Integralrechnung

1 Definition des bestimmten Integrals

Die Integration ist die „Umkehroperation“ zur Differentiation. Grundaufgabe der Integralrechnung ist die Bestimmung von Flächen. Will man beispielsweise den Inhalt der Fläche unter dem Graph der beschränkten Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ermitteln, so zerlegt man das Intervall $[a, b]$ durch Punkte $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ und bezeichnet eine solche *Zerlegung* mit Z_n. Man wählt außerdem Zwischenpunkte $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, \ldots, n$. Die sogenannte *Riemannsche Summe*

$$S(Z_n) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

stellt die Summe der Flächen aller Rechtecke $[x_{k-1}, x_k] \times [0, f(\xi_k)]$ dar.

Wenn man diese Zerlegung immer mehr verfeinert, d.h. die Zahl der Zerlegungspunkte erhöht und diese immer dichter zusammenliegen, so ist intuitiv klar, dass die Riemannsche Summe immer besser die gesuchte Fläche unter der Kurve approximiert.

Definition 1. *Es sei* f *eine auf dem Intervall* $[a, b]$ *definierte Funktion. Existiert unabhängig von der Wahl der Zerlegung und der Zwischenpunkte der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =: \int_a^b f(x)\, dx,$$

so heißt er das bestimmte Integral *von* f *über* $[a, b]$, *die Randpunkte heißen Integrationsgrenzen.* f *wird* Integrand *genannt.*

Satz 1. *Es sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte, beschränkte Funktion, die an höchstens endlich vielen Stellen nicht stetig ist (ein solche Funktion nennt man* stückweise stetig*), dann existiert das Integral*

$$\int_a^b f(x)\ dx.$$

Beispiel: $\int\limits_0^1 e^x \, dx$

2 Differentiation und Integration

Definition 2. *Eine auf dem Intervall I differenzierbare Funktion F heißt* Stammfunktion *von f, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.*

Satz 2. **(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann gilt:*

1. ***Existenz von Stammfunktionen.*** *Die durch*

$$F_a(x) := \int_a^x f(t)\ dt, \qquad x \in [a, b],$$

definierte Funktion ist eine Stammfunktion von f*. Jede andere Stammfunktion von* f *hat die Form* $F(x) = F_a(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$*.*

2. ***Integralberechnung.*** *Mit einer beliebigen Stammfunktion* F *von* f *gilt:*

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Satz 3. (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann gibt es eine Stelle* $\xi \in (a, b)$*, so dass*

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a) f(\xi).$$

3 Integrationsmethoden

3.1 Partielle Integration

Für je zwei auf einem Intervall $I = (a, b)$ stetig differenzierbare Funktionen u und v ist wegen der Produktregel der Differentialrechnung $(uv)' = u'v + uv'$ die Funktion uv eine Stammfunktion von $u'v + uv'$, d.h.

$$\int \left[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right]\ dx = u(x)v(x) + C$$

bzw.

Formel der partiellen Integration.

$$\int u'(x)v(x)\ dx \quad = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\ dx.$$

Für das bestimmte Integral lautet die entsprechende Formel:

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx.$$

Beispiele:

- $\int xe^x\ dx$

- $\int \ln x\ dx$

- $\int \sin^2 x\ dx$

3.2 Substitutionsmethode

Grundlage für die Substitutionsmethode der Integralrechnung ist die Kettenregel der Differentiation $\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x)$, d.h. mit $f(x) = F'(x)$, ist $F(g(x))$ eine Stammfunktion von $f(g(x))g'(x)$.

Substitutionsregel I.

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x)) + C.$$

Für das bestimmte Integral erhält man damit

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Beispiele:

- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

- $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

- $\displaystyle\int_a^b \frac{\ln x}{x}\,dx$

Substitutionsregel II.
Berechnung des Integrals $\int f(x)\,dx$. Wir substituieren: $x = g(y)$ mit einer *umkehrbaren* Funktion g, dann ist $dx = g'(y)\,dy$ und $a = g(y_a) \iff y_a = g^{-1}(a)$ und $b = g(y_b) \iff y_b = g^{-1}(b)$ und damit gilt für das unbestimmte Integral:

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(y))\,g'(y)\,dy = H(y) + C = H(g^{-1}(x)) + C$$

und für das bestimmte Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(y))\,g'(y)\,dy.$$

Beispiele:

- $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\cos^2(3x+4)}\,dx$

- $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{3x^2+9}}\,dx$

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

3.3 Integration rationaler Funktionen

Es geht hierbei um die Integration echt gebrochen rationaler Funktionen. Im Allgemeinen ist eine gebrochen rationale Funktion von der Gestalt

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = g(x) + \frac{p(x)}{Q(x)} \tag{1}$$

mit Polynomen P, Q, g, p. Die Funktion heißt *echt gebrochen rational*, wenn der Polynomgrad des Zählerpolynoms kleiner als der Polynomgrad des Nennerpolynoms ist. Ist die gebrochen rationale Funktion nicht echt gebrochen rational, so kann man immer ein Polynom abdividieren, so dass die verbleibende gebrochen rationale Funktion echt gebrochen rational ist. Dies ist in der Formel (1) dargestellt. Die gebrochen rationale Funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$, wobei der Polynomgrad von $P(x)$ größer als der Polynomgrad von $Q(x)$, kann durch Division in ein Polynom $g(x)$ und eine echt gebrochen rationale Funktion $\frac{p(x)}{Q(x)}$ zerlegt werden. Das Polynom $g(x)$ kann leicht integriert werden, so dass wir nur echt gebrochen rationale Ausdrücke untersuchen müssen.

