Differentialrechnung

1 Grenzwerte

Gegeben sei ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, $a \in I \cup \{-\infty, \infty\}$ und $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f kann sehr wohl auch an der Stelle $x = a$ erklärt sein, wir wollen aber nur wissen wie sich die Funktion in der Umgebung des Punktes $x = a$ verhält.

Definition 1.
Die Funktion $f(x)$ hat für x gegen a den rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = c$, *wenn für jede Zahlenfolge $(x_n)_{n \geqslant 0}$ aus I mit $x_n \to a$ und $x_n > a$ für alle n die Zahlenfolge $(f(x_n))_{n \geqslant 0}$ gegen c strebt.*
Die Funktion $f(x)$ hat für x gegen a den linksseitigen Grenzwert $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = c$, *wenn für jede Zahlenfolge $(x_n)_{n \geqslant 0}$ aus I mit $x_n \to a$ und $x_n < a$ für alle n die Zahlenfolge $(f(x_n))_{n \geqslant 0}$ gegen c strebt.*
$f(x)$ hat für x gegen a den Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, *wenn gilt*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = c.$$

Diese Definition gilt nicht nur für endliche Werte a und c, sondern auch für $a, c \in \{-\infty, \infty\}$. Man schreibt $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$ bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$. Bei $c \in \{-\infty, \infty\}$ spricht man auch von *uneigentlichen Grenzwerten*.

Beispiele:

- Die Funktion $\sin \frac{1}{x}$ ist für alle $x \neq 0$ erklärt und hat für $x \to 0$ weder einen rechtsseitigen noch einen linksseitigen Grenzwert.

  Folglich kann die Funktion $\sin \frac{1}{x}$ keinen rechtsseitigen Grenzwert $x \to 0+$ besitzen. (Analog existiert der linksseitige Grenzwert nicht.)

- Die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$ hat für $x \to 0$ den linksseitigen Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1$ und den rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$. Da diese beiden verschieden sind, hat $f(x)$ keinen Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Satz 1. *"Epsilon-Delta-Sprache". Die Funktion* $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ *hat in* $x = a$ *den Grenzwert* c*, wenn für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *existiert, so dass für alle* $x \in I\backslash\{a\}$ *mit* $|x - a| < \delta$ *gilt* $|f(x) - c| < \varepsilon$*. In Zeichen:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in I\backslash\{a\} : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Die Berechnung von Grenzwerten erfolgt seltener direkt nach ihrer Definition, sondern meist unter Verwendung gewisser Regeln, z.B.:

Rechenregeln für Grenzwerte:

Seien $f, g : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Falls die Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$ existieren, so haben auch Summe, Differenz, Produkt und Quotient (letzteres nur im Falle $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$) einen Grenzwert für $x \to a$ und es gilt:

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) =$
2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) =$
3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) =$
4. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$

Satz 2. **(Monotoniekriterium)** *Die Funktion* $f : [x_0, \infty) \to \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}$*, sei*

- monoton wachsend *(fallend), d.h. für* $x_1, x_2 \in [x_0, \infty)$ *gilt* $x_1 < x_2 \ \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \ \ (f(x_1) \geqslant f(x_2))$*, und*
- *nach* oben (unten) beschränkt*, d.h. für ein* $C \in \mathbb{R}$ *und alle* $x \in [x_0, \infty)$ *gilt* $f(x) \leqslant C \ \ (f(x) \geqslant C)$*.*

Dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Satz 3. **(Polizistenprinzip, Vergleichskriterium)**
Die Funktionen $f, g, h : [x_0, \infty) \to \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}$*, mögen für alle* x *die Beziehung*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

erfüllen. Wenn $c = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$*, so existiert auch der Grenzwert der dritten Funktion und es gilt* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = c$.

