Prof. Dr. M. Sonntag, Dipl.-Math. S. Matos Camacho, Institut für Diskrete Mathematik und Algebra

Algorithmische Graphentheorie I (WS 11/12)

Hausübung 5 - Musterlösung

„Man is a tool-using animal… Without tools he is nothing, with tools he is all.“
(Thomas Carlyle)

Lösung 1

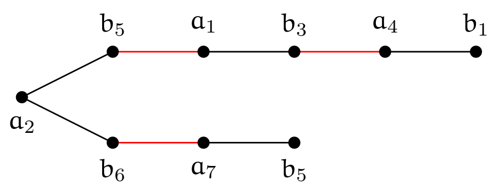
Falls der Graph ein perfektes Matching besitzt, dann braucht der Startspieler nur eine Matchingkante zu wählen. Der zweite Spieler ist nun gezwungen eine Nichtmatchingkante zu wählen. Da das Matching jedoch perfekt ist, kann der Startspieler danach wiederum eine Matchingkante wählen, weil ja alle Knoten durch das Matching überdeckt werden. Dieses Spiel geht so lange weiter, bis der zweite Spieler keine „freie“ Kante mehr wählen kann. Würde es für den Startspieler unmöglich sein eine Kante zu wählen, dann hätten beide Spieler abwechselnd einen erweiternden Weg aufgebaut, was aber bei einem perfekten matching nicht der Fall sein kann. Also muss beim zweiten Spieler die Wahl der nächsten Kante irgendwann scheitern, wodurch der Startspieler gewinnt.

Lösung 2

Hier lag bei der Aufgabenstellung ein Fehler meinerseits vor: Der Parameter $\beta_1(G)$, die sogenannte Matchingzahl, also Anzahl der Kanten in einem maximalen Matching, wurde in der Vorlesung gar nicht eingeführt. Außerdem kam dieser Beweis bereits dort.
Wer jetzt allerdings aus dem angegebenen Parameter einfach $\beta(G)$, also die Knotenüberdeckungszahl gemacht hat, kann sich die Sache ähnlich leicht beweisen: Für eine minimale Knotenüberdeckung gilt, dass sie mindestens so viele Knoten wie Matchingkanten eines maximalen Matchings enthalten muss. Damit gilt $\beta_1(G) \leqslant \beta(G)$. Auf der anderen, sei M nun ein gesättigtes Matching, dann ist $V(M)$ sicherlich eine Knotenüberdeckung mit $2|M|$ Knoten. Wäre eine Kante nicht durch die Knoten überdeckt, so wäre diese frei, ein Widerspruch. Also gilt $\beta(G) \leqslant 2|M|$.

Lösung 3

Zuerst ergänzen wir das gegebene Matching zu einem gesättigtem durch die Kante $\{a_5, b_2\}$. Nun machen wir uns auf die Suche nach einem erweiternden Weg in G. Der Knoten a_2 ist frei, also können wir ihn als Anfang nutzen:



b_1 ist nun ein freier Konten, wir können also mit ihm Ummatchen. Wir erhalten so das folgendes Matching:

$$M_1 = \{\{a_1, b_3\}, \{a_2, b_5\}, \{a_4, b_1\}, \{a_5, b_2\}, \{a_6, b_4\}, \{a_7, b_6\}\}.$$

Nun sind nur noch die beiden Knoten a_3 und b_7 frei, wir müssen also versuchen einen erweiternden Weg zwischen beiden aufzubauen. Dieser ergibt sich als

und nach Ummatchen haben wir unser perfektes Matching

$$M = \{\{a_1, b_3\}, \{a_2, b_5\}, \{a_3, b_4\}, \{a_4, b_1\}, \{a_5, b_2\}, \{a_6, b_7\}, \{a_7, b_6\}\}.$$