Folgen und Reihen

Man betrachte viele Zahlen hintereinander geschrieben. Solche Folgen von Zahlen können durch nummeriert werden. Es entsteht eine Zuordnung der natürlichen Zahlen zu den Gliedern der Folge. Man schreibt $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Definition 1. *Eine komplexe (reelle)* Zahlenfolge *ist eine Abbildung* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ $(a : \mathbb{N} \to \mathbb{R})$*. Statt* $a(n)$ *schreibt man* a_n *für die Funktionswerte und nennt sie die* Glieder *der Zahlenfolge. Wir schreiben* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *für die Folge.*

Beispiele:

1 Konvergenz

Nun stellt sich die Frage, wie sich die Folge für immer größer werdende n verhält. Also ist ganz intuitiv der Grenzwertbegriff für Folgen von Interesse.

Definition 2. *Eine Zahl* $a \in \mathbb{C}$ *heißt Grenzwert einer komplexen Zahlenfolge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine natürliche Zahl* N *existiert, so daß für alle Indizes* $n \geqslant N$ *gilt:*

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Ist a der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so schreiben wir $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$ und sagen, a_n *strebt* oder *konvergiert* gegen a. Wenn eine Folge einen Grenzwert hat, so nennen wir sie *konvergent*, andernfalls *divergent*.

Definition 3. *Wir nennen eine reelle Folge* bestimmt divergent gegen ∞ *und schreiben* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *oder* $a_n \to \infty$*, falls*

$$\forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : a_n > K.$$

Wir nennen eine reelle Folge bestimmt divergent gegen $-\infty$ *und schreiben* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *oder* $a_n \to -\infty$*, falls*

$$\forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : a_n < -K.$$

Folgen mit Grenzwert 0 nennt man *Nullfolgen*.

Beispiele: Konvergenzaussagen für $a_n = n$ und $a_n = \frac{1}{n}$:

Kennt man schließlich einige Grenzwerte, so kann man daraus neue konstruieren.

Satz 1. *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Zahlenfolgen *mit* $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$ *für* $n \to \infty$*. Dann gilt*

$$a_n + b_n \to a + b, \quad a_n - b_n \to a - b, \quad a_n b_n \to ab$$

und falls $b \neq 0$, $b_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *dann gilt auch*

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}.$$

Beispiel: Wir betrachten die Folge $a_n = \frac{3n^2+2}{n^2-n+2}$.

Es kann durchaus vorkommen, dass eine Zahlenfolge nicht direkt in Abhängingkeit von n gegeben ist, sondern durch eine *rekursive Bildungsvorschrift*.

Beispiel: Wir betrachten die Folge $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$. Die ersten Glieder ergeben sich wie folgt:

Satz 2. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Falls diese*

- *monoton wächst (fällt), d.h. es gilt für alle $n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant a_{n+1} (a_n \geqslant a_{n+1})$, und*
- *nach oben (unten) beschränkt ist, d.h. es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit $a_n < C (a_n > C)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

so konvergiert sie.

Kommen wir zurück zum Beispiel der rekursiven Folge:

Beispiel: Wir betrachten die Folge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Man zeige auch hier Monotonie und Beschränktheit. Hilfreich dabei ist die *Bernoullische Ungleichung*

$$(1+x)^\alpha \geqslant 1+\alpha x, \quad x \geqslant -1,\ \alpha \geqslant 1.$$

Durch Satz 6.2 ist die Existenz des Grenzwertes der Folge sichergestellt. Wie der Grenzwert lautet, ist zu diesem Zeitpunkt aber offen.

Anschließend an Satz 6.2 folgen nun noch ein paar andere Konvergenzkriterien.

Satz 3. (Polizistenprinzip) *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert a konvergieren und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwischen beiden Folgen liegt, d.h.*

$$\exists N : \forall n \geqslant N \quad a_n \leqslant b_n \leqslant c_n,$$

so konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert a.