Beispiele:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a, \ a \in \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} (3^x - 2^x)$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{mn-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$, a_i, b_i konstant für alle i, $a_n, b_m \neq 0$

2 Stetigkeit

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

Definition 2. *Man nennt eine Funktion* $f : I \to \mathbb{R}$ *in* $x_0 \in I$ stetig, *wenn bei der Annäherung* $x \to x_0$ *die Funktionswerte für* $f(x)$ *gegen* $f(x_0)$ *streben. Also*

$$f \textit{ ist in } x_0 \textit{ stetig} \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Falls nur $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ *erfüllt ist, so nennt man* f rechtsseitig stetig *in* x_0*, und falls nur* $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ *gilt, heißt* f linksseitig stetig *in* x_0.

Ist x_0 ein Randpunkt von I, so ist $x \to x_0$ nur als einseitige Annäherung ($x < x_0$ bzw. $x > x_0$) zu verstehen.
Anschaulich bedeutet Stetigkeit, dass der Graph $y = f(x)$ über I als eine zusammenhängende Linie (ohne Lücken und Sprünge) dargestellt werden kann.

Ein Punkt x_0, wo f unstetig ist, heißt *Unstetigkeitsstelle*. Diese Stellen lassen sich auf folgende Weise weiter klassifizieren:

- *hebbare Unstetigkeitsstelle*: $f(x_0)$ lässt sich so (um)definieren, dass f stetig in x_0 wird.

  Beispiel: Die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist zunächst nur für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert.
  Setzt man aber $f(0) := 1$, so wird die entstandene Funktion auch in 0 stetig.

- *Unstetigkeitsstelle 1. Art*: Der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ existieren, sind endlich, aber voneinander verschieden.
  Eine alternative Bezeichnung ist *Sprungstelle*.

- *Unstetigkeitsstelle 2. Art*: Wenigstens einer der einseitigen Grenzwerte hat keinen endlichen Wert.

- *Polstelle*: Die einseitigen uneigentlichen Grenzwerte sind beide unendlich.
  Dies ist ein Sonderfall von Unstetigkeitsstellen 2. Art.

  Beispiel ist die Funktion $f(x) = 1/x$ im Punkt $x = 0$.

Die meisten Funktionen, denen man im täglichen Leben begegnet, sind stetig. So sind alle Polynome, die Sinus-, Kosinus- und Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Gebrochenrationale Funktionen, Tangens-, Kotangens- und Logarithmusfunktion sind in ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig. Ausgehend von diesem Vorrat an stetigen Funktionen kann man neue stetige Funktionen mit Hilfe des folgenden Satzes erhalten:

Satz 4.

1. *Sind* f *und* g *auf einem Intervall* $I \subseteq \mathbb{R}$ *stetig, so gilt das auch für* $f + g$, αf $(\alpha \in \mathbb{R})$ *und* fg. *Ferner ist* $\frac{f}{g}$ *stetig in allen* $x \in I$ *mit* $g(x) \neq 0$.

2. *Sind* $f : I \to \mathbb{R}$ *und* $g : D \to \mathbb{R}$ *stetig mit* $g(D) \subseteq I$, *dann ist auch die Verkettung (Komposition)* $h : D \to \mathbb{R}$ *mit* $h(x) = f(g(x))$ *auf* D *stetig.*

Beispiele: $I = \mathbb{R}$

- $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x}$

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leqslant 1 \\ \frac{x}{2} & , x > 1 \end{cases}$

- $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{(x-2)(x+1)}$

3 Differenzierbarkeit

Definition 3. (Ableitung)
Die Funktion f sei auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert und $x_0 \in I$.

1. *Die Funktion f ist in x_0* differenzierbar, *wenn der Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

   existiert und endlich ist. Dieser Grenzwert wird (sofern er existiert) mit $f'(x_0)$ bezeichnet und heißt Ableitung *von f in x_0. Man bezeichnet*

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

   auch als Differenzenquotienten.
   Ferner sagt man, f ist auf I differenzierbar, wenn $f'(x)$ in jedem Punkt $x \in I$ existiert.

