Algorithmische Graphentheorie I (WS 11/12)

Hausübung 4 - Musterlösung

„Truth is like a torch; the more it is shook it shines“
(William Rowan Hamilton)

Lösung 1

Man kann das Problem wie folgt graphentheoretisch darstellen: $G = (V, E)$ mit

$$V = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \{1, 2, 3\}\}$$
$$E = \{\{(i, j, k), (i', j', k')\} : \ |(i - i', j - j', k - k')| = 1\}.$$

Dabei ist $|(i-i', j-j', k-k')|$ der Betrag des Vektors, also $\sqrt{(i - i')^2 + (j - j')^2 + (k - k')^2}$. Das Problem besteht im Auffinden eines Hamiltonweges w in G mit Anfangsknoten $(1, 1, 1)$ und Endknoten $(2, 2, 2)$.
Wir fügen nun als weitere Kante $e = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2)\}$ ein. Existiert w, so wäre w zusammen mit e ein Hamiltonkreis, d.h. $G' = (V, E \cup \{e\})$ wäre hamiltonsch.
Offenbar besteht G' aus einem Knoten mit Grad 7 (dem Mittelknoten), sieben Eckknoten mit Grad 3, einem Eckknoten mit Grad 4, sechs Knoten (die Mittelknoten jeder Würfelseitenfläche) mit Grad 5 und den restlichen zwölf Knoten, die Mittelknoten auf jeder Würfelkante, mit Grad 4. Streichen wir den Mittelknoten mit Grad 7 und die zwölf Mittelknoten auf den Würfelkanten, verbleiben vierzehn Knoten, die allerdings alle isoliert sind. D.h. wir haben eine Menge S mit $|S| = 13$, und es gilt $\omega(G' - S) = 14 > |S|$. Also erfüllt G' nicht die aus der Vorlesung bekannte notwendige Bedingung für Hamiltonizität. Folglich ist G' nicht hamiltonsch, und damit kann auch der Hamiltonweg w in G nicht existieren. Damit ist es nicht möglich, dass die Maus ihre Knabbertour in der Mitte des Käseklumpens beendet.

Lösung 2

(Verkürzte Darstellung:) Entsprechend der Schrittabfolge im Algorithmus nach Christofides muss zuerst ein aufspannender Baum minimalen Gewichts bestimmt werden. Nutzt man hier Kruskal oder Prim, erhält man zum Beispiel als Kanten: **Leipzig-Dresden**, **Hamburg-Bremen**, **Hannover-Bremen**, **Leipzig-Berlin**, **Hannover-Leipzig** und **Leipzig-Nürnberg**. Demnach hätten die Knoten Hamburg, Berlin, Nürnberg und Dresden ungeraden Grad. Der dadurch induzierte Graph besitzt als perfektes Matching minimalen Gewichts *Dresden-Nürnberg* und *Hamburg-Berlin*. Dadurch ergibt sich als Eulertour zum Beispiel **Dresden-Nürnberg-Leipzig-Hannover-Bremen-Hamburg-Berlin-Leipzig-Dresden**.
Nun müssen nur noch die doppelt besuchten Städte gestrichen werden. Das ist lediglich Leipzig, also kann eine solche Rundreise mit einer Gesamtlänge von 1595km die folgende sein: **Dresden-Nürnberg-Leipzig-Hannover-Bremen-Hamburg-Berlin-Dresden**.

Lösung 3

Seien m_i die Anzahl der Kanten und n_1 die Anzahl der Knoten in der Komponente G_i, $i = 1, 2, 3$.

- G_1 Da $\Delta(G_1) \geqslant 4$, gilt $n_1 \geqslant 5$.
- G_2 Diese Komponente ist ein Baum, also gilt $m_2 = n_2 + 1$. Da es drei Blätter in G_2 geben soll, muss $n_2 \geqslant 4$ gelten.
- G_3 Für drei Kreise braucht man mindestens 4 Knoten, also $n_3 \geqslant 4$.

Damit sind bei Gleichheit bereits alle Knoten verteilt. Es ergibt sich weiterhin für genau 3 Kreise in G_3 $m_3 = 5$ und für die zweite Komponente $m_2 = 3$. damit sind 6 Kanten für G_1 übrig, und es ergibt sich der folgende Graph: