Funktionenfolgen und -reihen

1 Konvergenzarten

Eine *Funktionenreihe* ist eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$, deren Glieder $f_k(x)$ noch von einer Variablen (hier x) abhängen, also Funktionen sind. Sinnvollerweise sollten alle Funktionen $f_k : D \to \mathbb{C}$ einen gemeinsamen Definitionsbereich D haben. Genauso kann man auch Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten, deren Elemente Funktionen sind, und nennt sie entsprechend *Funktionenfolgen*.

Wir kennen bereits einige Beispiele für Funktionenreihen:

Definition 1. *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ heißt* punktweise konvergent *gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, wenn für jedes $x \in D$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ von Funktionen $f_k : D \to \mathbb{C}$ heißt punktweise konvergent *gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, wenn für jedes $x \in D$ die Funktionenfolge der Partialsummen gegen $f(x)$ konvergiert, d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = f(x).$$

Schauen wir uns ein Beispiel für eine Funktionenfolge an:

$$f_n(x) := \arctan(nx), \qquad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Die Arcustangensfunktion hat waagerechte Asymptoten bei $y = \frac{\pi}{2}$ (für $x \to \infty$) und bei $y = -\frac{\pi}{2}$ (für $x \to -\infty$). Wenn wir n vergrößern, dann ziehen sich die Graphen der Funktionen f_n immer mehr zusammen:

Als punktweiser Grenzwert der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt sich die Funktion

Wir definieren nun:

Definition 2. *Eine Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Funktionen* $f_n : D \to \mathbb{C}$ *heißt* gleichmäßig konvergent *gegen die Funktion* $f : D \to \mathbb{C}$*, wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass für alle* $x \in D$ *und alle* $n \geqslant N$ *gilt:*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *von Funktionen* $f_k : D \to \mathbb{C}$ *heißt* gleichmäßig konvergent *gegen die Funktion* $f : D \to \mathbb{C}$*, wenn die Folge der Partialsummen gleichmäßig gegen* f *konvergiert, d.h. für jedes* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $N \in \mathbb{N}$*, so dass für alle* $x \in D$ *und alle* $n \geqslant N$ *gilt:*

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

Auf den ersten Blick sieht das so aus, als hätten wir lediglich die Grenzwertbeziehungen in Definition 1 durch die Grenzwertdefinition ersetzt. Doch das würde lauten:

> Für jedes $x \in D$ gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geqslant N$ gilt:
>
> $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

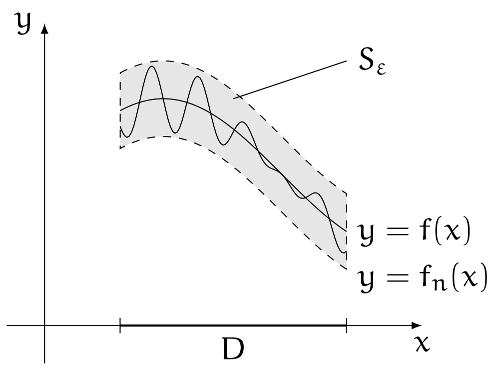
Der Unterschied zu Definition 2 ist, dass dort N nur von ε abhängt, bei eben genannter Umformulierung von Definition 1 aber von $x \in D$ und ε. Dieser feine Unterschied bewirkt, dass beide Definitionen tatsächlich unterschiedliche Begriffe darstellen. Zunächst ist klar:

Satz 1. *Wenn eine Funktionenfolge (Funktionenreihe) gleichmäßig konvergiert, so konvergiert sie auch punktweise.*

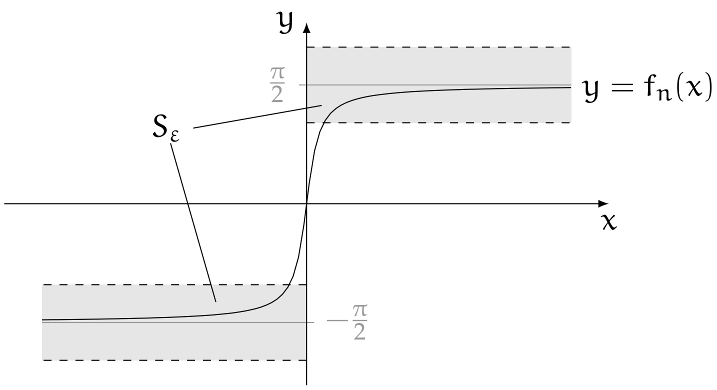
Die gleichmäßige Konvergenz kann geometrisch folgendermaßen veranschaulicht werden. Für $\varepsilon > 0$ nennt man

$$S_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in D \ \wedge |f(x) - y| < \varepsilon\}$$

einen *Epsilonschlauch* um den Graph der Funktion f. Gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge (Funktionenreihe) bedeutet dann einfach, dass die Graphen der Funktionen f_n (der Partialsummen $\sum_{k=0}^{n} f_k$) für hinreichend großes n in jedem vorgegebenen Epsilonschlauch liegen.



Untersuchen wir, ob die Funktionenfolge $f_n(x) = \arctan(nx)$ sogar gleichmäßig gegen die Funktion f aus (**??**) konvergiert. Wenn wir einen Epsilonschlauch (mit $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$) um den Graph von f legen, so sehen wir, dass wegen des Sprungs (exakter: wegen der Unstetigkeitsstelle 1. Art) dieser Funktion bei $x = 0$ alle Funktionen f_n diesen Epsilonschlauch in der Nähe des Ursprungs verlassen.



Daher ist die Folge f_n nicht gleichmäßig gegen f konvergent. Wir haben damit gleichzeitig ein Beispiel angegeben, das zeigt, dass sich Satz 1 nicht umkehren lässt.

Die Bedeutung des Begriffes der gleichmäßigen Konvergenz wird unter anderem an folgenden Eigenschaften deutlich, die wir nicht beweisen wollen:

Satz 2. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen mit Definitionsbereich D, $f : D \to \mathbb{C}$ sei eine ebensolche.*

1. *Sind alle Funktionen f_n stetig und konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f, so ist auch f stetig.*

2. *Sind alle f_n differenzierbar, konvergiert die Folge $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig und konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenigstens punktweise in D gegen f, so ist f differenzierbar und es gilt für $x \in D$:*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

3. *Sind alle Funktionen f_n integrierbar über $[a, b] \subseteq D$ und und konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f, so ist auch f integrierbar über $[a, b]$ und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Einen analogen Satz gibt es auch für Reihen von Funktionen. Man beachte, dass die Aussagen des Satzes bei nur punktweiser Konvergenz nicht richtig sein müssen: Die schon besprochene Folge $f_n(x) = \arctan(nx)$ besteht aus stetigen Funktionen, ihr punktweiser Grenzwert ist hingegen nicht mehr stetig.

Die Folge von Funktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leqslant x < \frac{1}{n}, \\ -n^2\left(x - \frac{2}{n}\right), & \frac{1}{n} \leqslant x < \frac{2}{n}, \\ 0, & \frac{2}{n} \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

konvergiert punktweise gegen Null,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \qquad x \in [0, 2],$$

trotzdem konvergieren die Integrale nicht gegen Null, denn

Wir lernen aus diesem Beispiel: Grenzübergänge und Integrale sind nicht unbedingt vertauschbar. (Gleiches gilt für Ableitungen und Grenzübergänge.) Die gleichmäßige Konvergenz ist der geeignete Begriff, um diese Anomalien auszuschließen. Aber wie stellt man die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenreihe oder -folge fest? Für Reihen gibt es dafür ein bequemes Kriterium, das sich aus dem Weierstraßkriterium ergibt:

Satz 3. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *eine Reihe von Funktionen* $f_n : D \to \mathbb{C}$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *eine Reihe nichtnegativer reeller Zahlen. Gilt für alle* $k \in \mathbb{N}$ *und* $x \in D$

$$|f_k(x)| \leqslant b_k,$$

so folgt aus der Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *die gleichmäßige Konvergenz von* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.

Beispiel:

2 Potenzreihen

Potenzreihen sind Funktionenreihen der Gestalt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{1}$$

Unsere anfänglichen Beispiele waren alle von dieser Bauart. Die Zahlen a_k heißen dabei die *Koeffizienten* der Potenzreihe. Die Partialsummen

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

einer Potenzreihe sind Polynome. Zunächst ist gar nicht klar, ob und für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe konvergiert. Das hängt im allgemeinen von den Koeffizienten ab: mit Hilfe des Wurzelkriteriums folgt, dass die Reihe konvergiert (divergiert), falls

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} < 1 \qquad \left(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} > 1\right),$$

d.h. falls

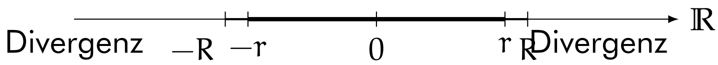
$$|x| < \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \qquad \left(|x| > \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}\right).$$

Die Zahl

$$\boxed{R := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}}$$

heißt *Konvergenzradius* und die Formel zu seiner Berechnung wird nach *Jacques Hadamard* benannt. Wir haben somit gezeigt:

Satz 4. *Die Reihe* (1) *konvergiert (sogar absolut) für* $x \in (-R, R)$*, sie divergiert für* $x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$*. Die Konvergenz ist gleichmäßig auf jeder Menge* $[-r, r]$ *mit* $0 \leqslant r < R$.



Beweis. Es bleibt, die Gleichmäßigkeit der Konvergenz in $[-r, r]$ zu zeigen. Sie ergibt sich mit Hilfe von Satz 3, denn für $|x| \leqslant r$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ eine konvergente Majorante für (1). □

Das Intervall $(-R, R)$ heißt das *Konvergenzintervall* der Potenzreihe. Man beachte:

- Über die Randpunkte $R, -R$ des Konvergenzintervalls kann keine allgemeine Aussage gemacht werden. Dort kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen.

