Komplexe Zahlen

Definition 1. *Eine* komplexe Zahl z *ist ein geordnetes Paar reeller Zahlen* (a, b). *Wir nennen* a *den Realteil von* z *und* b *den Imaginärteil von* z, *geschrieben* $a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$.

Komplexe Zahlen werden in der *Gaußschen Zahlenebene* visualisiert:

Addition, Subtraktion und Multiplikation von komplexen Zahlen
$z_1 = (a_1, b_1)$ **und** $z_2 = (a_2, b_2)$:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &:= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ z_1 - z_2 &:= (a_1 - a_2, b_1 - b_2) \\ z_1 z_2 &:= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \end{aligned}$$

Dabei gelten das Kommutativ-, das Assoziativ- und das Distributivgesetz. Auch die binomischen Formeln sind gültig. Addition und Subtraktion lassen sich sehr einfach als Vektoraddition in der Gaußschen Zahlenebene visualisieren.

Definition 2. *Die komplexe Zahl* $i := (0, 1)$ *heißt* imaginäre Einheit. *Wir identifizieren jede komplexe Zahl der Form* $(a, 0)$ *mit der reellen Zahl* a.

Es folgt $i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$ und wegen der Identifizierung gilt: $i^2 = -1.$

1 Komplexe Zahlen in arithmetischer Darstellung

Für $z = (a, b)$ gilt $z = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0)$ und damit besitzt die komplexe Zahl z die *arithmetische Darstellung*:

$$\boxed{z = a + ib = \operatorname{Re} z + i \cdot \operatorname{Im} z.}$$

Definition 3. *Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet:*

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Das Rechnen mit komplexen Zahlen vereinfacht sich damit: Es genügt, die Rechenregeln und $i^2 = -1$ zu beachten.

Beispiel: $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 2 - i$:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \\ z_1 - z_2 &= \\ z_1 z_2 &= \end{aligned}$$

Definition 4. *Der Abstand einer komplexen Zahl $z = a + ib$ vom Koordinatenursprung der Gaußschen Ebene wird ihr* Betrag *genannt und mit $|z|$ bezeichnet.*
Laut Satz des Pythagoras gilt

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dies verallgemeinert natürlich den Betrag einer reellen Zahl, denn es ist

$$|a| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Definition 5. *Die komplexe Zahl* $\overline{z} := a - ib$ *liegt spiegelsymmetrisch bezüglich der reellen Achse zu* $z = a + ib$ *und wird* konjugiert komplexe Zahl *genannt.*

Die dritte binomische Formel liefert $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$ und damit

$$z\overline{z} = |z|^2.$$

Außerdem ist z reell genau dann, wenn $z = \overline{z}$ ist.

Von den elementaren Operationen bleibt die Division zu besprechen. Zunächst stellen wir fest, dass zu jedem $z \neq 0$ ein eindeutig bestimmtes Element z^{-1} (*Inverses* oder *Reziprokes* genannt) existiert, so dass $zz^{-1} = 1$. Zur Begründung reicht es,

$$z^{-1} := \frac{a}{|z|^2} - i\frac{b}{|z|^2}$$

zu setzen. Dann rechnet man nach, dass

$$zz^{-1} = (a+ib)\left(\frac{a}{|z|^2} - i\frac{b}{|z|^2}\right) = \frac{a^2}{|z|^2} + \frac{b^2}{|z|^2} - \frac{ab}{|z^2|}i + \frac{ba}{|z|^2}i = \frac{a^2+b^2}{|z|^2} = 1.$$

Division von komplexen Zahlen $z_1 = (a_1, b_1)$ **und** $z_2 = (a_2, b_2)$:

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 z_2^{-1} \qquad z_2 \neq 0$$

Der Quotient erfüllt die üblichen Rechengesetze der Bruchrechnung.
Zu seiner praktischen Berechnung wird mit dem konjugierten komplexen des Nenners erweitert, um einen reellen Nenner zu erhalten:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}$$

Also erhält man:

$$\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} = \frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}.$$

Beispiele:

- $\dfrac{4-5i}{3+i} =$

- $\dfrac{3+7i}{i} =$

2 Komplexe Zahlen in trigonometrischer Darstellung

Ein Punkt in der Gaußschen Zahlenebene kann auch durch seinen Abstand $r = |z|$ zum Ursprung und den Winkel φ zwischen reeller Achse und Vektor zu diesem Punkt charakterisiert werden.

Aus der Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis folgt für $z = a + ib$:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= r\cos\varphi, \\ b &= r\sin\varphi. \end{aligned}}$$

Damit hat die komplexe Zahl $z = a + ib$ die *trigonometrische Darstellung*:

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).}$$

Man beachte, dass φ nur eindeutig bis auf Addition von ganzzahligen Vielfachen von 2π ist, oft wird daher $\varphi \in [0, 2\pi)$ angenommen.

