eine Hüllenfunktion von  $X$ .

**Definition 6.11** Es sei  $(X, \leq)$  ein **v-Halbverband** mit einem kleinsten Element  $o \in X$ . Eine Hüllenfunktion  $f : X \rightarrow X$  heißt eine *Kuratowski-Hüllenfunktion*, wenn  $o \in \text{Fix}(f)$  gilt und  $\text{Fix}(f)$  ein  $\vee$ -Unterhalbverband von  $X$  ist.

**Folgerung 6.12** Es sei  $(X, \leq)$  ein  $\vee$ -Halbverband mit einem kleinsten Element  $o \in X$ . Eine Selbstabbildung  $f : X \rightarrow X$  ist genau dann eine Kuratowski-Hüllenfunktion, wenn sie *extensiv*, *idempotent* und ein  $\vee$ -Homomorphismus ist und wenn  $o \in \text{Fix}(f)$  gilt.

**Satz 6.13** Es seien  $(X, \leq)$  und  $(X', \leq')$  **p. o. Mengen**. Für Abbildungen  $\varphi : X \rightarrow X'$  und  $\psi : X' \rightarrow X$  sind äquivalent:

- (1) Für alle  $x \in X$  und  $x' \in X'$  gilt  $x' \leq' \varphi(x) \iff x \leq \psi(x')$ .
- (2) Die Abbildungen  $\varphi$  und  $\psi$  sind **antiton**, und es gilt  $x \leq \psi(\varphi(x))$  für alle  $x \in X$  sowie  $x' \leq' \varphi(\psi(x'))$  für alle  $x' \in X'$ .
- (3) Die Abbildungen  $\varphi$  und  $\psi$  sind **antiton**, und die Abbildungen  $\varphi \circ \psi$  und  $\psi \circ \varphi$  sind **Hüllenfunktionen**.

Jede dieser Aussagen impliziert

$$(67) \quad \varphi \circ \psi \circ \varphi = \varphi \quad \text{und} \quad \psi \circ \varphi \circ \psi = \psi.$$

**Definition 6.14** Ein Paar von Abbildungen  $(\varphi, \psi)$ , das eine und damit jede der Bedingungen (1) – (3) aus Satz 6.13 erfüllt, heißt *Galois-Korrespondenz* zwischen  $(X, \leq)$  und  $(X', \leq')$ .

**Folgerung 6.15** Sei  $(\varphi, \psi)$  eine Galois-Korrespondenz zwischen den **p. o. Mengen**  $(X, \leq)$  und  $(X', \leq')$ . Dann gilt für alle  $x, x_j \in X$ ,  $x', x'_j \in X'$  ( $j \in J$ )

$$(68) \quad x = \sup\{x_j \mid j \in J\} \implies \varphi(x) = \inf\{\varphi(x_j) \mid j \in J\},$$

$$(69) \quad x' = \sup\{x'_j \mid j \in J\} \implies \psi(x') = \inf\{\psi(x'_j) \mid j \in J\}.$$

**Beispiel 6.16** Es seien  $X$  und  $Y$  beliebige Mengen und  $\varrho \subseteq X \times Y$  eine Relation. Definiert man  $\varphi_\varrho : \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(Y)$  bzw.  $\psi_\varrho : \mathfrak{P}(Y) \rightarrow \mathfrak{P}(X)$  durch

$$(70) \quad \varphi_\varrho(A) = \{y \in Y \mid x \varrho y \text{ für alle } x \in A\} \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{P}(X) \text{ bzw.}$$

$$(71) \quad \psi_\varrho(B) = \{x \in X \mid x \varrho y \text{ für alle } y \in B\} \quad \text{für alle } B \in \mathfrak{P}(Y),$$

dann ist  $(\varphi_\varrho, \psi_\varrho)$  eine **Galois-Korrespondenz** zwischen  $(\mathfrak{P}(X), \subseteq)$  und  $(\mathfrak{P}(Y), \subseteq)$ .

**Satz 6.17** Sei  $(\varphi, \psi)$  eine *Galois-Korrespondenz* zwischen den Potenzmengen  $(\mathfrak{P}(X), \subseteq)$  und  $(\mathfrak{P}(Y), \subseteq)$  für beliebige Mengen  $X$  und  $Y$ . Dann definiert

$$(72) \quad x \varrho y \iff y \in \varphi(\{x\}) \iff x \in \psi(\{y\})$$

eine Relation  $\varrho \subseteq X \times Y$ , so daß  $(\varphi, \psi) = (\varphi_\varrho, \psi_\varrho)$  gilt.

## 7 Fixpunktsätze

### Satz 7.1 (Fixpunktsatz von Tarski)

(Alfred Tarski, 1901 – 1983)

Es sei  $(X, \leq)$  ein **vollständiger Verband** und  $f : X \rightarrow X$  eine **isotone** Abbildung. Dann ist  $\text{Fix}(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$  bezüglich der Einschränkung von  $\leq$  auf  $\text{Fix}(f)$  ein **vollständiger Verband**, insbesondere also nicht leer.

**Bemerkung 7.2** Es gilt die folgende Umkehrung:

Ein Verband, in dem jede isotone Selbstabbildung einen Fixpunkt besitzt, ist vollständig.

**Satz 7.3** Sei Menge  $(X, \leq)$  eine **p. o. Menge**, so daß jede nichtleere **wohlgeordnete** Teilmenge von  $X$  ein **Supremum** in  $X$  besitzt. Dann gilt:

- a) Zu jeder **extensiven** Abbildung  $f : X \rightarrow X$  existiert ein  $x \in \text{Fix}(f)$ .
- b) Es gibt ein  $x \in X$  mit  $x \in \text{Fix}(f)$  für jede extensive Abbildung  $f : X \rightarrow X$ .

**Bemerkung 7.4** Aus b) folgt ersichtlich a), aber während sich a) ohne **Auswahlaxiom** oder eine äquivalente Forderung beweisen läßt, ist die Aussage von b) äquivalent zum **Zornschen Lemma** (und daher auch zum Auswahlaxiom). Dies zeigt der folgende Satz.

**Satz 7.5** In einer **p. o. Menge**  $(X, \leq)$  sind für alle  $x \in X$  gleichwertig:

- (1)  $x$  ist maximal.
- (2) Für jede extensive Abbildung  $f : X \rightarrow X$  gilt  $x \in \text{Fix}(f)$ .