  Beispiel: Für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ berechnet man leicht $R = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{1/k}} = 1$. Die Reihe divergiert für $x = 1$ (harmonische Reihe) und konvergiert für $x = -1$ (Leibnizkriterium).

- Falls $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$ oder ∞ ist, so muss die Formel für den Konvergenzradius als $R = \infty$ (d.h. die Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$) bzw. $R = 0$ (die Potenzreihe konvergiert nur für $x = 0$) interpretiert werden.

- Auch das Quotientenkriterium liefert eine Formel für den Konvergenzradius. Es gilt

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Als Beispiel betrachten wir $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k x^k$.

Aus der gleichmäßigen Konvergenz einer Potenzreihe auf jedem Intervall $[-r, r] \subseteq (-R, R)$ folgt, dass eine Potenzreihe in $(-R, R)$ ein stetige Funktion darstellt. Beispielsweise stellt die geometrische Reihe in $(-1, 1)$ die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ dar, die in den Punkt $x = 1$ nicht stetig fortgesetzt werden kann. Man kann sogar zeigen, dass die Summe einer Potenzreihe im Innern des Konvergenzintervalls beliebig oft differenzierbar ist. Für das Rechnen mit Potenzreihen gilt:

- Eine Potenzreihe darf im Inneren des Konvergenzintervalls beliebig oft gliedweise differenziert und integiert werden.

- Zwei Potenzreihen dürfen im Durchschnitt ihrer Konvergenzintervalle gliedweise addiert, subtrahiert und multipliziert werden.

Bei der Multiplikation findet das schon bekannte Cauchyprodukt aus dem letzten Kapitel Anwendung.

Diese Rechenregeln können benutzt werden, um aus bekannten Potenzreihen neue zu gewinnen. Dies ist oftmals einfacher, als eine Anwendung des Taylorschen Satzes mit Restgliedabschätzung.

Zum Beispiel erhält man aus $\frac{1}{1-x}$ durch Differentiation

Alternativ kann man die Reihe auch mit sich selbst multiplizieren, d.h.

Anstatt $f(x) = \arctan x$ mit dem Satz von Taylor zu entwickeln, differenzieren wir und entwickeln die Ableitung wieder mit Hilfe der geometrischen Reihe:

Nun können wir wieder integrieren und erhalten

Diese Reihe konvergiert nach Leibnizkriterium sogar noch für $x = 1$ und liefert[1]

Für numerische Berechnungen von π gibt es allerdings schneller konvergierende Reihen.

Um auch Potenzreihen dividieren zu können, benötigen wir die Möglichkeit des Koeffizientenvergleichs.

Satz 5. (Identitätssatz) *Seien* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ *zwei Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien. Gilt* $f(x) = g(x)$ *in einer Umgebung* $U_d(0)$ *der Null* ($d > 0$)*, so sind die Koeffizienten beider Reihen gleich, d.h.*

$$a_k = b_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Beweis. Setzt man in

[1] Hierbei ist es eigentlich gar nicht selbstverständlich, dass der Wert der Reihe im Punkt $x = 1$ noch gleich dem Wert der Arkustangensfunktion in diesem Punkt ist. Es gibt aber den *Satz von Abel*, der besagt, wenn eine Potenzreihe noch im rechten Randpunkt des Konvergenzintervalls konvergiert, so ist ihre Summenfunktion dort linksseitig stetig.

$\square$

Für die Division gilt

Satz 6. *Seien* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,\ g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ *zwei Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien und* $g(0) = b_0 \neq 0$. *Dann ist auch* $f(x)/g(x)$ *in einer gewissen Umgebung von* 0 *in eine Potenzreihe entwickelbar.*

Die Koeffizienten können durch einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienen und Koeffizientenvergleich gefunden werden. Wir demonstrieren das Verfahren am besten an einem Beispiel:

Entwickeln wir $h(x) := \dfrac{1}{\cos x}$ in eine Potenzreihe. Wegen $\cos 0 = 1 \neq 0$ ist diese Funktion jedenfalls nach Satz 6 in einer gewissen Umgebung der Null durch eine Potenzreihe darstellbar.

Eine allgemeine Gesetzmäßigkeit bei der Bildung der Koeffizienten ist noch nicht zu erkennen. Das einzige, was wir sagen können, ist, dass alle Koeffizienten mit ungeradem Index verschwinden, denn es gilt:

Satz 7. *Ist* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *in der Nähe von* $x = 0$ *konvergent und* f *eine gerade (ungerade) Funktion, so verschwinden alle Koeffizienten* a_k *mit ungeradem (geradem) Index* k*.*

Potenzreihen können auch für die Berechnung von Grenzwerten angewendet werden. Dabei nutzt man die Stetigkeit der Summenfunktion aus. In der Regel genügt es, nur die Anfangsglieder bekannter Potenzreihenentwicklungen zu benutzen. Wir demonstrieren das Verfahren an einem Beispiel:

Mitunter braucht man auch Potenzreihen der etwas allgemeineren Gestalt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

