

Algorithmische Graphentheorie I (WS 11/12)

Hausübung 3 - Musterlösung

„Zu denen, die fragen, was die unendlich kleine Quantität in der Mathematik ist, beantworten wir, daß sie wirklich null ist. Folglich gibt es nicht also viele Geheimnisse, die in diesem Konzept versteckt werden, während sie normalerweise geglaubt werden, um zu sein.“

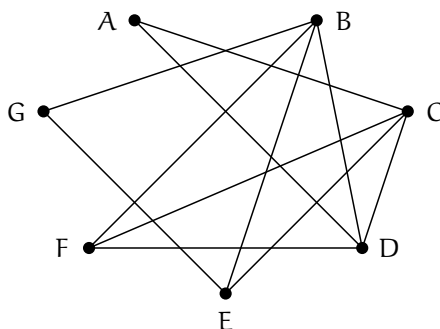
(Leonhard Euler)

Lösung 1

- (a) Angenommen der Graph $G = (V, E)$ besitzt eine Brücke e . Dann lässt sich die Knotenmenge V in zwei disjunkte Mengen V_1 und V_2 zerlegen, so dass e diese beiden Komponenten verbindet, aber sonst keine weitere Kante zwischen beiden Mengen existiert. Startet man nun mit einer Eulertour in V_1 , dann muss man irgendwann die Brücke „überqueren“ um nach V_2 zu gelangen. Dann gibt es allerdings keine Möglichkeit mehr nach V_1 zum Start der Tour zurückzugelangen ohne dass man die Brücke ein zweites Mal benutzt, ein Widerspruch zum Vorhandensein einer Eulertour.
- (b) Ein bipartiter Graph ist ein Graph $G = (V, E)$, dessen Knotenmenge V sich in zwei disjunkte Mengen A und B zerlegen lässt, sodass nur Kanten zwischen beiden Mengen existieren, aber keine innerhalb der zwei Mengen. Das heißt dann aber, dass sich die Anzahl der Kanten eines solchen Graphen als Summe der Knotengrade aller Knoten einer der beiden Mengen berechnen lässt. Da aber jeder Knoten geraden Grad besitzt, ergibt sich sofort, dass ein solcher Graph eine gerade Anzahl von Kanten besitzen muss.

Lösung 2

Identifizieren wir die Spieler mit Knoten und ein Spiel mit einer Kante, dann erhalten wir den folgenden Graphen:



Eine Spielreihenfolge mit den geforderten Bedingungen zu finden, entspricht nun einen Eulerweg im Graphen zu finden. Dies ist möglich, da alle Knoten, bis auf genau zwei, geraden Grad haben. So eine Spielfolge wäre dann zum Beispiel:

$$E - B - G - E - C - D - A - C - F - B - D - F.$$

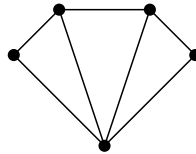
Lösung 3

- (a) Da G zusammenhängend ist, gilt $\omega'(G) = 1$. Damit ergibt sich $m = n + 2$. Weiterhin gilt $n = n_2 + n_3 + 1$, wenn n_2 die Anzahl der Knoten von Grad 2 und n_3 die Anzahl der Knoten von Grad 3 ist. Mit Hilfe des Handschlaglemmas folgt somit:

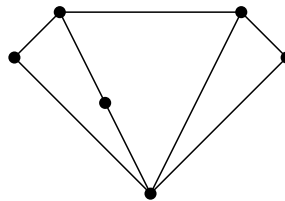
$$2m = 2(n + 2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 4 + 2n_2 + 3n_3 = 4 + 2(n - n_3 - 1) + 3n_3 = 2 + n_3 + 2n,$$

also $n_3 = 2$. Es gibt demnach zwei Knoten von Grad 3 in G .

- (b) G soll genau einen Knoten maximalen Grades besitzen, also gilt $n \geq 5$. Testen wir nun die kleinste Ordnung, also $n = 5$, so muss G genau $m = n + 2 = 7$ Kanten enthalten. Sei v der Knoten mit Maximalgrad, dann gehen von v bereits 4 Kanten aus, die restlichen drei Kanten müssen also auf die anderen vier Knoten so verteilt werden, dass ihr Knotengrad zwischen zwei und drei liegt. Man sieht leicht, dass sich nur der folgende Graph die Bedingungen erfüllt:



- (c) Beginnend bei einem Stern mit vier Blättern, sind bereits fünf Knoten benutzt. Es verbleibt ein weiterer Knoten, der mindestens Grad 2 haben muss. Durch systematisches Probieren erhält man den folgenden Graph als einzige Möglichkeit:



Lösung 4

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Gesucht ist nun eine Kantenfolge in G , die jede Kante genau zweimal enthält. Bilden wir also einen neuen Graph G' , der alle Knoten aus G enthält und alle Kanten von G doppelt. Dann besitzt jeder Knoten in G' geraden Grad, nämlich genau den doppelten von G . damit existiert in G' eine Eulertour. Diese ist dann unsere gesuchte Kantenfolge.