**Definition 7.6** Seien  $(X, \leq)$  eine p. o. Menge,  $f : X \rightarrow X$  eine extensive Abbildung und  $a \in X$ . Eine Teilmenge  $T$  von  $X$  heißt  **$f$ -Turm über  $a$** , wenn die folgenden Bedingungen gelten:

- (1)  $a \in T$  ist kleinstes Element von  $T$ ,
- (2)  $x \in T \implies f(x) \in T$ ,
- (3)  $\emptyset \neq Y \subseteq T$  und  $\sup Y$  existiert in  $X \implies \sup Y \in T$ .

**Bemerkung 7.7** Da stets  $T = \{x \in X \mid a \leq x\}$  ein  $f$ -Turm über  $a$  ist, existiert immer der *kleinste*  $f$ -Turm  $T_a$  über  $a$  nämlich  $T_a = \bigcap \{T \mid T \text{ ist } f\text{-Turm über } a\}$ .

**Satz 7.8** Sei  $(X, \leq)$  eine *p. o. Menge* und  $f : X \rightarrow X$  *extensiv*. Für alle  $a \in X$  ist dann  $T_a$  *wohlgeordnet*.

## 8 Begriffsverbände

**Definition 8.1** Ein (einwertiger) *Kontext*  $\mathcal{K} = (G, M, \kappa)$  besteht aus

- einer Menge  $G$  von *Gegenständen* oder *Objekten*,
- einer Menge  $M$  von *Merkmalen* oder *Attributen* und
- einer *Inzidenzrelation*  $\kappa \subseteq G \times M$ .

Dabei bedeutet  $g\kappa m$ , daß der Gegenstand  $g \in G$  das Merkmal  $m \in M$  besitzt.

Bezeichnet  $(\varphi_\kappa, \psi_\kappa)$  die gemäß Beispiel 6.16 zu  $\kappa \subseteq G \times M$  gehörende **Galois-Korrespondenz** zwischen  $(\mathfrak{P}(G), \subseteq)$  und  $(\mathfrak{P}(M), \subseteq)$ , so heißt ein Paar  $(A, B) \in \mathfrak{P}(G) \times \mathfrak{P}(M)$  mit  $\varphi_\kappa(A) = B$  und  $\psi_\kappa(B) = A$  ein *Begriff* von  $\mathcal{K}$ . Dabei nennt man  $A$  den *Umfang* oder die *Extension* und  $B$  den *Inhalt* oder die *Intension* von  $(A, B)$ . Mit  $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$  werde die Menge aller Begriffe von  $\mathcal{K}$  bezeichnet.

**Satz 8.2** *Es sei  $\mathcal{K} = (G, M, \kappa)$  ein Kontext. Durch*

$$(8.1) \quad (A_1, B_1) \sqsubseteq (A_2, B_2) \iff A_1 \subseteq A_2$$

für alle  $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \mathfrak{B}(\mathcal{K})$  wird dann eine **partielle Ordnung** auf  $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$  definiert, so daß  $(\mathfrak{B}(\mathcal{K}), \sqsubseteq)$  ein **vollständiger Verband**, der Begriffsverband von  $\mathcal{K}$  ist. Dabei erhält man für  $(A_j, B_j) \in \mathfrak{B}(\mathcal{K})$  ( $j \in J$ ) **Supremum** und **Infimum** gemäß

$$(73) \quad \sup_{j \in J} (A_j, B_j) = (\psi_\kappa \circ \varphi_\kappa(\bigcup A_j), \bigcap B_j) \quad \text{und}$$

$$(74) \quad \inf_{j \in J} (A_j, B_j) = (\bigcap A_j, \varphi_\kappa \circ \psi_\kappa(\bigcup B_j)).$$

Ist umgekehrt  $\mathcal{V} = (X, \leq)$  ein vollständiger Verband, so ist  $\mathcal{V}$  genau dann zu dem Begriffsverband  $\mathfrak{B}(G, M, \kappa)$  **isomorph**, wenn es Abbildungen  $\gamma : G \rightarrow X$  und  $\mu : M \rightarrow X$  gibt, so daß gilt

$$(75) \quad X = \{\sup A \mid A \subseteq \gamma(G)\},$$

$$(76) \quad X = \{\inf B \mid B \subseteq \mu(M)\} \quad \text{und}$$

$$(77) \quad g\kappa m \iff \gamma(g) \leq \mu(m) \quad \text{für alle } g \in G, m \in M.$$

Inbesondere hat man stets  $\mathcal{V} \cong \mathfrak{B}(X, X, \leq)$ .

**Satz 8.3** *Seien  $(X, \leq)$  eine **p. o. Menge** und  $\mathcal{K} = (X, X, \leq)$ . Dann wird durch*

$$(78) \quad f(x) = (\{y \in X \mid y \leq x\}, \{y \in X \mid x \leq y\}) \quad \text{für alle } x \in X$$

eine **Einbettung** von  $(X, \leq)$  in  $(\mathfrak{B}(\mathcal{K}), \sqsubseteq)$  definiert.

## 9 Informationsstrukturen

**Definition 9.1** Eine **p. o. Menge**  $(I, \leq)$  heißt eine *Informationsstruktur*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Es existiert ein **kleinstes Element**  $o \in I$ , die *leere Information*.
- (2) Für  $a, b \in I$  existiert stets das **Infimum**  $a \wedge b \in I$ .
- (3) Zu  $a, b, x \in I$  mit  $a \leq x$  und  $b \leq x$  existiert das **Supremum**  $a \vee b \in I$ .

**Bemerkung 9.2** Informationsstrukturen sind also nach unten beschränkte  $\wedge$ -**Halbverbände**, für die jedes Intervall  $[o, x] = \{a \in I \mid o \leq a \leq x\}$  ein **Verband** ist.

**Definition 9.3** Es seien  $(I, \leq)$  eine Informationsstruktur und  $a, b \in I$ . Ein Element  $a \setminus b = c \in I$  heißt *Löschung von b aus a*, wenn  $c$  das größte Element von  $(I, \leq)$  mit  $c \leq a$  und  $c \wedge b = o$  ist. Wenn  $a \setminus b$  für alle  $a, b \in I$  existiert, so heißt  $(I, \leq)$  eine *Informationsstruktur mit Löschung*.