2. *Die einseitigen Grenzwerte*

$$f'(x_0^+) := \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{und} \quad f'(x_0^-) := \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

   heißen rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung *von f in x_0.*

Beispiele:

- Die Funktion $f(x) = x^3$ ist an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar, denn es gilt:

- $f(x) = \sin x$.
  Mit Hilfe des Additionstheorems $\sin u - \sin v = 2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)$ erhalten wir:

- $f(x) = \ln|x|,\ x \neq 0$.
  Mit Hilfe der Logarithmengesetze $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ und $a \cdot \ln b = \ln b^a$ erhalten wir:

Satz 5. *Jede in $x_0 \in I$ differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist dort stetig.*

Die Stetigkeit der Funktion f in $x_0 \in I$ ist *notwendig*, aber *nicht hinreichend* für die Differenzierbarkeit von f in $x_0 \in I$. D.h. es gilt

1. Ist f in $x_0 \in I$ unstetig, dann ist f in x_0 auch nicht differenzierbar.
2. Ist dagegen f in $x_0 \in I$ stetig, so muss f in x_0 nicht differenzierbar sein, wie das Beispiel $f(x) = |x|$ für $x_0 = 0$ zeigt.

Differentationsregeln:

Sind die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $x \in I$ differenzierbar, dann gilt:

1. $[f(x) + g(x)]' =$
2. $[cf(x)]' =$
3. $[f(x)g(x)]' =$ (Produktregel)
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' =$ (Quotientenregel)
5. $(g(f(x)))' =$ (Kettenregel)

Beispiel: $f(x) = e^{\sin x} \cdot \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}$

4 Deutung und Anwendung der Ableitung

Geometrische Deutung: Tangentenanstieg
Die *Tangente* an den Graphen $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$ ist

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Analytische Deutung: lineare Approximation
Zu einer gegebenen differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ wird diejenige Gerade $g(x) = m(x - x_0) + f(x_0)$ durch $(x_0, f(x_0))$ gesucht, die f in der Nähe von x_0 am besten approximiert. Dabei versteht man unter „bester Approximation“, dass gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0,$$

d.h., dass der relative Fehler nahe x_0 klein ist und für $x \to x_0$ gegen 0 strebt. Die beste lineare Approximation an f in x_0 ist:

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Totales Differential

Definition 4. *Ist* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine in* x_0 *differenzierbare Funktion, so heißt*

$$dy = df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

totales Differential *von* f *an der Stelle* x_0.

Damit lässt sich die Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ auch als Verhältnis der Differentiale dy und dx interpretieren. Dies kann man anhand des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ erklären: Ein bestimmtes Δx an einer gegebenen Stelle x führt zu einer entsprechenden Veränderung des Funktionswertes Δy. Da

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

gilt, kann man Δy berechnen, sobald der Differenzenquotient und Δx bekannt sind. Wenn man nun die Veränderung Δx infinitesimal klein werden lässt, wird auch die Veränderung des Funktionswertes Δy infinitesimal klein und der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist als Ableitung $\frac{dy}{dx}$ schreibbar. Obige Gleichung wird dann zu

$$dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx = f'(x)dx$$

(Dies ist richtig an jeder Stelle $x = x_0$.)

Anwendung: Fehlerrechnung
Aus der Beziehung $\Delta y \approx dy$ ergibt sich für $y = f(x)$ sofort

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \approx |f'(x_0)| \cdot |h|.$$

Mit dieser Beziehung ist es möglich, Aussagen über den Fehler bei der Berechnung von $f(x)$ zu machen, wenn das Argument x fehlerbehaftet bzw. nicht genau bekannt ist. Ist $\tilde{x}$ ein Näherungswert von x mit der Toleranz h, d.h. es gilt

$$|x - \tilde{x}| < h,$$

dann gilt für den absoluten Fehler des Näherungswerts $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$:

$$|\Delta y| = |y - \tilde{y}| \approx |f'(\tilde{x})| \cdot |\Delta x| < |f'(\tilde{x})| \cdot h.$$

Beispiel: Für $f(x) = \sqrt{x}$ ergibt sich nahe $x_0 > 0$:

Anwendung: Grenzwertberechnung

Satz 6. (Regel von Bernoulli-l'Hospital)
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar. Falls $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für $x \in I$ und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ oder $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, so gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

wobei die Existenz des rechtsstehenden Grenzwertes die Existenz des linksstehenden impliziert.