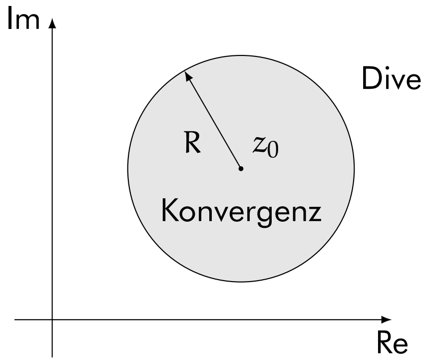
wobei x_0 *Entwicklungspunkt* genannt wird. Da sie lediglich durch eine Substitution des Arguments aus der bisher betrachteten Form von Potenzreihen hervorgeht, folgt die Konvergenz dieser Reihe im Konvergenzintervall $(x_0 - R, x_0 + R)$ und die Divergenz in $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$, wobei der Konvergenzradius R nach derselben Hadamardschen Formel berechnet wird wie oben. Die weitere Theorie kann genauso wie für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ aufgebaut werden.

3 Potenzreihen und komplexe Zahlen

Wir betrachten nun etwas allgemeiner Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{2}$$

mit einer komplexen Variablen $z \in \mathbb{C}$ um einen Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$. Dieselben Überlegungen mit dem Wurzelkriterium wie im vorangehenden Kapitel ergeben, dass diese Reihe konvergent ist für $|z - z_0| < R$ und divergent für $|z - z_0| > R$, wobei der Konvergenzradius R wieder durch die Formel von Hadamard berechnet werden kann. Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ stellt das Innere eines Kreises um den Punkt z_0 mit Radius R in der komplexen Ebene dar und wird deshalb Konvergenzkreis genannt. Im Äußeren dieses Kreises divergiert die Reihe, auf der Kreislinie kann man keine allgemeine Aussage treffen.



Mit Hilfe von Potenzreihen lässt sich nun eine weitere Begründung für die früher gegebene, auf den ersten Blick seltsame Festlegung $e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$ finden. Dazu halten wir fest

und damit

nach dem binomischen Satz. Die Definition $e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$ ist also so gewählt, dass auch für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ die aus dem Reellen vertraute Reihe

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

gültig bleibt. Das ermutigt uns, weitere Funktionen mit Hilfe von Potenzreihen ins Komplexe zu übertragen. Wir setzen deshalb für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \\ \cos z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}. \end{aligned}$$

Für $z \in \mathbb{R}$ hatten wir diese Reihen früher hergeleitet, für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ dienen sie uns als eine natürliche Definition. Die Konvergenz ist übrigens klar: Da die Reihen für alle reellen Zahlen konvergieren, ist ihr Konvergenzradius gleich Unendlich, so dass sie auch für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergieren. Dass diese Definitionen sinnvoll sind, zeigt sich unter anderem daran, dass viele aus dem Reellen vertraute Formeln auch für komplexe Argumente gelten, zum Beispiel die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\ \cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \end{aligned}$$

die auch für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten. Die Nachweise erfolgen jeweils durch Rechnen mit Potenzreihen.

Wir kommen nun zu dem früher schon versprochene Zusammenhang zwischen trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen. Setzt man auch für komplexes z

$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

so ergibt sich

also

$$\sinh(iy) = i \sin y$$

und auf ähnliche Weise

$$\cosh(iy) = \cos y.$$

Versuchen wir uns nun am Logarithmus: Es wäre natürlich, unter $\ln z$ für $z \in \mathbb{C}$ diejenige komplexe Zahl $w = u + iv$ zu verstehen, die $e^w = z$ erfüllt. Nimmt man an, $z = re^{i\varphi}$ ist in exponentieller Darstellung gegeben, so folgt

$$e^w = e^u(\cos v + i \sin v) = z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

und damit $e^u = r, u = \ln r$ und $v = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Der Imaginärteil des Logarithmus ist nur bis auf ganzzahlige, additive Vielfache von 2π eindeutig bestimmt:

$$\ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}, r > 0.$$

Folglich kann man auch die Kombination komplexe Zahl hoch komplexe Zahl im allgemeinen nicht eindeutig erklären, denn natürlicherweise würde man

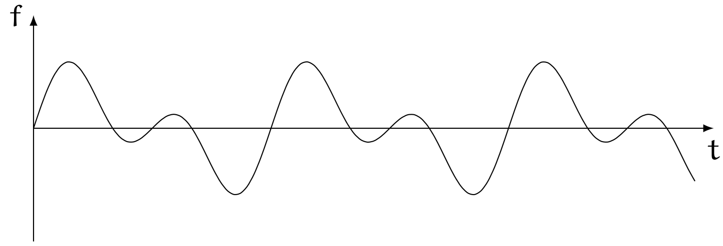
$$z_1^{z_2} = e^{z_2 \ln z_1}$$

setzen, was im Allgemeinen nicht eindeutig ist. Vorsicht ist also geboten, wie folgende Rechnung zeigt:

$$e^{2\pi i} = 1$$

4 Fourierreihen

Wir betrachten einen unveränderlichen Ton.