**Satz 9.4** Sei  $(I, \leq)$  eine Informationsstruktur mit Löschung. Dann gelten für alle  $a, b, c \in I$

- (79)  $a \setminus o = a$ ,
- (80)  $a \setminus a = o$ ,
- (81)  $a \leq b \implies a \setminus c \leq b \setminus c$  und  $c \setminus a \geq c \setminus b$ ,
- (82)  $(a \wedge b) \setminus c = (a \setminus c) \wedge (b \setminus c)$ ,
- (83)  $(a \setminus b) \setminus c = (a \setminus c) \setminus b$ ,
- (84)  $a \setminus (b \setminus a) = a$ .

**Definition 9.5** Es sei  $I$  eine nichtleere Menge und  $*$  eine zweistellige **Verknüpfung** auf  $I$ . Dann heißt  $(I, *)$  eine *Semi-Boolesche Algebra* oder *Implikationsalgebra*, wenn für alle  $a, b, c \in I$  gelten:

- (85)  $(a * b) * c = (a * c) * b$ ,
- (86)  $a * (b * a) = a$ ,
- (87)  $a * (a * b) = b * (b * a)$ .

**Satz 9.6** *Es sei  $(I, *)$  eine Semi-Boolesche Algebra. Dann gilt*

$$(88) \quad a * a = b * b \text{ für alle } a, b \in I.$$

*Definiert man*

$$(89) \quad o = a * a \text{ für ein beliebiges } a \in I \text{ und}$$

$$(90) \quad a \leq b \iff a * b = o \text{ für alle } a, b \in I,$$

*dann ist  $(I, \leq)$  eine Informationsstruktur mit Löschung  $a \setminus b = a * b$  und  $a \wedge b = b * (b * a)$  für alle  $a, b \in I$ . Weiterhin ist  $[o, x] = \{a \in I \mid o \leq a \leq x\}$  für alle  $x \in I$  eine **Boolesche Algebra**, in der für  $a, b \in [o, x]$  das Supremum bestimmt ist durch  $a \vee b = x * (x * a \wedge x * b)$ .*

**Bemerkung 9.7** In einer Informationsstruktur  $(I, \leq)$  mit Löschung muß nicht immer  $a \setminus (a \setminus b) = b \setminus (b \setminus a)$  gelten.

**Definition 9.8** Es seien  $(I, \leq)$  eine Informationsstruktur und  $a, b \in I$ . Ein Element  $b/a = c \in I$  heißt *Anpassung von  $b$  an  $a$* , wenn  $c$  das größte Element von  $(I, \leq)$  mit  $c \leq b$  ist, zu dem  $a \vee c \in I$  existiert. In diesem Fall heißt  $a \& b = a \vee b/a$  die *Aufdatierung von  $a$  mit  $b$* . Wenn  $b/a$  und daher auch  $a \& b$  für alle  $a, b \in I$  existiert, so heißt  $(I, \leq)$  eine *Informationsstruktur mit Aufdatierung*.

**Bemerkung 9.9** Man kann die zur Aufdatierung links-rechts-dual Verknüpfung  $a \&'b = b \& a = b \vee a/b$  auch als *Überschreibung von  $a$  durch  $b$*  auffassen.

**Satz 9.10** *Sei  $(I, \leq)$  eine Informationsstruktur mit Aufdatierung. Dann sind die Verknüpfungen  $\setminus$  und  $\&$  **idempotent**, aber i. a. weder **kommutativ** noch **assoziativ**. Weiterhin gelten für alle  $a, b, c \in I$*

$$(91) \quad a \leq b \implies a/c \leq b/c \text{ und } c/a \geq c/b,$$

$$(92) \quad (a \wedge b)/c = (a/c) \wedge (b/c),$$

$$(93) \quad (a/b)/c = (a/c)/b,$$

$$(94) \quad a/(b/a) = a,$$

$$(95) \quad o \& a = a \& o = a,$$

$$(96) \quad a \leq b \implies c \& a \leq c \& b,$$

$$(97) \quad a \leq b \implies a \& c \leq b \& c, \text{ falls ein } x \in I \text{ mit } a \& c, b \& c \leq x \text{ existiert.}$$

**Definition 9.11** Es sei  $X \neq \emptyset$  eine Menge von “Informationsbruchstücken” und  $C \subseteq \mathfrak{P}(X)$  mit

- i)  $\{x\} \in C$  für alle  $x \in X$ ,
- ii)  $c \in C \implies |c| < \infty$ ,
- iii)  $a \in C$  und  $b \subseteq a \implies b \in C$ ,

eine Menge “konsistenter” Teilmengen von  $X$ .

Eine *Folgerungsrelation* für  $X$  bezüglich  $C$  ist eine **Quasiordnung**  $\vdash$  auf  $C$  mit

- iv)  $a \vdash b$ ,  $b' \subseteq b$  und  $a \subseteq a' \in C \implies a' \vdash b'$ ,
- v)  $a \vdash b$  und  $a \vdash c \implies a \vdash b \cup c$ .

Unter diesen Bedingungen heißt  $(X, C, \vdash)$  ein *Informationssystem*.

**Satz 9.12** Es sei  $(X, C, \vdash)$  ein Informationssystem und  $I \subseteq \mathfrak{P}(X)$  die Menge aller Teilmengen  $a$  von  $X$ , welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (1)  $b \subseteq a$  und  $|b| < \infty \implies b \in C$ ,
- (2)  $b \subseteq a$  und  $b \vdash \{x\}$  für ein  $x \in X \implies x \in a$ .

Dann ist  $(I, \subseteq)$  eine *Informationsstruktur*.

