

# Algorithmische Graphentheorie I (WS 11/12)

## Hausübung 2 - Musterlösung

*„The trouble with computers, of course, is that they're very sophisticated idiots.“*  
(The Doctor in Robot)

### Lösung 1

Aufstellen der Admittanzmatrix des Graphen:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nach Satz von Kirchhoff ist die Anzahl der Gerüste des Graphen gleich der Determinante der Matrix, die durch Streichen einer Zeile und Spalte  $i$  aus  $B$  hervorgeht, d.h.  $z(G) = |B_i|$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$  beliebig. Wählen wir  $i = 3$ , so ergibt sich:

$$z(G) = |B_3| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Entwickeln nach der ersten Spalte:

$$z(G) = 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Alle drei Determinanten nach der ersten Spalte entwickeln:

$$\begin{aligned} z(G) &= 9 \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 8 \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 8(45 - 1 - 1 - 3 - 5 - 3) + 8(-9 + 1) = 8 \cdot 32 - 64 = 192 \end{aligned}$$

Bei der Entwicklung mittels Zerlegungsformel sollte sich demnach das Gleiche ergeben.

### Lösung 2

Das Problem kann als Graph  $G = (V, E)$  modelliert werden, indem wir das Dorf  $i$  als Knoten  $x_i \in V$  ansehen, und eine Straße zwischen zwei Dörfern  $i$  und  $j$  mit der Kante  $ij \in E$  identifizieren. Dann ist es unsere Aufgabe einen minimal aufspannenden Baum im Graphen  $G$  zu finden. Dazu können wir zum Beispiel den Algorithmus nach Kruskal benutzen:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	Kante
1	2	3	4	5	6	7	
1	2	3	3	5	6	7	$v_3v_4$ (4)
1	2	3	3	5	6	6	$v_6v_7$ (4)
1	2	3	3	2	6	6	$v_2v_5$ (6)
1	2	3	3	2	3	3	$v_4v_6$ (6)
1	2	2	2	2	2	2	$v_5v_6$ (6)
1	1	1	1	1	1	1	$v_1v_3$ (10)

### Lösung 3

Da  $G$  eine Brücke besitzt, lässt sich der Graph durch zwei Teilgraphen  $G_1$  und  $G_2$  darstellen, die nur durch eine Kante miteinander verbunden sind. Mit  $n_1$  bzw.  $n_2 = n - n_1$  als Anzahl der Knoten von  $G_1$  bzw.  $G_2$  lässt sich die Anzahl der Kanten von  $G$  wie folgt abschätzen:

$$m \leq \binom{n}{2} - n_1 \cdot n_2 + 1$$

(Ein Graph mit  $n$  Knoten kann maximal  $\binom{n}{2}$  Kanten besitzen, wenn er vollständig ist; davon müssen nun alle Kanten zwischen  $G_1$  und  $G_2$  gestrichen werden, also  $n_1 \cdot n_2$ , außer die Brücke)

$\binom{n}{2} - n_1 \cdot n_2 + 1$  wird maximal, wenn  $n_1 \cdot n_2 = n_1 \cdot (n - n_1)$  minimal ist. Es ist recht schnell einzusehen, dass das genau dann der Fall ist, wenn  $n_1$  oder  $n_2$  so klein wie möglich ist.

Nehmen wir o.B.d.A. an, dass  $n_1 \leq n_2$  gilt, muss  $n_1 \geq 3$  gelten (wegen  $\delta(G) \geq 2$  und  $G$  schlicht). Das kleinstmögliche  $n_1$  ist daher 3. Damit lässt sich die obige Ungleichung weiter nach oben hin abschätzen:

$$m \leq \binom{n}{2} - n_1 \cdot n_2 + 1 = \binom{n}{2} - n_1 \cdot (n - n_1) + 1 \leq \binom{n}{2} - 3 \cdot (n - 3) + 1.$$

Erweitern der Ungleichung mit 2 und Zusammenfassen führt zu:

$$2m \leq n(n - 1) - 6 \cdot (n - 3) + 2 = n^2 - 7n + 20 = (n - 3)(n - 4) + 8.$$

### Lösung 4

Für die erste Komponente benötigen wir mindestens 4 Knoten, für die zweite 3. In der dritten Komponente soll es doppelt so viele Kanten wie Knoten geben, also müsste  $2n_3 \leq \binom{n_3}{2}$ . Die erste natürliche Zahl, für die das möglich ist, ist die 5. Damit haben wir aber schon alle Knoten auf die Komponenten verteilt und es ergibt sich für  $G_1$  der  $K_4$ , für  $G_2$  der  $P_3$  und für  $G_3$  der  $K_5$  als Lösung.

---