Satz 4. (Cauchysches Konvergenzkriterium) *Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \geqslant N$ folgendes gilt:*

$$|a_n - a_m| \leqslant \varepsilon.$$

Die drei letzten Sätz geben Kriterien an, die man überprüfen kann, ohne den Grenzwert der Folge zu kennen. Man kann also mitunter Aussagen über die Konvergenzeigenschaft machen, ohne den Grenzwert zu berechnen.

Ein letzter Satz in diesem Abschnitt zeigt, dass das Studium von reellen Folgen auch für das Verständnis komplexer Folgen hilfreich ist.

Satz 5. *Eine komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{C}$, wenn die Folge der Realteile (Re $a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Re a und die Folge der Imaginärteile (Im $a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Im a konvergiert.*

Damit kommen wir zu ein paar letzten Bemerkungen zu *unbestimmten Ausdrücken*. Für zwei bestimmt divergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)n \in \mathbb{N}$ ist Satz 6.1 nicht anwendbar. Durch geschicktes umformen kann man aber dennoch den Grenzwert berechnen. Dabei kann die Folge eine Nullfolge sein, einen beliebigen Grenzwert besitzen oder divergieren.

Beispiel: Für die Subtraktion betrachten wir die folgenden Ausdrücke

- $a_n = n,\ b_n = n - (-1)^n$.

- $a_n = 2n^2,\ b_n = n^2$.

- $a_n = \sqrt{n^2 + n},\ b_n = \sqrt{n^2 - n}$.

- $a_n = n + \frac{1}{n},\ b_n = n$.

Finden sie selbst Beispiele für die Division:

2 Zahlenreihen

Ein Einheitsquadrat kann wie folgt in Rechtecke zerlegt werden:

Der Flächeninhalt dieses Quadrats berechnet sich dann wie folgt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1,$$

mit Summenzeichen geschrieben erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Um diese Summe 'unendlich vieler' Summanden zu verstehen bildet man den Grenzübergang für endliche Summen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Damit ergibt sich die Definition einer Zahlenreihe.

Definition 4. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine komplexe Zahlenfolge. Man sagt, die* Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

ist konvergent *und habe die* Summe s*, falls die Folge*

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

gegen s *konvergiert. Man schreib dafür*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

und nennt s_n *eine* Partialsumme *der Reihe. Die* a_k *heißen* Glieder *der Reihe.*

Nicht konvergente Reihen heißen *divergent*.

Beispiel: Machen Sie eine Aussage über die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Beispiel: Für $q \in \mathbb{C}$ nennt man die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ *geometrische Reihe*. Deren Partialsumme ist bekannt und für $q \neq 1$ gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Für welche q konvergiert die Reihe und wie sieht ihre Summe aus?

Mitunter lässt sich also ein schöner Ausdruck für Partialsummen finden. Da das nicht immer möglich ist, sollen Möglichkeiten vorgestellt werden, die Konvergenzaussagen ermöglichen.

Satz 6. *(Notwendiges Kriterium)*
Die Glieder einer konvergenten Reihe bilden selbst eine Nullfolge.

Bew.:

□

Man erkennt, dass tatsächlich die Glieder der bisher betrachteten Reihen Nullfolgen sind. Dabei ist aber zu beachten, dass es für die Konvergenz einer Reihe nicht genügt, dass die Glieder der Reihe gegen Null streben. Die harmonische Reihe ist dafür ein Beispiel.

Beispiel: Die Divergenz der harmonischen Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ergibt sich wie folgt:

Satz 7. *(Weierstraßsches Majorantenkriterium, M-Test)*
Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine Reihe komplexer Zahlen,* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *eine Reihe nichtnegativer reeler Zahlen. Gilt für alle* $k \in \mathbb{N}$

$$|a_k| \leqslant b_k,$$

so folgt aus der Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *die Konvergenz von* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *und es gilt*

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Bew.:

□

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ heißt *Majorante* der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Da das Abändern endlich vieler Glieder der Reihe auf die Konvergenz keinen Einfluss hat, kann man den letzten Satz abschwächen und nur fordern, dass $|a_k| \leqslant b_k$ für $k \geqslant k_0$.