Die in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellte Funktion f kann verschiedene physikalische Bedeutungen haben: der Luftdruck an einem festen Ort, die Auslenkung einer schwingungsfähigen Membran (Trommelfell) o.ä. Sie ist typischerweise periodisch in folgendem Sinne:

Definition 3. *Eine Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *heißt* periodisch *mit* Periode $p \in \mathbb{R}$ *falls für alle* $t \in \mathbb{R}$ *gilt*

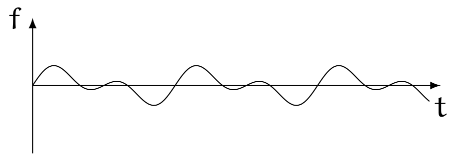
$$f(t+p) = f(t).$$

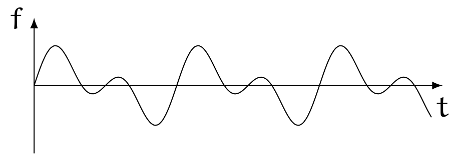
Beispiele:

- $f(t) = \sin t$ hat die Perioden $2\pi, -2\pi, 4\pi, \ldots$.
- $f(t) = \sin^2 t$ hat die Perioden $\pi, 2\pi, -\pi, -2\pi, 4\pi, \ldots$.
- $f(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$ hat die Perioden $2\pi, -2\pi, 4\pi, \ldots$.

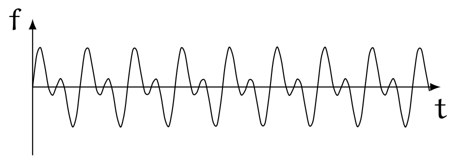
In der Regel wird nur die kleinste, positive Periode angegeben. Falls f periodisch, stetig und nicht konstant ist, so gibt es immer eine solche. Alle anderen Perioden sind ganzzahlige Vielfache davon. Für die eben angeführten Beispiele sind die kleinsten positiven Perioden $2\pi, \pi$ bzw. 2π.

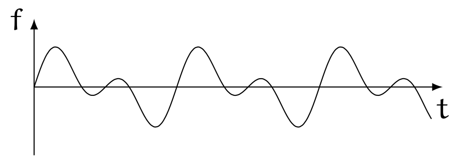
Wir vergleichen die Graphen zweier Töne:





Beide haben dieselbe Periode und damit dieselbe Tonhöhe, der rechts dargestellte Ton hat aber eine größere Amplitude und erklingt damit lauter.





In diesen Bildern haben beide Töne dieselbe Lautstärke, aber der links dargestellte Ton ist wegen der kleineren Periode höher. Definiert man die *Frequenz* als das Reziproke der Periode, so kann man auch sagen, der linke Ton habe eine höhere Frequenz.

Viele Schallquellen (wie Musikinstrumente) können sinusförmige Töne erzeugen, beschrieben durch eine Funktion

$$f_1(t) = f_0 \sin(\omega t + t_0).$$

Diese Funktion hat die Periode $T := \frac{2\pi}{\omega}$. ω wird auch als *Kreisfrequenz* bezeichnet und t_0 steht für eine Phasenverschiebung. Warum sinusförmige Töne entstehen können, hat auch wieder mathematische Gründe. Viele Instrumente können nämlich durch *partielle Differentialgleichungen* modelliert werden, die die Sinusfunktion als Lösung haben. Die Behandlung solcher Gleichungen, wie etwa der berühmten *Saitenschwingungsgleichung*, übersteigt unsere gegenwärtigen Möglichkeiten.

Mittels Additionstheorem können wir auch schreiben

$$f_1(t) = f_0 \sin t_0 \cos(\omega t) + f_0 \cos t_0 \sin(\omega t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$$

mit Konstanten a_1, b_1.

Eine wichtige Eigenschaft der eben erwähnten partiellen Differentialgleichungen ist es nun, dass auch die Funktion mit der doppelten, dreifachen, ... Frequenz eine Lösung ist. Also kann unsere Schallquelle auch die Töne

$$\begin{aligned} f_2(t) &= a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) \\ f_3(t) &= a_3 \cos(3\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) \\ &\vdots \end{aligned}$$

erzeugen, die man die (harmonischen) *Obertöne* der Grundschwingung nennt. Die Verdopplung der Frequenz bedeutet dabei, dass der erste Oberton eine Oktave höher klingt, der zweite Oberton mit der dreifachen Frequenz klingt noch eine Quinte höher. Der von der Schallquelle real abgegebene Ton ist die Überlagerung der Grundschwingung und der Obertöne, also

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t). \tag{3}$$

Ein Instrument, wo man die Zusammensetzung eines Tons aus Teiltönen aktiv beeinflussen kann, ist übrigens die Orgel. Zu jeder Orgel gibt es eine *Disposition* genannte Übersicht der verfügbaren Register. Diese haben historisch bedingte Bezeichnungen (Prinzipal, Hohlflöte, usw.) und (meistens) eine Fußangabe über die Länge[2] der längsten Pfeife. Erzeugen wir etwa mit einem 8-Fuß-Register einen Grundton (der natürlich auch Obertöne beinhaltet), so kann man mit Hilfe eines 4-Fuß-Registers (halb so lange

[2] 1 Fuß $\approx$ 30cm

Pfeifen, eine Oktave höher) den ersten Oberton addieren, bei einem Register mit der Fußangabe $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ entsteht der zweite Oberton, entsprechend verhalten sich 2-Fuß- und 1-Fuß-Register.