In vielen Fällen wird die Regel von Bernoulli-l'Hospital mehrfach hintereinander angewendet. Man vergewissere sich aber stets dabei, dass ein Grenzwert der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ vorliegt.

Beispiele:

- $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(2 + 3e^{ax}) + e^a}{5 + 7x}$
- $\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x}$

5 Kurvendiskussion

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall definierte, reellwertige Funktion. Wir möchten wissen, wo sie ihre größten und kleinsten Werte annimmt. Schauen wir ihren Graph an,

so erkennen wir, dass in dem gesuchten Maximum (bei x_1) eine waagerechte Tangente vorliegt. Da der Anstieg einer waagerechten Gerade Null ist, muss in solchen Punkten die Ableitung verschwinden, vorausgesetzt, die Funktion ist differenzierbar.

Definition 5. *Ist f differenzierbar in x und $f'(x) = 0$, so nennt man x* kritischen Punkt.

Nicht jeder kritische Punkt ist ein Maximum oder Minimum: So sind auch bei x_2 und x_3 die Tangenten waagerecht, also beide sind kritische Punkte. Hier spielt x_3 nur die

Rolle eines „Nebengipfels“, während der höchste Gipfel in x_1 vorliegt. In x_2 liegt nicht einmal ein solcher relativer Gipfel vor.

Definition 6. *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion.* $x \in D$ *heißt* globale (lokale) Maximumstelle, *falls für alle Werte* y *aus dem Definitionsbereich* D *(aus einer gewissen Umgebung von* x*) gilt:*

$$f(y) \leqslant f(x).$$

Die Ungleichung mit umgekehrtem Relationszeichen definiert entsprechend eine *globale (lokale) Minimumstelle*. Man sagt auch, f nimmt in x ein lokales (globales) Minimum oder Maximum an. Minimum und Maximum nennt man zusammenfassend *Extrema*.

Satz 7. *Jede lokale Minimum- oder Maximumstelle einer differenzierbaren Funktion ist ein kritischer Punkt.*

Als Kandidaten für mögliche Extremstellen von Funktionen sind also zu untersuchen:

- die kritischen Punkte,
- Intervallrandpunkte,
- mögliche Nichtdifferenzierbarkeitsstellen.

Bevor wir erläutern, wie man dabei insbesondere bei den kritischen Punkten vorgehen kann, beschäftigen wir uns mit ihrer Existenz.

Satz 8. (Satz von Rolle) *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *in* $[a, b]$ *stetig und in* (a, b) *differenzierbar, sowie* $f(a) = f(b)$*. Dann gibt es einen kritischen Punkt in* (a, b)*.*

Eine anschauliche Interpretation wäre, dass bei einer Berg- und Talfahrt mit einer Wasserwaage in der Hand irgendwo auf der Strecke die Waage in horizontaler Position ausgerichtet sein muss. Dabei muss vorausgesetzt werden, dass Anfangs- und Endhöhe der Strecke gleich sind. Wenn das nicht erfüllt ist, müssen keine kritischen Punkte vorhanden sein:

In diesem allgemeineren Fall gibt es aber stets eine Stelle, wo die Tangente an den Graph parallel zur Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist. Dies ist der Inhalt des *Mittelwertsatzes*:

Satz 9. (Mittelwertsatz) *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *in* $[a,b]$ *stetig und in* (a,b) *differenzierbar. Dann gibt es eine Stelle* $\xi \in (a,b)$ *mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Als Nächstes untersuchen wir das Monotonieverhalten einer Funktion.