## 10 Heyting-Algebren

(Arend Heyting, 1898 - 1980)

**Beispiel 10.1** (Vgl. Beispiel 1.2) Auf der Potenzmenge  $\mathfrak{P}(M)$  einer beliebigen Menge  $M$  können mit Hilfe der bekannten mengentheoretischen **Verknüpfungen**  $\cup$  (Vereinigung),  $\cap$  (Durchschnitt) und  $'$  (Komplementbildung) noch weitere zwei-stellige Verknüpfungen definiert werden, beispielsweise für alle  $X, Y \in \mathfrak{P}(M)$

(1) die *mengentheoretische Differenz* gemäß  $X \setminus Y = X \cap Y'$  und

(2) die *mengentheoretische Implikation* gemäß  $X \rightarrow Y = X' \cup Y$

(3) die *symmetrische Differenz* gemäß

$$X \Delta Y = (X \cap Y') \cup (Y \cap X') = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

Dann gelten für alle  $X, Y, Z \in \mathfrak{P}(M)$  die folgenden Gesetze.

$$(98) \quad X \subseteq Y \iff X \setminus Y = \emptyset \iff X \rightarrow Y = M$$

$$(99) \quad X \setminus Y = \emptyset \text{ und } Y \setminus X = \emptyset \implies X = Y$$

$$(100) \quad X \rightarrow Y = M \text{ und } Y \rightarrow X = M \implies X = Y$$

$$(101) \quad X \setminus X = \emptyset$$

$$(102) \quad X \rightarrow X = M$$

$$(103) \quad \emptyset \setminus X = \emptyset$$

$$(104) \quad X \rightarrow M = M$$

$$(105) \quad (Y \setminus X) \cup Y = Y$$

$$(106) \quad (X \rightarrow Y) \cap Y = Y$$

$$(107) \quad X \cup (Y \setminus X) = X \cup Y$$

$$(108) \quad X \cap (X \rightarrow Y) = X \cap Y$$

$$(109) \quad (Y \cup Z) \setminus X = (Y \setminus X) \cup (Z \setminus X)$$

$$(110) \quad X \rightarrow (Y \cap Z) = (X \rightarrow Y) \cap (X \rightarrow Z)$$

$$(111) \quad Z \setminus (X \cap Y) = (Z \setminus X) \cup (Z \setminus Y)$$

$$(112) \quad (X \cup Y) \rightarrow Z = (X \rightarrow Z) \cap (Y \rightarrow Z)$$

$$(113) \quad Z \setminus (X \cup Y) = (Z \setminus X) \setminus Y$$

$$(114) \quad (X \cap Y) \rightarrow Z = X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$$

$$(115) \quad X \setminus (Y \setminus X) = X$$

$$(116) \quad (X \rightarrow Y) \rightarrow X = X$$

$$(117) \quad (X \setminus Y) \setminus X = \emptyset$$

$$(118) \quad X \rightarrow (Y \rightarrow X) = M$$

$$(119) \quad (X \setminus Y) \setminus Y = X \setminus Y$$

$$(120) \quad Y \rightarrow (Y \rightarrow X) = Y \rightarrow X$$

$$(121) \quad Y \setminus (Y \setminus X) = X \setminus (X \setminus Y)$$

$$(122) \quad (X \rightarrow Y) \rightarrow Y = (Y \rightarrow X) \rightarrow X$$

$$(123) \quad (Z \setminus Y) \setminus X = (Z \setminus X) \setminus Y$$

$$(124) \quad X \rightarrow (Y \rightarrow Z) = Y \rightarrow (X \rightarrow Z)$$

$$(125) \quad (Z \setminus Y) \setminus X = (Z \setminus X) \setminus (Y \setminus X)$$

$$(126) \quad X \rightarrow (Y \rightarrow Z) = (X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z)$$

$$(127) \quad (X \setminus (X \setminus Y)) \setminus Y = \emptyset$$

$$(128) \quad Y \rightarrow ((Y \rightarrow X) \rightarrow X) = M$$

$$(129) \quad ((X \setminus Y) \setminus (X \setminus Z)) \setminus (Z \setminus Y) = \emptyset$$

$$(130) \quad (Y \rightarrow Z) \rightarrow ((Z \rightarrow X) \rightarrow (Y \rightarrow X)) = M$$

$$\begin{aligned} X \Delta Y &= Y \Delta X && (\Delta \text{ ist kommutativ}) \\ X \Delta \emptyset &= X && (\emptyset \text{ ist neutral bezüglich } \Delta) \\ X \Delta X &= \emptyset && (X \text{ ist Inverses zu } X \text{ bezüglich } \Delta) \\ (X \Delta Y) \Delta Z &= X \Delta (Y \Delta Z) && (\Delta \text{ ist assoziativ}) \end{aligned}$$

Damit ist insbesondere  $(\mathfrak{P}(M), \Delta)$  eine **abelsche Gruppe**.

**Definition 10.2** Eine *Heyting-Algebra*  $\mathcal{H} = (X, \wedge, \vee, \rightarrow, o, e)$  besteht aus einer (nichtleeren) Menge  $X$ , zwei ausgezeichneten Elementen, dem *Nullelement*  $o \in X$  und dem *Einselement*  $e \in X$  und drei zweistelligen Verknüpfungen, der *Infimumsbildung*  $\wedge$ , der *Supremumbildung*  $\vee$  und der *Implikation*  $\rightarrow$ . Dabei müssen für alle  $x, y, z \in X$  folgende Axiome erfüllt sein:

- (131)  $(X, \wedge, \vee)$  ist ein **distributiver Verband**,
- (132)  $x \vee e = e$  und  $x \wedge o = o$ , d. h.  $(X, \wedge, \vee, o, e)$  ist **beschränkt**,
- (133)  $x \rightarrow x = e$ ,
- (134)  $(x \rightarrow y) \wedge y = y$ ,
- (135)  $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$ ,
- (136)  $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$ ,
- (137)  $(x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$ .

**Bemerkung 10.3** Heyting-Algebren wurden erstmals von **G. Birkhoff** unter dem Namen *Brouwersche Algebren* eingeführt, um die Implikation der intuitionistischen Logik nach **Luitzen Egbertus Jan Brouwer** (1881 - 1966) zu modellieren.

**Definition 10.4** Es sei  $(X, \wedge, \vee)$  ein **Verband** und  $a, b \in X$ . Ein Element  $c \in X$  heißt ein *Pseudokomplement von  $a$  bezüglich  $b$* , wenn für alle  $x \in X$  gilt

$$(138) \quad x \leq c \iff a \wedge x \leq b,$$

d. h. wenn  $c$  größtes Element in  $(X, \leq)$  ist, das  $a \wedge c \leq b$  erfüllt. Im Falle der Existenz wird dieses Element dann mit  $a \rightarrow b$  bezeichnet.

Ein Verband heißt *pseudokomplementär*, wenn  $a \rightarrow b$  für alle  $a, b \in X$  existiert.