Definition 6. *Der Winkel φ zwischen reeller Achse und dem Vektor vom Ursprung zum Punkt z heißt* Argument *von z, geschrieben $\varphi = \arg(z)$.*

Beispiel: $\arg(i) =$

Bei der Bestimmung von φ ist Vorsicht geboten. So folgt aus $\tan\varphi = b/a$ nicht immer $\varphi = \arctan(b/a)$, denn $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, weswegen das Argument so nur für Zahlen in der rechten Halbebene ermittelt werden könnte. Liegt z in der linken

Halbebene, so liegt $-z$ in der rechten und hat dasselbe Verhältnis von Imaginärteil zu Realteil. Mit $\arg(z) = \arg(-z) + \pi$ erkennt man den richtigen Zusammenhang:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(b/a), & a > 0 \\ \arctan(b/a) + \pi, & a < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0, b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & a = 0, b < 0. \end{cases}$$

Beispiele: $\arg(3 - 3i) =$ $\qquad$ $\arg\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) =$

Multiplikation komplexer Zahlen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ **und** $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ **in trigonometrischer Darstellung**:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Fazit: Beim Multiplizieren werden die Beträge multipliziert und die Argumente addiert. Dies gestattet, Formeln wie

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$$

schnell einzusehen: Ob man erst die Winkel addiert und dann an der reellen Achse spiegelt oder umgekehrt, ist egal! (Man kann das Gesetz natürlich auch mit Hilfe der arithmetischen Darstellung nachrechnen.)

Speziell folgt für $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$
$$z^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$$
$$\vdots$$

Formel von Moivre: Für eine komplexe Zahl $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gilt:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Beispiel: $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, Berechnung von z^{100}:

Umwandlung von z in die trigonometrische Form:

$r := |z| =$ $\qquad\qquad$ $\varphi := \arg(z) =$

Damit ist

$z^{100} =$

Division komplexer Zahlen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$ in trigonometrischer Darstellung:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - \mathrm{i}\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} \\
&= \frac{r_1}{r_2}((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \mathrm{i}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))
\end{aligned}$$

Fazit: Beim Dividieren werden die Beträge dividiert, die Argumente subtrahiert.
Also können wir folgern: Multiplikation und Division können als Drehstreckungen in der Ebene interpretiert werden. Speziell ist

- Multiplikation mit i eine Drehung um 90° um den Ursprung gegen den Uhrzeigersinn,
- Division durch i eine Drehung um 90° um den Ursprung im Uhrzeigersinn.

3 Komplexe Zahlen in exponentieller Darstellung

Man kann eine komplexe Zahl z mit Betrag r und Argument φ nicht nur in der trigonometrischen Darstellung $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ schreiben, sondern auch in der *exponentiellen Darstellung*:

$$z = re^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Rechenoperationen wie z.B. die Multiplikation komplexer Zahlen sind in dieser Darstellung schnell durchführbar, da Potenzgesetze angewendet werden können.

Eulersche Formel: Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ gilt:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Eine Konsequenz der Eulerschen Formel ist die schönste Formel der Mathematik, die man für $z = \pi i$ erhält:

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

bzw.

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Die fünf fundamentalen Konstanten $\pi, i, 0, 1$ und e sind darin auf überraschende Weise verbunden.

Beispiel: Zeichnen von komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene:

$z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}},\ z_2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}},\ z_3 = 6e^{-i\pi}$

Beispiel: $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 2e^{\frac{3}{2}i\pi}$

Umwandlung von z_1 in die exponentielle Darstellung:

Berechnen in exponentieller Darstellung:

$$z_1 \cdot z_2 =$$

$$\frac{z_1}{z_2} =$$

$$z_2^4 =$$

Umwandeln der Ergebnisse in die arithmetische Darstellung:

$$z_1 \cdot z_2 =$$

$$\frac{z_1}{z_2} =$$

$$z_2^4 =$$

4 Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Definition 7. *Ganzrationale Funktionen sind Funktionen der Form*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \qquad z \in \mathbb{C}$$

mit Definitions- und Wertebereich $D = W = \mathbb{C}$ *und* Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. *Eine alternative Bezeichnung ist* Polynom, n *heißt im Falle* $a_n \neq 0$ *der Grad von* p.

4.1 Existenz von Nullstellen

Ganzrationale Funktionen brauchen in $\mathbb{R}$ keine Nullstellen haben, wie das Beispiel

$$p(z) = z^2 + 1$$

zeigt. In $\mathbb{C}$ hat die Gleichung aber Lösungen, nämlich $z_1 = i$ und $z_2 = -i$.

Zählt man alle Nullstellen eines Polynoms mit ihren Vielfachheiten, so ergibt sich:

Satz 1. **(Fundamentalsatz der Algebra)**
Jedes Polynom n-ten Grades besitzt n komplexe Nullstellen.