Was ist das Ergebnis der Überlagerung (3)? Mathematisch gesprochen fragen wir, welche T-periodischen Funktionen f eine Reihendarstellung

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \tag{4}$$

mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ besitzen. Dabei haben wir noch eine Konstante $a_0/2$ addiert, weil (3) immer eine Schwingung um die Nulllage darstellt. (4) heißt *Fourierreihe in reeller Form*. Wie bei allen Funktionenreihen müssen wir uns natürlich auch hier mit der Frage der Konvergenz für die verschiedenen Konvergenzarten befassen. Außerdem sollen die Zahlen a_k, b_k, die sogenannten *Fourierkoeffizienten* von f, ermittelt werden.

Zunächst gehen wir aber noch auf eine alternative Darstellung der Fourierreihe ein. Schreiben wir

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}}{2} + b_k \frac{e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}}{2i} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\omega t} \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} \right) + e^{-ik\omega t} \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i} \right), \end{aligned}$$

so ergibt sich die *komplexe Form*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \tag{5}$$

der Fourierreihe wenn wir setzen

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & k < 0, \\ \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & k > 0, \\ \dfrac{a_0}{2}, & k = 0. \end{cases}$$

Umgekehrt gelangt man leicht von der komplexen Form der Fourierreihe zur reellen. Für einen Index $k > 0$ ist nämlich

$$\begin{aligned} c_k + c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) + \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = a_k, \\ c_k - c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) - \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = -ib_k, \end{aligned}$$

und damit gelten die Umrechnungsformeln

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{6}$$
$$b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Wir bestimmen nun zunächst die Fourierkoeffizienten c_k mit Hilfe eines auf Leonhard Euler zurückgehenden Tricks. Hat eine Funktion f eine Fourierreihe der Gestalt (5), so multiplizieren wir diese Gleichung mit $e^{-in\omega t}$ für ein festes $n \in \mathbb{Z}$ und integrieren anschliesend über das Intervall $[0, T]$. Wir erhalten

$$\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}e^{-in\omega t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_0^T e^{i(k-n)\omega t}dt. \tag{8}$$

Weil

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{i(k-n)\omega t}dt &= \begin{cases} \int_0^T dt & n = k \\ \frac{1}{i(k-n)\omega} e^{i(k-n)\omega t}\Big|_0^T & n \neq k \end{cases} \\ &= \begin{cases} T & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases} \end{aligned} \tag{9}$$

reduziert sich die vorangehende Summe auf nur einen Summanden und es bleibt übrig

$$\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt = c_n T.$$

Wir haben damit eine Berechnungsformel für c_k erhalten,

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt.} \tag{10}$$

Daraus können wir nun mit Hilfe von (6) und (7) Formeln für die Berechnung der reellen Fourierkoeffizienten angeben:

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt + \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{ik\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\left(e^{-ik\omega t} + e^{ik\omega t}\right)dt \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) = \frac{i}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt - \frac{i}{T}\int_0^T f(t)e^{ik\omega t}dt = \frac{i}{T}\int_0^T f(t)\left(e^{-ik\omega t} - e^{ik\omega t}\right)dt \end{aligned}$$

und damit

$$\boxed{a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt, \qquad k \in \mathbb{N}_0,} \tag{11}$$

$$\boxed{b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt, \qquad k \in \mathbb{N}.} \tag{12}$$

Nun müssen wir noch bedenken, dass wir bei unserer Rechnung in (8) Vertauschungen zwischen Integration und Reihensummierung vorgenommen haben. Dies ist nicht ohne weiteres zulässig, eine geeignete Voraussetzung dafür ist, dass f *quadratintegrabel*[3] über eine Periode ist, d.h.

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Mit

$$L^2(0,T) := \left\{ f : [0,T] \to \mathbb{C} \,\middle|\, \int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

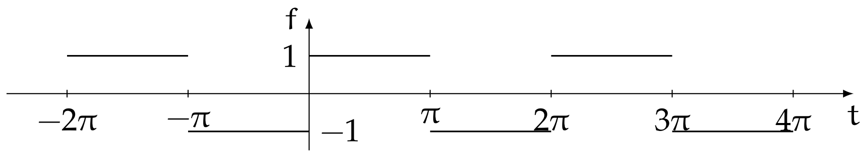
bezeichnen wir die Menge aller quadratintegrablen Funktionen. Auf $L^2(0,T)$ kommen wir später noch einmal im Zusammenhang mit Vektorräumen zu sprechen. Hier notieren wir als Resultat

Satz 8. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine T-periodische Funktion, die auch zu $L^2(0,T)$ gehört. Dann lassen sich die Fourierkoeffizienten aus* (10) *bzw.* (11) *und* (12) *berechnen.*

Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < \pi, \\ -1, & \pi \leqslant t < 2\pi, \end{cases} \tag{13}$$

2π-periodisch fortgesetzt auf ganz $\mathbb{R}$.