**Folgerung 10.5** In jedem Verband  $(X, \wedge, \vee)$  gelten die folgenden Aussagen.

- a) Existiert  $a \rightarrow b$ , so gilt  $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b \leq a \rightarrow b$  für alle  $a, b \in X$ .
- b) Existiert das Pseudokomplement  $a \rightarrow b$  für zwei Elemente  $a, b \in X$  mit  $a \leq b$ , so ist  $e = a \rightarrow b$  Einselement von  $(X, \wedge, \vee)$  und es folgen  $x \rightarrow x = e$ ,  $x \rightarrow e = e$  und  $e \rightarrow x = x$  für alle  $x \in X$  einschließlich der Existenz dieser Pseudokomplemente.
- c) Besitzt  $(X, \wedge, \vee)$  ein Einselement  $e$ , so hat man für alle  $a, b \in X$

$$(139) \quad a \leq b \iff a \rightarrow b \text{ existiert und es ist } a \rightarrow b = e.$$

d) Besitzt  $(X, \wedge, \vee)$  ein Nullelement  $o$ , so existiert  $o \rightarrow b$  für alle  $b \in X$  und es ist dann  $o \rightarrow b = e$  Einselement von  $(X, \wedge, \vee)$ .

e) Aus  $a \leq b$  folgt  $a \rightarrow c \geq b \rightarrow c$ , falls diese beiden Pseudokomplemente existieren, für alle  $a, b, c \in X$ .

f) Aus  $b \leq c$  folgt  $a \rightarrow b \leq a \rightarrow c$ , falls diese beiden Pseudokomplemente existieren, für alle  $a, b, c \in X$ .

**Bemerkung 10.6** a) Wegen Folgerung 10.5 b) besitzt jeder pseudokomplementäre Verband ein Einselement und ist folglich genau dann beschränkt, wenn er auch noch ein Nullelement besitzt. Solche pseudokomplementären Verbände heißen auch *pseudoboolesche Verbände* oder *pseudoboolesche Algebren*.

b) Jede nach oben beschränkte Kette  $(X, \wedge, \vee, e)$  ist ein pseudokomplementärer Verband, so daß es pseudokomplementäre Verbände ohne Nullelement gibt. Für das Pseudokomplement  $x \rightarrow y$  ist im Fall  $x \leq y$  wegen (139)  $e$  zu nehmen und für  $y < x$  offensichtlich  $y$ .

c) Die beiden beschränkten, nicht distributiven Verbände aus Beispiel 2.10 zeigen, daß es **komplementäre** Verbände gibt, die (wegen Satz 10.8) nicht pseudokomplementär sind.

d) Ist  $(X, \wedge, \vee, ', o, e)$  eine **Boolesche Algebra**, so ist stets  $x \rightarrow y = x' \vee y$  Pseudokomplement von  $x$  bezüglich  $y$ , d. h.  $(X, \wedge, \vee, \rightarrow, o, e)$  ist eine pseudoboolesche Algebra. Insbesondere gilt dann  $x' = x \rightarrow o$  für alle  $x \in X$ .

**Satz 10.7** Ein beschränkter Verband  $(X, \wedge, \vee, o, e)$  ist genau dann pseudoboolesch, wenn neben (133), (134) und (135) noch

$$(140) (x \wedge y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z)$$

für alle  $x, y, z \in X$  erfüllt ist.

**Satz 10.8** Jeder pseudoboolesche Verband ist **distributiv**.

**Satz 10.9** Ist  $(X, \wedge, \vee, o, e)$  ein pseudoboolescher Verband, so ist  $(X, \wedge, \vee, \rightarrow, o, e)$  eine Heyting-Algebra und umgekehrt.

**Satz 10.10** *Eine Heyting-Algebra  $(X, \wedge, \vee, \rightarrow, o, e)$  ist genau dann eine Boolesche Algebra  $(X, \wedge, \vee, ', o, e)$ , wenn für alle  $x \in X$  gilt*

$$(141) \quad x \vee (x \rightarrow o) = e.$$

**Beweis.** Jede Boolesche Algebra ist gemäß Bemerkung 10.6 d) und Satz 10.9 eine Heyting-Algebra, in der (141) erfüllt ist. Gilt in einer Heyting-Algebra aber (141), so erfüllt  $x' = x \rightarrow o$  wegen (135) auch  $x \wedge x' = o$ , ist also Komplement zu  $x$  in dem beschränkten distributiven Verband  $(X, \wedge, \vee, o, e)$ , d. h. dieser ist komplementär, also eine Boolesche Algebra.

## 11 Aufgaben

**Aufgabe 11.1** Für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  sei  $X_n$  die Menge aller Teiler von  $n$ . Definiert man  $a \wedge b$  als größten gemeinsamen Teiler und  $a \vee b$  als kleinstes gemeinsames Vielfaches von  $a, b \in X_n$  sowie  $a' = n/a$ , dann ist  $(X_n, \wedge, \vee, ', 1, n)$  genau für quadratfreies  $n$  eine **Boolesche Algebra** (vgl. Bemerkung 1.15 a)).

**Aufgabe 11.2** Es sei  $\mathcal{B} = (X, \wedge, \vee, ', o, e)$  eine Boolesche Algebra, in der  $o = e$  gilt. Zeigen Sie  $|X| = 1$ .

**Aufgabe 11.3** Es sei  $M$  eine beliebige Menge und

$$X = \{A \subseteq M \mid A \text{ endlich oder } M \setminus A \text{ endlich}\}.$$

Dann ist  $(X, \cap, \cup, ', \emptyset, M)$  eine Boolesche Algebra (vgl. Bemerkung 1.15 b)).

**Aufgabe 11.4** Es seien  $\wedge$  und  $\vee$  zwei binäre Verknüpfungen auf einer Menge  $X \neq \emptyset$ , so daß die Absorptionsgesetze  $x \wedge (x \vee y) = x$  und  $x \vee (x \wedge y) = x$  für alle  $x, y \in X$  erfüllt sind. Zeigen Sie, daß dann beide Verknüpfungen idempotent sind, d. h. es gilt  $x \wedge x = x$  und  $x \vee x = x$  für alle  $x \in X$ . Sind  $\wedge$  und  $\vee$  noch kommutativ, so gilt  $x \wedge y = x \iff x \vee y = y$  für alle  $x, y \in X$  (vgl. Folgerung 2.2).

**Aufgabe 11.5** In jeder Booleschen Algebra  $\mathcal{B} = (X, \wedge, \vee, ', o, e)$  sind für alle  $x, y \in X$  die folgenden Aussagen gleichwertig:

- i)  $x \wedge y = x$ ,
- ii)  $x \vee y = y$ ,
- iii)  $x' \vee y = e$ ,
- iv)  $x \wedge y' = o$ .