Beispiele:

- $f(x) = \frac{x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 2}{x - 1}$

- $f(x) = \dfrac{x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3}$

3.3.1 Partialbruchzerlegung

Ausgangspunkt für die Partialbruchzerlegung ist eine **echt** gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit der Eigenschaft, dass der Grad des Zählerpolynoms $p(x)$ echt kleiner als der Grad des Nennerpolynoms $q(x)$ ist. Dann werden folgende Schritte durchgeführt:

1. Schritt: Herstellen einer Produktdarstellung des Nennerpolynoms der folgenden Form:

$$\begin{aligned} q(x) &= c \cdot (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \cdots (x - a_r)^{k_r} \\ &\quad \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{l_1}(x^2 + b_2 x + c_2)^{l_2} \cdots (x^2 + b_s x + c_s)^{l_s}, \end{aligned}$$

dabei stehen die Terme in der ersten Zeile für reelle Nullstellen des Nennerpolynoms und die Exponenten k_i geben die Vielfachheit der reellen Nullstelle a_i an. Die Terme in der zweiten Zeile stehen für Paare konjugiert komplexer Nullstellen des Nennerpolynoms (sind also Polynome 2. Grades ohne reelle Nullstellen) und der Exponent l_i gibt die Vielfachheit dieses Paares nicht-reeller Nullstellen an.

2. Schritt:
Gemäß der erhaltenen Zerlegung des Nennerpolynoms folgt der Ansatz:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} = c \Bigg(&\left\{ \frac{A_{11}}{(x - a_1)} + \frac{A_{12}}{(x - a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} \right\} \\ &+ \left\{ \frac{A_{21}}{(x - a_2)} + \ldots + \frac{A_{2k_2}}{(x - a_2)^{k_2}} \right\} + \ldots + \frac{A_{rk_r}}{(x - a_r)^{k_r}} \\ &+ \left\{ \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2 + b_1 x + c_1)} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^2} + \ldots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^{l_1}} \right\} \\ &+ \left\{ \frac{B_{21}x + C_{21}}{(x^2 + b_2 x + c_2)} + \ldots + \frac{B_{2l_2}x + C_{2l_2}}{(x^2 + b_2 x + c_2)^{l_2}} \right\} + \ldots + \frac{B_{sl_s}x + C_{sl_s}}{(x^2 + b_s x + c_s)^{l_s}} \Bigg) \end{aligned}$$

mit unbekannten Koeffizienten A_{jk}, B_{il}, C_{il}.

3. *Schritt:* Berechnung der unbekannten Koeffizienten A_{jk}, B_{il}, C_{il}.

Dazu wird zunächst die Ansatzgleichung mit dem Nennerpolynom $q(x)$ multipliziert. Nun ergeben sich Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Koeffizienten entweder durch Koeffizientenvergleich oder durch Einsetzen spezieller x-Werte (z.B. $x = a_1, a_2, \ldots$).

Beispiele:

- $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$

- $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{9x^2 - 2x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 5)}$

- $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 2}{(x^2+1)^2}$

Die bisher behandelten Integrationsregeln genügen, um jede gebrochenrationale reelle Funktion zu integrieren. Da man eine solche stets in die Summe aus einem Polynom und einer echt gebrochenrationalen Funktion zerlegen kann und Polynome einfach zu integrieren sind, brauchen wir uns nur noch überlegen, wir wir mit dem echt gebrochenrationalen Anteil verfahren. Dafür wenden wir die Zerlegung in reelle Partialbrüche an. Wegen der Linearität des Integrals müssen wir lediglich die Integrale zu den Partialbrüchen angeben, nämlich folgende:

(i) $\int \frac{dx}{x-a}$,

(ii) $\int \frac{dx}{(x-a)^k}, \quad k > 1$,

(iii) $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$,

(iv) $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx$,

(v) $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}, \quad k > 1$,

(vi) $\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}\,dx, \quad k > 1$,

wobei die Nennerpolynome $x^2 + px + q$ keine reellen Nullstellen mehr haben, d.h. die Diskriminante $(\frac{p}{2})^2 - q$ ist negativ. Handeln wir alle Fälle ab:

(i) Lineare Substitution in einem Grundintegral:

$$\boxed{\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C}$$

(ii) Lineare Substitution in einem Grundintegral:

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C}$$

(iii) Lineare Substitution in einem Grundintegral:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-(\frac{p}{2})^2\right)} = \frac{1}{q-(\frac{p}{2})^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}{q-\frac{p^2}{4}} \arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right) + C,$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.}$$

(iv) Wir frisieren den Zähler so, dass wir auf die oben besprochene Form „Ableitung durch Funktion“ kommen:

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \int \frac{b-\frac{ap}{2}}{x^2+px+q}\,dx,$$

$$\boxed{\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx = \frac{a}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.}$$

Das verbleibende Integral ist in (iii) gelöst worden.