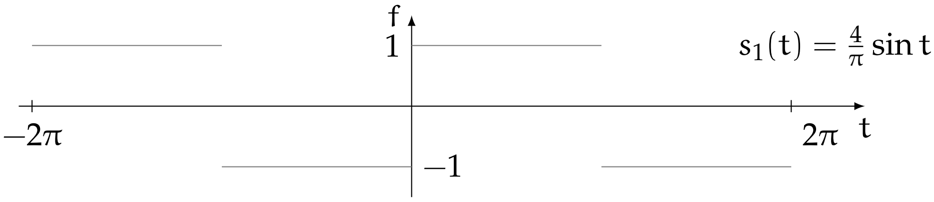


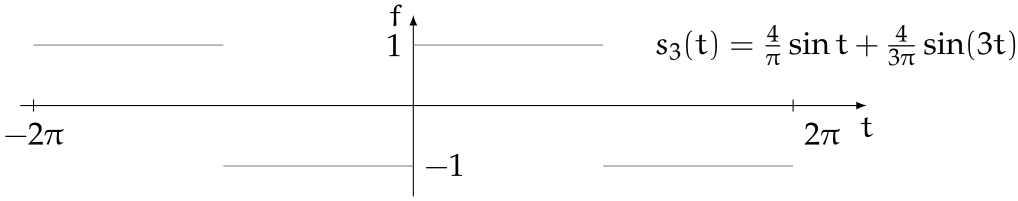
Dann ist $f \in L^2(0, 2\pi)$ und wir können die reellen Fourierkoeffizienten berechnen:

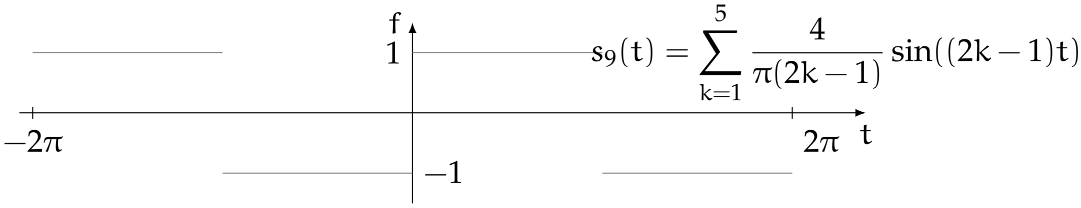
[3] Es genügt hierbei wie in der folgenden Definition von $L^2(0,T)$ die Existenz der Integrale im Lebesgueschen Sinne. Da wir aber nur das Riemann-Integral behandelt haben, können wir diese wichtige Feinheit nicht genauer beleuchten.

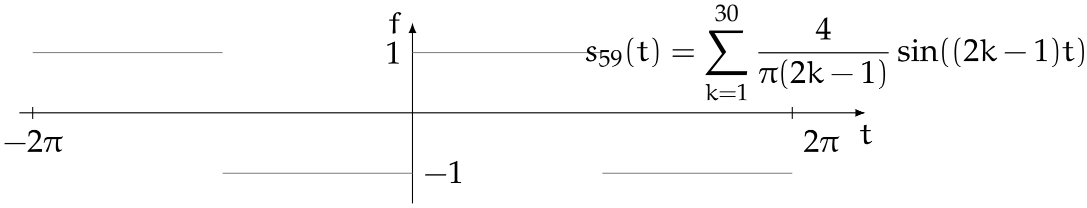
Also sieht die Fourierreihe von f so aus

Dabei haben wir hier statt des Gleichheitszeichens zunächst $\sim$ geschrieben, weil wir noch nichts über die Konvergenz der Fourierreihe wissen. Dies wird nachfolgend noch untersucht. Zuvor betrachten wir einige Partialsummen der Fourierreihe.









Für die komplexe Fourierreihe (5) rechnen wir nun

$$\int_0^T |f(t)|^2 = \int_0^T f(t)\overline{f(t)}dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n} e^{-in\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k \overline{c_n} \int_0^T e^{i(k-n)\omega t} dt.$$

Wegen (9) reduziert sich diese Summe auf

$$\int_0^T |f(t)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{c_k} T.$$

Es ergibt sich die sogenannte *Parsevalsche Gleichung*:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Da die Glieder einer konvergenten Reihe das 'notwendige Kriterium' erfüllen, folgt unmittelbar:

Satz 9. *(Lemma von Riemann-Lebesgue) Die Fourierkoeffizienten* a_n, b_n, c_n *einer quadratintegrablen Funktion bilden Nullfolgen, d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0, \qquad \lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0.$$

Unser obiges Beispiel ist ein weiterer Beleg für die Richtigkeit dieser Tatsache. Wir kommen nun zur Konvergenzuntersuchung der Fourierreihe bezüglich der im letzten Kapitel behandelten Konvergenzbegriffe.