**Aufgabe 11.6** Es sei  $\mathcal{R} = (X, +, \cdot)$  ein **Boolescher Ring**. Zeigen Sie, daß  $\mathcal{R}$  die Charakteristik 2 hat und kommutativ ist, d. h. es gilt  $x + x = o$  und  $x \cdot y = y \cdot x$  für alle  $x, y \in X$ .

**Aufgabe 11.7** Es sei  $\mathcal{V} = (X, \wedge, \vee)$  ein distributiver Verband, in dem ein Nullelement  $o$  und ein Einselement  $e$  existiert. Dann besitzt jedes  $x \in X$  höchstens ein Komplement in  $\mathcal{V}$ . Weiterhin sei  $X' = \{x \in X \mid x \text{ besitzt ein Komplement in } \mathcal{V}\}$ . Dann ist  $(X', \wedge, \vee)$  ein Teilverband von  $\mathcal{V}$ , der sogar eine Boolesche Algebra ist.

**Aufgabe 11.8** Es sei  $\mathcal{V} = (X, \wedge, \vee)$  ein distributiver Verband, in dem eine einstellige Verknüpfung  $' : X \rightarrow X$  mit  $(x')' = x$ ,  $(x \wedge y)' = x' \vee y'$  und  $x \wedge x' = y \wedge y'$  für alle  $x, y \in X$  definiert ist. Dann ist  $(X, \vee, \wedge, ')$  eine Boolesche Algebra.

**Aufgabe 11.9** Beweisen Sie die Behauptungen über die beiden Verbände aus Beispiel 2.10.

**Aufgabe 11.10** Eine Teilmenge  $\emptyset \neq A \subseteq X$  eines Halbverbandes  $\mathcal{H} = (X, \vee)$  heißt ein *Ideal* von  $\mathcal{H}$ , wenn für alle  $a, b, x \in X$  gilt

i)  $a, b \in A \implies a \vee b \in A$  und

ii)  $a \in A, x \in X, x \leq a \implies x \in A$ .

Beides zusammen ist gleichwertig zu

iii)  $a \in A, b \in A \iff a \vee b \in A$ .

Ist  $\mathcal{V}$  sogar ein Verband, dann kann ii) ersetzt werden durch

iv)  $a \in A, x \in X \implies a \wedge x \in A$ .

Zeigen Sie, daß für jedes  $a \in X$  die Menge  $(a] = \{x \in X \mid x \leq a\}$  ein Ideal ist, und zwar das kleinste Ideal von  $\mathcal{V}$ , das  $a$  enthält. Man nennt es das *von  $a$  erzeugte Hauptideal*. Speziell für Potenzmengenverbände  $\mathcal{V} = \mathfrak{P}(M)$  nennt man die durch Dualisierung beschriebenen *dualen Ideale*  $F$  auch *Filter*, wobei man meist noch  $\emptyset \notin F$  fordert.

**Aufgabe 11.11** Die Menge  $\mathcal{I}(\mathcal{V})$  aller Ideale eines Verbandes  $\mathcal{V} = (X, \wedge, \vee)$  bildet bezüglich der Operationen

$$A \wedge B = A \cap B \quad \text{und}$$

$$A \vee B = \{x \in X \mid x \leq a \vee b \text{ für geeignete } a \in A, b \in B\}$$

für alle  $A, B \in \mathcal{I}(\mathcal{V})$  einen Verband  $(\mathcal{I}(\mathcal{V}), \wedge, \vee)$ , den *Idealverband* von  $\mathcal{V}$ .

**Aufgabe 11.12** Ist  $\mathcal{V} = (X, \wedge, \vee)$  ein distributiver Verband, dann ist auch der Idealverband  $\mathcal{I}(\mathcal{V})$  distributiv. In diesem Fall gilt  $A \vee B = \{a \vee b \mid a \in A, b \in B\}$  für alle  $A, B \in \mathcal{I}(\mathcal{V})$ . (Der Idealverband einer Booleschen Algebra ist dagegen nicht immer eine Boolesche Algebra.)

**Aufgabe 11.13** Für beliebige Mengen  $A, B$  bildet die Menge  $X$  aller partiellen Abbildungen aus  $A$  in  $B$  einen  $\wedge$ -Halbverband  $\mathcal{H} = (X, \leq)$ , wobei  $\varphi \leq \psi$  gemäß  $\varphi \subseteq \psi$  für alle  $\varphi, \psi \in X$  erklärt ist und auch die leere Relation  $\emptyset \subseteq A \times B$  als partielle Abbildung von  $A$  in  $B$  betrachtet wird. Für  $A \neq \emptyset$  und  $|B| > 1$  ist  $\mathcal{H}$  kein Verband.

**Aufgabe 11.14** Es sei  $(X, \leq)$  eine partiell geordnete Menge.

a) Gilt  $a_i \leq b_i$  für  $a_i, b_i \in X$  und alle  $i \in I$ , und existieren  $a = \inf\{a_i \mid i \in I\}$  und  $b = \inf\{b_i \mid i \in I\}$ , so folgt  $a \leq b$  und entsprechend für die Suprema.

b) Gilt  $a_i \leq b_j$  für  $a_i, b_j \in X$  und alle  $i \in I, j \in J$ , und existieren

$a = \sup\{a_i \mid i \in I\}$  und  $b = \inf\{b_j \mid j \in J\}$ , so folgt  $a \leq b$ .

**Aufgabe 11.15** Es sei  $((X_j, \leq_j))_{j \in J}$  eine Familie partiell geordneter Mengen und

$$X = \prod_{j \in J} X_j = \left\{ a \in \left( \bigcup_{j \in J} X_j \right)^J \mid a = (a_j)_{j \in J} \text{ mit } a_j \in X_j \text{ für alle } j \in J \right\}$$

das Cartesische Produkt der Mengenfamilie  $(X_j)_{j \in J}$ . Durch die Definition

$$(a_j)_{j \in J} \leq (b_j)_{j \in J} \iff a_j \leq_j b_j \quad \text{für alle } j \in J$$

wird  $(X, \leq)$  eine p. o. Menge, die das *direkte Produkt der Familie der p. o. Mengen*  $(X_j, \leq_j)$  genannt wird. Zeigen Sie die Behauptung über  $(X, \leq)$ , und geben Sie Kriterien dafür an, daß  $(X, \leq)$  unterer Halbverband, Verband oder total geordnet ist. Welche Eigenschaften haben jeweils die Projektionen  $\pi_j : X \rightarrow X_j$  gemäß  $a = (a_j)_{j \in J} \mapsto \pi_j(a) = a_j$ ?