(v) Wir gehen von $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}}$ aus und integrieren partiell, wobei $v'(x) = 1, u(x) = \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}$ gesetzt wird, d.h. $v(x) = x, u'(x) = \frac{-(k-1)(2x+p)}{(x^2+px+q)^k}$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}} = \frac{x}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \int \frac{x(k-1)(2x+p)}{(x^2+px+q)^k}\,dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+px+q)^{k-1}} + (k-1)\underbrace{\int \frac{2x^2+2px+2q}{(x^2+px+q)^k}\,dx}_{=2\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}}} + (k-1)\int \frac{-px-2q}{(x^2+px+q)^k}\,dx$$

Fasst man die beiden gleichen Integrale zusammen, ergibt sich

$$(3-2k)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}\,dx = \frac{x}{(x^2+px+q)^{k-1}} + (1-k)\frac{p}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx + \frac{(1-k)}{2}\int \frac{-p^2+4q}{(x^2+px+q)^k}\,dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{p}{2(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(1-k)(-p^2+4q)}{2}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

Damit sind wir beim gesuchten Integral angekommen und können nach diesem umstellen:

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{2x+p}{(k-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{2(3-2k)}{(1-k)(4q-p^2)}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}}.$$

Dies ist eine Rekursionsformel, die das gesuchte Integral für $k > 2$ auf ein Integral desselben Typs mit Exponent $k-1$ bzw. für $k = 2$ auf den Fall (iii) zurückführt.

(vi) Unsere Strategie ist wieder, den Zähler additiv zu zerlegen:

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx + \int \frac{b-\frac{ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}\,dx$$

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \frac{a}{2(-k+1)(x^2+px+q)^{k-1}} + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}\,dx$$

Das verbleibende Integral ist schon in (v) behandelt worden.

Beispiele:

- $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$

- $\displaystyle\int \frac{9x^2-2x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}\,dx$

- $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 2}{(x^2 + 1)^2} \, dx$

4 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir bestimmte Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ untersucht, bei denen eine beschränkte Funktion f über ein ebenfalls beschränktes, abgeschlossenes Intervall integriert wurde. Nun erweitern wir den Integralbegriff.

Definition 3. *Wir sagen, das uneigentliche Integral* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergiert, *falls* f *integrierbar ist auf* $[a, b]$ *für alle* $b > a$ *und*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

existiert. Sonst sagen wir, das Integral divergiert.

Auf analoge Weise wird auch die Konvergenz oder Divergenz des Integrals $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ erklärt.

Beispiele:

- $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

- $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$

Auch das uneigentliche Integral lässt sich als (vorzeichenbehaftete) Fläche unter einer Kurve deuten.

Definition 4. *Falls* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine Funktion ist, so dass* $\int_0^\infty f(x)\,dx$ *und* $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ *beide existieren, so sagen wir, dass* $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ *konvergiert, mit dem Wert*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Man beachte, dass das nicht gleichwertig zur Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

ist. Dieser ist z.B. für die Funktion $f(x) = x$ Null, während beide uneigentlichen Integrale divergieren.

Es gibt noch andere Arten unbestimmter Integrale:

Definition 5. *Man schreibt für eine Funktion* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

und sagt, das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ *konvergiert, falls der rechtsstehende Grenzwert und die in ihm auftretenden Integrale existieren. Andernfalls nennt man das Integral divergent.*

Für Funktionen $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ geht man analog vor.

Beispiele:

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Definition 6. *Ist* $f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ *auf einem Intervall* $[a, b]$ *mit Ausnahme eines Punktes* c *definiert, so bedeute*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

falls beide rechtsstehenden uneigentlichen Integrale existieren.

Beispiel: $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$

Man beachte, dass obige Definition nicht gleichwertig ist zur Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right). \tag{2}$$

Dieser ist z.B. für die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ auf $[-1,1] \setminus \{0\}$ gleich Null, obwohl beide uneigentlichen Integrale divergieren.

Falls nur (2) existiert, dann spricht man vom *Cauchyschen Hauptwert* des Integrals, geschrieben

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)\,dx.$$

v.p. steht für *valeur principale*. Wir haben also

$$\text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0.$$

Beispiel: $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$ mit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{, wenn } x < 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{, wenn } x > 0 \end{cases}$