Satz 10. *Sei* $f \in L^2(0,T)$ *T-periodisch. Wenn* f *in* $t_0 \in \mathbb{R}$ *differenzierbar ist, so konvergieren die Fourierreihen* (4) *und* (5) *in* t_0 *gegen* $f(t_0)$.

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $T = 2\pi, t_0 = 0$, $f(t_0) = 0$. Seien c_n die Fourierkoeffizienten von f und

$$s_{mn}(t) = \sum_{k=m}^{n} c_k e^{ikt}$$

die Partialsumme der Fourierreihe. Wir betrachten nun die Funktion

$$g(t) := \frac{f(t)}{e^{it}-1}.$$

Diese Funktion erfüllt

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t-0}\frac{t}{e^{it}-1} = f'(0)\lim_{t\to 0}\frac{1}{ie^{it}} = -if'(0),$$

wobei zur Berechnung des Grenzwertes die Regel von Bernoulli-l'Hospital benutzt wurde. Ebenso sieht man die Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{t\to 2k\pi} g(t)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Da $\dfrac{1}{e^{it}-1}$ auf jedem Intervall $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ mit $\varepsilon > 0$ beschränkt ist, folgt $g \in L^2(0,2\pi)$. Seien nun d_n die Fourierkoeffizienten von g, d.h.

$$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\frac{f(t)}{e^{it}-1}dt.$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned}d_{n-1}-d_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)t}\frac{f(t)}{e^{it}-1}dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\frac{f(t)}{e^{it}-1}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-i(n-1)t}-e^{-int}}{e^{it}-1}f(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-nit}(e^{it}-1)}{e^{it}-1}f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-nit}f(t)dt = c_n\end{aligned}$$

und folglich

$$s_{mn}(0) = \sum_{k=m}^{n} c_k = (d_{m-1}-d_m) + (d_m - d_{m+1}) + \ldots + (d_{n-1}-d_n) = d_{m-1} - d_n.$$

Es gilt nun $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to-\infty}} s_{mn}(0) = 0$, denn die Fourierkoeffizienten von g bilden nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma (Satz 9) eine Nullfolge. □

Was passiert, wenn f in einer Stelle t_0 nicht differenzierbar ist? Betrachten wir $t_0 = 0$ bei unserem früheren Beispiel (13). Die Partialsummen der Fourierreihe

$$s_{2n-1}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)t)$$

verschwinden alle im Nullpunkt, so dass die Fourierreihe dort gegen 0 konvergiert. Das ist genau der Mittelwert zwischen dem linksseitigen Grenzwert -1 und dem rechtsseitigen Grenzwert 1 von f in $t_0 = 0$ und demonstriert ein typisches Verhalten:

Satz 11. *Sei $f \in L^2(0,T)$ T-periodisch. Wenn f in $t_0 \in \mathbb{R}$ links- und rechtsseitig differenzierbar ist in dem Sinne, dass die Grenzwerte*

$$f(t_0+0) := \lim_{h\to 0+} f(t_0+h), \qquad f(t_0-0) := \lim_{h\to 0-} f(t_0-h)$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t_0+h)-f(t_0+0)}{h}, \qquad \lim_{h\to 0-}\frac{f(t_0+h)-f(t_0-0)}{h}$$

existieren, so konvergiert die Fourierreihe in t_0 gegen $\dfrac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}$.

Beweis. Wir nehmen $T = 2\pi$ und $t_0 \in (0, 2\pi)$ an, bezeichnen die Grenzwerte der einseitigen Differenzenquotienten mit $f'_+(x_0)$ bzw. $f'_-(x_0)$ und betrachten die Funktion

$$g(t) = \begin{cases} f(t_0-0) + f'_-(t_0)(t-t_0), & 0 \leqslant t < t_0, \\ f(t_0), & t = t_0, \\ f(t_0+0) + f'_+(t_0)(t-t_0), & t_0 < t < 2\pi. \end{cases}$$

Dann ist $f(t) = g(t) + h(t)$ mit einer in t_0 differenzierbaren Funktion h. Die Fourierreihe von h konvergiert nach dem letzten Satz gegen den Funktionswert von h, für die Funktion g kann man explizit nachrechnen, dass ihre Fourierreihe gegen $\dfrac{g(t_0+0)+g(t_0-0)}{2}$ konvergiert. □

Schließlich beantworten wir die Frage nach der gleichmäßigen Konvergenz der Fourierreihe. Es ist klar, dass in jedem Intervall, in dem die Fourierreihe gleichmäßig konvergiert, keine Unstetigkeiten von f liegen können, denn die Partialsummen der Fourierreihe sind stetig und es gilt Satz 2 (i). Ein hinreichendes Kriterium gibt folgender Satz, den wir nicht beweisen wollen:

Satz 12. *Sei $f \in L^2(T)$ T-periodisch und stückweise stetig differenzierbar. Dann konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig auf jedem Intervall $[a, b]$, in dem f stetig ist.*

Für unsere Beispielfunktion (13) folgt daraus die gleichmäßige Konvergenz auf allen Intervallen $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ und $[\pi + \varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ für $\varepsilon > 0$.