Beispiel: Nutzen Sie das Majorantenkriterium um die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ zu zeigen.

Eine Umkehrung des Weierstraßschen Kriteriums ist der folgende Satz.

Satz 8. *(Minorantenkriterium)*
Wenn $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$ *für alle* $k \geqslant k_0$ *mit* $k \in \mathbb{N}$ *gilt und* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *divergiert, so divergiert auch* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$.

Beispiel: Untersuchen Sie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Aus den Überlegungen der vorherigen Sätze und der Kenntnis der geometrischen Reihe resultiert der folgende Satz.

Satz 9. *Möge* $q = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ *existieren. Falls* $q < 1$ $(q > 1)$, *so konvergiert (divergiert) die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Man beachte, dass im Fall $q = 1$ auf diesem Wege keine Entscheidung möglich ist.

Beispiel:

Der letzte Satz läßt sich noch allgemeiner schreiben.

Definition 5. *Wir betrachten eine reelle Zahlenfolge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Wir nennen* $a \in \mathbb{R}$ *den* oberen Grenzwert (limes superior) *dieser Folge und schreiben*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{k\to\infty}} a_n,$$

falls für jedes $\varepsilon > 0$ *eine Zahl* $N \in \mathbb{N}$ *so existiert, dass für alle* $n \geqslant N$ *gilt* $a_n < a + \varepsilon$ *und für jedes* $M \in \mathbb{N}$ *existiert ein* $n \geqslant M$ *mit* $a_n > a - \varepsilon$. *Wir nennen* $a \in \mathbb{R}$ *den* unteren Grenzwert (limes inferior) *dieser Folge und schreiben*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim_{k\to\infty}} a_n,$$

falls für jedes $\varepsilon > 0$ *eine Zahl* $N \in \mathbb{N}$ *so existiert, dass für alle* $n \geqslant N$ *gilt* $a_n > a - \varepsilon$ *und für jedes* $M \in \mathbb{N}$ *existiert ein* $n \geqslant M$ *mit* $a_n < a - \varepsilon$.

Beispiel: Wir betrachten die Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

Mit dieser Definition lässt sich der vorhergehende Satz wie folgt verallgemeinern.

Satz 10. *(Wurzelkriterium)*
Möge $q = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ *existieren. Falls* $q < 1$ $(q > 1)$, *so konvergiert (divergiert) die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beispiel: Wir untersuchen die folgende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^k}{4}\right)^k$.

Satz 11. *(Quotientenkriterium)*
Möge $q = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ *existieren. Falls* $q < 1$ $(q > 1)$, *so konvergiert (divergiert) die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beispiel: Für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!}$ gilt

Außerdem wollen wir noch einmal die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ untersuchen

Da die bisherigen Konvergenzkriterien immer mit den Beträgen der Glieder arbeiteten, haben wir sogar die Konvergenz der Reihen der Beträge gezeigt.

Definition 6. *Die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *heißt* absolut konvergent, *falls* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *konvergiert.*

Satz 12. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind, heißen *bedingt konvergent*. Ein Beispiel dafür sehen wir nach dem folgenden Satz.

Satz 13. *(Leibnitzkriterium)*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton wachsende oder fallende Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$.

Eine Reihe mit abwechselnd positiven und negativen Vorzeichen nennt man *alternierende* Reihe.

Beispiel: Wir zeigen die bedingte Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$.

Die Bedeutung der absolut konvergenten Reihen wird durch den nächsten Satz deutlich.

Satz 14. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine absolut konvergente Reihe. Dann gilt*

- *Jede Umordnung der Reihe konvergiert gegen den selben Grenzwert, d.h. für jede bijektive Abbildung* $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)}.$$

- *Für jede weitere konvergente Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *konvergiert das sogenannte* Cauchyprodukt *und ist gleich dem Produkt der Summen der Reihen:*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right).$$