Definition 7. *Sei* $f : I \to \mathbb{R}$ *auf einem Intervall* $I \subseteq \mathbb{R}$ *definiert. Dann nennen wir* f

- monoton wachsend, *falls* $\forall x, y \in I : \ x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$,
- streng monoton wachsend, *falls* $\forall x, y \in I : \ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$,
- monoton fallend, *falls* $\forall x, y \in I : \ x < y \Rightarrow f(y) \leqslant f(x)$,
- streng monoton fallend, *falls* $\forall x, y \in I : \ x < y \Rightarrow f(y) < f(x)$.

Mit Hilfe der ersten Ableitung lässt sich nun das Monotonieverhalten einer Funktion charakterisieren. Bei Tangenten mit positivem Anstieg wächst die Funktion, bei negativem Anstieg fällt sie. Der genaue Sachverhalt ist:

Satz 10. *Seien* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine differenzierbare Funktion. Dann gilt:*

1. *Gilt* $f' > 0$ *auf* I, *so ist* f *streng monoton wachsend.*
2. *Gilt* $f' \geqslant 0$ *auf* I, *so ist* f *monoton wachsend.*
3. *Gilt* $f' < 0$ *auf* I, *so ist* f *streng monoton fallend.*
4. *Gilt* $f' \leqslant 0$ *auf* I, *so ist* f *monoton fallend.*
5. *Gilt* $f' = 0$ *auf* I, *so ist* f *konstant.*

Man beachte, dass sich die Teilaussagen 2.,4. und 5. von diesem Satz umkehren lassen, 1. und 3. dagegen nicht. So ist z.B. $f(x) = x^3$ auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, ihre Ableitung $f'(x) = 3x^2$ erfüllt aber nicht $f' > 0$, sondern nur $f' \geqslant 0$.

Wir kommen nun zu dem Problem zurück, zu entscheiden, ob ein kritischer Punkt eine Minimumstelle, Maximumstelle oder nichts von beiden ist. Zur Beantwortung brauchen wir die *zweite Ableitung* $f'' := (f')'$. Wenn Sie existiert, nennen wir f *zweimal differenzierbar*.

Satz 11. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. $x \in D$ sei ein kritischer Punkt. Gilt $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), so ist x lokale Minimumstelle (lokale Maximumstelle).*

Vorerst ist keine Entscheidung möglich, falls $f''(x) = 0$. Solche Fälle kann man aber mit Hilfe höherer Ableitungen behandeln.

Man kann schon auf ein Minimum schließen, wenn die erste Ableitung der Funktion f links von x nichtpositiv, rechts von f nichtnegativ ist. Bei Maxima sind die Verhältnisse natürlich genau umgekehrt. Wenn die zweite Ableitung sehr aufwendig zu berechnen ist, greift man mitunter auf einen solchen Vorzeichenwechsel von f' zurück.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{\ln(x-a)}{(x-a)^2}$

Als Nächstes untersuchen wir das Krümmungsverhalten der Funktion.

Definition 8. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert. Dann nennen wir f*

- konvex, *falls* $\forall x, y \in I\ \forall t \in (0,1): \ f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$,
- streng konvex, *falls* $\forall x, y \in I\ \forall t \in (0,1): \ f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$,
- konkav, *falls* $\forall x, y \in I\ \forall t \in (0,1): \ f(tx + (1-t)y) \geqslant tf(x) + (1-t)f(y)$,
- streng konkav, *falls* $\forall x, y \in I\ \forall t \in (0,1): \ f(tx + (1-t)y) > tf(x) + (1-t)f(y)$.

Geometrisch interpretiert besagt diese Definition, dass bei konvexen (konkaven) Funktionen der Graph stets unterhalb (oberhalb) jeder Sekante durch zwei Punkte liegt. Bei strenger Konvexität (Konkavität) liegt der Graph entsprechend echt unterhalb (oberhalb) der Sekante.