**Aufgabe 11.16** Stimmen in Aufgabe 11.15 alle p. o. Mengen  $(X_j, \leq_j)$  überein, gilt also  $(X_j, \leq_j) = (X_{j_0}, \leq_{j_0})$  für alle  $j \in J$  und einen Index  $j_0 \in J$ , so erhält man als Spezialfall die p. o. Menge  $(X_{j_0}^J, \leq)$  aller Abbildungen von  $J$  in  $X_{j_0}$ . Beispiele dieser Art sind etwa  $(\mathbb{R}^J, \leq)$  bzw. der ‘‘Würfel’’  $([0, 1]^J, \leq)$  für die übliche p. o. Menge  $(\mathbb{R}, \leq)$  bzw. ihre Untermenge  $([0, 1], \leq)$ , wobei man  $\mathbb{R}^J = \mathbb{R}^n$  bzw.  $[0, 1]^J = [0, 1]^n$  für  $J = \{1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$  schreibt. Beschreiben Sie als ein weiteres Beispiel alle Elemente des Verbandes  $(\mathbb{R}^{[0,1]}, \leq)$ .

**Aufgabe 11.17** Es sei  $((X_j, \leq_j))_{j \in J}$  eine Familie p. o. Mengen und  $\preceq$  eine totale Ordnung auf  $J$ . Dann erhält man die von  $\preceq$  bestimmte *lexikographische partielle Ordnung*  $\leq$  auf dem Cartesischen Produkt  $X = \prod_{j \in J} X_j$  gemäß

$$(a_j)_{j \in J} < (b_j)_{j \in J} \iff \begin{array}{l} \text{es gibt ein } k \in J \text{ mit } a_k <_k b_k \\ \text{und } a_j = b_j \text{ für alle } j \in J \text{ mit } j \prec k. \end{array}$$

Betrachten Sie zum Verständnis dieser Definition zunächst den Fall einer endlichen Indexmenge  $J = \{1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$  bezüglich der natürlichen Ordnungsrelation  $\leq$  von  $\mathbb{N}$ , und zeigen Sie dann allgemein, daß so eine p. o. Menge  $(X, \leq)$  entsteht.

**Aufgabe 11.18** Es seien  $(X_1, \leq_1)$  und  $(X_2, \leq_2)$  p. o. Mengen. Dann versteht man unter dem *ordinalen Produkt*  $(X_1, \leq_1) \odot (X_2, \leq_2)$ , kurz  $X_1 \odot X_2$ , die Menge  $X = X_1 \times X_2$  (Cartesisches Produkt) mit der lexikographischen partiellen Ordnung, die von der totalen Ordnung  $1 < 2$  der Indexmenge  $J = \{1, 2\}$  bestimmt wird.

a) Bilden Sie (in beiden Reihenfolgen) das ordinale Produkt von  $(\mathbb{N}_0, \leq)$  und  $(\{0, 1\}, \leq) \subseteq (\mathbb{N}_0, \leq)$  sowie der oberen Halbverbände:



b) Interpretieren und beweisen Sie:  $X_1 \odot (X_2 \odot X_3) = (X_1 \odot X_2) \odot X_3$ .

c) Zeigen Sie:  $X_1 \odot X_2 = (X_1 \times X_2, \leq)$  ist genau dann ein Verband, wenn  $(X_i, \leq_i)$  Verbände sind und dabei  $(X_1, \leq_1)$  total geordnet oder  $(X_2, \leq_2)$  beschränkt ist.

**Aufgabe 11.19** Im folgenden seien die auftretenden p. o. Mengen  $(X_i, \leq_i)$  paarweise disjunkt (was anderenfalls durch Übergang von  $X_i$  zu  $X'_i = \{(a_i, i) \mid a_i \in X_i\}$  erreicht werden kann). Dann versteht man unter der *ordinalen Summe*  $(X_1, \leq_1) \oplus (X_2, \leq_2)$ , kurz  $X_1 \oplus X_2$ , die Menge  $X = X_1 \cup X_2$  mit der wie folgt definierten Relation  $<$ :

$$a < b \iff \begin{cases} \text{falls } a \in X_1 & \text{und } b \in X_2 \text{ oder} \\ \text{falls } a, b \in X_1 & \text{und } a <_1 b \text{ oder} \\ \text{falls } a, b \in X_2 & \text{und } a <_2 b. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, daß so eine p. o. Menge  $(X, \leq)$  entsteht.

b) Bilden Sie die vier ordinalen Summen entsprechend Aufgabe 11.18 a).

c) Zeigen Sie für beliebige p. o. Mengen  $(X_i, \leq)$

$$X_1 \oplus (X_2 \oplus X_3) = (X_1 \oplus X_2) \oplus X_3, \quad (X_1 \oplus X_2) \odot X_3 = (X_1 \odot X_3) \oplus (X_2 \odot X_3),$$

und widerlegen Sie das andere Distributivgesetz.

d) Sind  $(X_i, \leq_i)$  Verbände, so ist auch  $X_1 \oplus X_2 = (X_1 \cup X_2, \leq)$  ein Verband. Die Umkehrung ist falsch.

e) Unter welchen hinreichenden und notwendigen Bedingungen ist  $X_1 \oplus X_2$  total geordnet?

**Aufgabe 11.20** Die für alle  $a, b \in \mathbb{N}$  durch  $a \mid b \iff ax = b$  für ein  $x \in \mathbb{N}$  definierte Teilbarkeitsrelation  $\mid$  natürlicher Zahlen ist eine partielle Ordnungsrelation auf  $\mathbb{N}$ . Dabei gilt  $a \mid b \implies a \leq b$  bezüglich der üblichen linearen Ordnungsrelation von  $\mathbb{N}$ , aber nicht umgekehrt. Offensichtlich ist  $(\mathbb{N}, \leq)$  ein Verband. Das gleiche gilt aber auch für die p. o. Menge  $(\mathbb{N}, \mid)$ , wobei  $a \wedge b$  für  $\mid$  gerade der größte gemeinsame Teiler von  $a$  und  $b$  (oder von  $T = \{a, b\}$ ) ist und dual  $a \vee b$  das kleinste gemeinsame Vielfache von  $a$  und  $b$  (vgl. Aufgabe 11.1).