Satz 2. *Jedes Polynom n-ten Grades gestattet die* kanonische Zerlegung

$$p(z) = c(z - z_1)^{n_1}(z - z_2)^{n_2} \cdots (z - z_m)^{n_m}$$

mit $c \in \mathbb{C}$ und Nullstellen $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$, wobei n_i die Vielfachheit der Nullstelle z_i angibt.

Die rechnerische Gewinnung dieser Zerlegung erfolgt mit Hilfe der Polynomdivision.

4.2 Berechnung der Nullstellen für spezielle Polynome

Satz 3. *Die Nullstellen des Polynoms $p(z) = z^n - 1$ sind gegeben durch*

$$z_k := \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \qquad k = 1, \ldots, n$$

Diese Nullstellen heißen komplexe Einheitswurzeln *und bilden in der Zahlenebene die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks.*

Man sieht:

- für gerades n gibt es zwei reelle Lösungen: $+1, -1$,
- für ungerades n gibt es eine reelle Lösung: 1.

Beispiel: $z^5 = 1$ und $(z-3)^6 = 1$

Satz 4. *Die Nullstellen des Polynoms* $p(z) = z^n - a$ *für* $a \in \mathbb{C}$ *sind gegeben durch*

$$z_k := \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{2k\pi + \varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi + \varphi}{n}\right)\right), \qquad k = 1, \dots, n.$$

Beispiel: $(z+4)^7 - 2(1+i) = 0$

Für quadratische Polynome $p(z) = z^2 + pz + q$ liefert die bekannte Lösungsformel

$$\boxed{z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

komplexe Lösungen, falls die Diskriminante $D := \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ negativ ist. Unter $\sqrt{D}$ sei dabei eine der beiden komplexen Zahlen verstanden, deren Quadrat gleich D ist.

Beispiele:

- $z^2 + 2z - i = 0$

  Aus der Lösungsformel erhalten wir $z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+i}$.
  Um $w := \sqrt{1+i}$ zu bestimmen, wandeln wir $1+i$ in die trigonometrische Form um:

  Da $w = \sqrt{1+i}$ ist, gilt $w^2 - (1+i) = 0$ und wir erhalten mit Hilfe von Satz 4:

  (Dabei kommt das Minuszeichen zustande, weil Sinus und Kosinus ihr Vorzeichen ändern bei Argumentverschiebungen um π.)
  Damit lauten die Lösungen der quadratischen Gleichung:

- $z^2 - (1+2i)z + 3(1+i) = 0$

4.3 Polynome mit reellen Koeffizienten

Betrachten wir zum Schluss noch *reelle Polynome*, also Polynome, dessen Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ sämtliche reell sind. Es gilt:

Satz 5. *Ist $z_k \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle eines reellen Polynoms, so auch $\bar{z}_k$.*

Die nicht-reellen Nullstellen eines reellen Polynoms treten also in Paaren zueinander konjugierter Nullstellen auf, und man kann sich überlegen, dass beide die gleiche Vielfachheit haben. In der kanonischen Zerlegung kann man nun jeweils zwei Faktoren zusammenfassen:

$$(z - z_k)(z - \bar{z}_k) = z^2 - (z_k + \bar{z}_k)z + z_k\bar{z}_k = z^2 + b_k z + c_k$$

mit reellen (!) Zahlen $b_k := -(z_k + \bar{z}_k) = -2\mathrm{Re}(z_k)$ und $c_k := z_k\bar{z}_k = |z_k|^2$. Damit gilt:

Satz 6. *Jedes reelle Polynom n-ten Grades gestattet die Zerlegung*

$$p(z) = c\prod_{k=1}^{r}(z - x_k)^{n_k}\prod_{k=r+1}^{m}(z^2 + b_k z + c_k)^{n_k}$$

mit reellen Nullstellen x_k, reellen Zahlen c, b_k, c_k und Vielfachheiten n_k.

Man beachte, dass die Zahl der paarweise verschiedenen komplexen und reellen Nullstellen hier nicht mehr mit m bezeichnet wurde , sondern $r + 2(m - r) = 2m - r$ ist.

Beispiel: Sei $p(z) = z^4 + 1$. Aus der Lage in der komplexen Ebene

liest man die vier Nullstellen sofort ab:

$$z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \qquad z_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \qquad z_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \qquad z_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

Tatsächlich sind z_1 und z_4 sowie z_2 und z_3 zueinander konjugiert. Wir fassen die entsprechenden Faktoren zusammen:

$$\begin{aligned}(z - z_1)(z - z_4) &= z^2 - (z_1 + z_4)z + z_1 z_4 = z^2 - \frac{2}{\sqrt{2}} z + 1 = z^2 - \sqrt{2} z + 1 \\ (z - z_2)(z - z_3) &= z^2 - (z_2 + z_3)z + z_2 z_3 = z^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} z + 1 = z^2 + \sqrt{2} z + 1\end{aligned}$$

Also gilt:

$$z^4 + 1 = (z^2 + \sqrt{2} z + 1)(z^2 - \sqrt{2} z + 1).$$