Satz 12. *Sei* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine auf einem Intervall* $I \subseteq \mathbb{R}$ *zweimal differenzierbare Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. f *ist konvex (konkav).*
2. f' *ist monoton wachsend (fallend).*
3. *Auf* I *gilt* $f'' \geqslant 0$ *(*$f'' \leqslant 0$*).*

Folgende Aussagen sind ebenfalls äquivalent:

1. f *ist streng konvex (konkav).*
2. f' *ist streng monoton wachsend (fallend).*

Die strenge Konvexität (Konkavität) von f *folgt auch aus* $f'' > 0$ *(*$f'' < 0$*), aber nicht umgekehrt.*

Definition 9. *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *differenzierbar,* $x \in D$*.* x *heißt* Wendepunkt*, falls* f' *ein lokales Extremum in* x *hat.*

Um eine hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt zu erhalten, benötigen wir die dritte Ableitung. Wir nennen dabei $f''' := (f'')'$ die *dritte Ableitung* von f und f *dreimal differenzierbar*, falls sie existiert. Wir erhalten:

Satz 13. *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *dreimal differenzierbar,* $x \in D$*. Falls* $f''(x) = 0$ *und* $f'''(x) \neq 0$*, so ist* x *ein Wendepunkt.*

Der Fall $f''(x) = f'''(x) = 0$ kann wieder mit Hilfe höherer Ableitungen behandelt werden.

Fortführung vom Beispiel: $f(x) = \dfrac{\ln(x-a)}{(x-a)^2}$

Um sich ein Bild vom Verlauf einer Funktion zu machen, kann man im Zuge einer *Kurvendiskussion* die bisher behandelten Eigenschaften untersuchen. Nicht jeder Punkt der folgenden Auflistung ist dabei bei jeder Funktion sinnvoll anzuwenden.

Was gehört zu einer Kurvendiskussion?

1. Definitionsbereich, Bild (= kleinstmöglicher Wertebereich)
2. Symmetrie: Ist f gerade oder ungerade?
3. Stetigkeit, Differenzierbarkeit.
   Eventuell vorhandene Unstetigkeiten können klassifiziert werden
4. Nullstellen
5. Extrema und Wendepunkte
6. Monotonie- und Konvexitätsintervalle
7. Verhalten für $x \to \pm\infty$ bzw. an den Grenzen des Definitionsbereiches
8. Skizze

Fortführung vom Beispiel: $f(x) = \frac{\ln(x-a)}{(x-a)^2}$

Wir ergänzen noch die Kurvendiskussion, inbesondere Punkt 7 (Verhalten für $x \to \pm\infty$), indem wir *Asymptoten* bestimmen. Das sind Geraden, an die sich der Graph der Funktion unbegrenzt annähert. Beispielsweise ist die Gerade mit der Gleichung $y = ax + b$ Asymptote für die Funktion f für $x \to \infty$, falls

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - (ax + b) \right) = 0.$$

Um bei gegebener Funktion die Asymptoten zu ermitteln, dividieren wir durch x und erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - (ax+b)}{x} &= 0 \\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) &= 0 \end{aligned}$$

und damit

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

b ergibt sich damit zu

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - ax \right).$$

Asymptoten für $x \to -\infty$ ergeben sich aus analogen Formeln. Man beachte, dass nicht jede Funktion Asymptoten hat. Die Asymptote existiert nur, falls vorstehende Grenzwerte zur Berechnung von a und b existieren.

Beispiel:

- Für $f(x) = x^2$ ist beispielsweise

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \infty,$$

  damit gibt es keine Asymptote. Deutung: die Funktion wächst schneller als linear.

- Für $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-3}$ existieren hingegen beide Grenzwerte und ergeben

  $$\begin{aligned} a &= \\ b &= \\ &= \end{aligned}$$

  Somit ist die Gerade $y = x + 3$ Asymptote an unsere Funktion für $x \to \infty$.