**Aufgabe 11.21** Der in Aufgabe 11.20 betrachtete Verband  $(\mathbb{N}, \mid)$  ist bedingt vollständig, da für jede Teilmenge  $T \neq \emptyset$  von  $\mathbb{N}$  das Infimum  $\inf T$  in  $(\mathbb{N}, \mid)$ , nämlich der größte gemeinsame Teiler aller Elemente  $t \in T$ , existiert. Dagegen ist  $(\mathbb{N}, \mid)$  nicht nach oben beschränkt, also nicht vollständig. Geht man von  $(\mathbb{N}, \mid)$  zu  $(\mathbb{N}_0, \mid)$  über, so ist wegen  $a \mid 0$  für alle  $a$  aus  $\mathbb{N}_0$  die p. o. Menge  $(\mathbb{N}_0, \mid)$  nach oben beschränkt und  $(\mathbb{N}, \mid)$  offenbar ein Teilverband des Verbandes  $(\mathbb{N}_0, \mid)$ . Wie  $(\mathbb{N}, \mid)$  ist auch  $(\mathbb{N}_0, \mid)$  bedingt vollständig, also ein vollständiger Verband, wobei für jedes  $T \neq \emptyset$  von  $\mathbb{N}_0$  das Supremum  $\sup T$  in  $(\mathbb{N}_0, \mid)$  das kleinste gemeinsame Vielfache aller  $t \in T$  ist.

**Aufgabe 11.22** Der Durchschnitt  $\delta = \bigcap_{i \in I} \varrho_i$  einer nichtleeren Menge  $\{\varrho_i\}_{i \in I}$  von transitiven Relationen  $\varrho_i$  auf einer Menge  $A \neq \emptyset$  ist eine transitive Relation  $\delta$  auf  $A$ . Damit gibt es zu jeder Relation  $\sigma$  auf  $A$  in der partiell geordneten Menge  $(\mathfrak{P}(A \times A), \subseteq)$  aller Relationen auf  $A$  eine kleinste transitive Relation  $\sigma^{tr}$ , die  $\sigma$  umfaßt, nämlich

$$\sigma^{tr} = \bigcap \{ \varrho \subseteq A \times A \mid \varrho \text{ ist transitiv und erfüllt } \sigma \subseteq \varrho \}.$$

Zeigen Sie weiter, daß  $\sigma^{tr} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma^n$  gilt, wobei  $\sigma^n$  durch  $\sigma^n = \sigma \circ \dots \circ \sigma$  mit  $n \in \mathbb{N}$  Faktoren  $\sigma$  in der Halbgruppe  $(\mathfrak{P}(A \times A), \circ)$  definiert ist. Schließlich gilt  $a \sigma^{tr} b$  für  $a, b \in A$  genau dann, wenn es ein  $n \in \mathbb{N}$  und Elemente  $x_0, x_1, \dots, x_n$  aus  $A$  mit  $a = x_0$  und  $x_n = b$  derart gibt, daß  $x_{\nu-1} \sigma x_\nu$  für  $\nu = 1, \dots, n$  erfüllt ist. Die so beschriebene Relation  $\sigma^{tr}$  wird die *transitive Hülle* von  $\sigma$  in  $(\mathfrak{P}(A \times A), \subseteq)$  genannt.

**Aufgabe 11.23** Sind in Aufgabe 11.22 alle  $\varrho_i$  Äquivalenzrelationen auf  $A$ , so gilt das gleiche für  $\delta = \bigcap_{i \in I} \varrho_i$ . Ist weiterhin  $\sigma$  reflexiv bzw. symmetrisch, so ist auch  $\sigma^{tr}$  reflexiv bzw. symmetrisch.

**Aufgabe 11.24** Es sei  $\check{\mathcal{A}}_A$  die Menge aller Äquivalenzrelationen auf einer Menge  $A \neq \emptyset$ . Analog wie in Aufgabe 11.22 zeigt man, daß es zu jeder Relation  $\sigma$  auf  $A$  eine kleinste Äquivalenzrelation  $\tau \in \check{\mathcal{A}}_A$  auf  $A$  gibt, die  $\sigma$  umfaßt, nämlich  $\tau = \bigcap \{ \varrho \in \check{\mathcal{A}}_A \mid \sigma \subseteq \varrho \}$ . Zeigen Sie weiter, daß  $\tau$  die transitive Hülle von  $\sigma \cup \sigma^{-1} \cup \iota_A$  ist, also  $\tau = (\sigma \cup \sigma^{-1} \cup \iota_A)^{tr}$  gilt. Übrigens ist auch  $\sigma^0 = \iota_A$  in  $(\mathfrak{P}(A \times A), \circ)$  definiert, und man verwendet oft die Beziehung

$$\tau = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\sigma \cup \sigma^{-1} \cup \iota_A)^n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (\sigma \cup \sigma^{-1})^n.$$

**Aufgabe 11.25** Die Menge  $\check{\mathcal{A}}_A$  aller Äquivalenzrelationen einer Menge  $A \neq \emptyset$  ist eine p. o. Teilmenge  $(\check{\mathcal{A}}_A, \subseteq)$  des Verbandes  $(\mathfrak{P}(A \times A), \subseteq)$ . Sie ist durch  $A \times A \in \check{\mathcal{A}}_A$  nach oben beschränkt und gemäß Aufgabe 11.24 bedingt vollständig mit  $\inf_{\mathfrak{P}(A \times A)} \mathcal{T} = \bigcap \mathcal{T} = \inf_{\check{\mathcal{A}}_A} \mathcal{T}$  für jede nichtleere Teilmenge  $\mathcal{T} \subseteq \check{\mathcal{A}}_A$ . Damit ist  $(\check{\mathcal{A}}_A, \subseteq)$  ein vollständiger Verband. Bezeichnet man das Supremum  $\sup_{\mathfrak{P}(A \times A)} \mathcal{T} = \bigcup \mathcal{T}$  mit  $\sigma$ , so gilt nach Aufgabe 11.24

$$\sup_{\check{\mathcal{A}}_A} \mathcal{T} = (\sigma \cup \sigma^{-1} \cup \iota_A)^{tr} = \sigma^{tr} \supseteq \sigma.$$

**Aufgabe 11.26** Beweisen Sie Folgerung 6.12.