Matrizen, Determinanten, lineare Gleichungssysteme

1 Matrizen

Definition 1. *Eine* Matrix A *vom Typ* $m \times n$ *(oder eine* $m \times n$*–Matrix,* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *oder* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$*) ist ein rechteckiges Zahlenschema mit* m *Zeilen und* n *Spalten:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit reellen oder komplexen Einträgen *(oder* Komponenten*)* a_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. *Abkürzend schreibt man für* A *auch* $(a_{ij})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ *oder* $(a_{ij})_{m\times n}$.

Zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ sind *gleich*, wenn beide den gleichen Typ $m \times n$ haben und $a_{ij} = b_{ij}$ für $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ gilt.

Spezielle Matrizen:

- *quadratische Matrix*
  Eine Matrix $A = (a_{ij})$ vom Typ $n \times n$ (d.h. mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl) nennt man *quadratisch*. Die Elemente a_{ii}, $i = 1, \dots, n$ bilden die *Hauptdiagonale*.

- *Nullmatrix* O (bzw. O_n für die Nullmatrix mit n Zeilen und Spalten)

- *Einheitsmatrix* E (bzw. E_n für die Einheitsmatrix mit n Zeilen und Spalten)

- *Diagonalmatrix*

- *obere/untere Dreiecksmatrix*

Operationen mit Matrizen:

Die folgenden zwei Operationen sind für Matrizen komponentenweise definiert:

- Die *Summe* zweier Matrizen $A = (a_{ij})_{m\times n}$ und $B = (b_{ij})_{m\times n}$ ist die Matrix $C = (c_{ij})_{m\times n}$ mit den Einträgen

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n.$$

  Wir schreiben dafür $C = A + B$. Zwei Matrizen können nur dann addiert werden, wenn beide den gleichen Typ haben.

  Beispiel:

- Das *Produkt einer Zahl* $\lambda \in \mathbb{R}$ *mit einer Matrix* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ist die Matrix $B = (b_{ij})_{m\times n}$ mit den Einträgen

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n.$$

  Wir schreiben dafür $B = \lambda A$.

  Beispiel:

Rechenregeln: Für beliebige Matrizen A, B, C des gleichen Typs $m \times n$ und beliebige Zahlen α, β gilt:

1. (Kommutativität)
2. (Assoziativität)
3. (Nullelement)
4. (inverses Element der Addition)
5.
6.
7.
8.

Neben diesen beiden Operationen gibt es noch folgende Operationen, speziell für Matrizen:

- Die *Transponierte* A^T einer $m \times n$–Matrix $A = (a_{ij})$ ergibt sich aus:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

  Somit ist A^T eine $n \times m$–Matrix. Bei ihr sind gegenüber A Zeilen und Spalten vertauscht. Bei der Transponierten einer quadratischen Matrix werden alle Elemente an der Hauptdiagonalen gespiegelt.

  Beispiel:

- Das *Produkt einer Matrix* $A = (a_{ij})_{m \times n}$ *und einer Matrix* $B = (b_{ij})_{n \times p}$ ist die Matrix $C = (c_{ij})_{m \times p}$ mit den Einträgen

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, p.$$

  Wir schreiben dafür $C = AB$. Zwei Matrizen A und B können nur dann in dieser Reihenfolge multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl von A der Zeilenanzahl von B entspricht.

Der $i-j$-te Eintrag der Produktmatrix wird also aus den Einträgen der i-ten Zeile von A und der j-ten Spalte von B berechnet:

Zum Berechnen der Produktmatrix verwendet man oft das *Falksche Schema*.

Beispiele:

Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ, d.h. im Allgemeinen ist $AB \neq BA$!

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$AB =$

$BA =$

Rechenregeln: Für beliebige $m \times n$–Matrizen A, A_1, A_2, $n \times p$–Matrizen B, B_1, B_2, $p \times q$–Matrix C und eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

1. (1. Distributivgesetz)
2. (2. Distributivgesetz)
3.
4. (Assoziativität der Matrizenmultiplikation)
5.

Invertierbare Matrizen

Wir betrachten jetzt nur quadratische $n \times n$–Matrizen.

Definition 2. *Eine Matrix B ist die* Inverse *einer Matrix A, wenn gilt $AB = BA = E$. Wir schreiben dafür $B = A^{-1}$.*

Nicht jede Matrix hat eine Inverse!
Hätte zum Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine Inverse $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so wäre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = AB = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vergleich der Einträge rechts unten zeigt, dass dies nicht erfüllbar ist.

Satz 1. *Wenn die Inverse einer Matrix A existiert, so ist sie eindeutig bestimmt.*

<u>Bew.</u>:

Definition 3. *Eine quadratische Matrix A heißt* regulär *bzw.* invertierbar, *wenn sie eine Inverse A^{-1} besitzt, andernfalls heißt sie* singulär *bzw.* nicht invertierbar.

Beispiel:

2 Lineare Gleichungssysteme

Ein *lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen und n Unbekannten hat die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

lässt sich das System schreiben als

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Gauß-Algorithmus

Die Lösung eines Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ erfolgt mit Hilfe des *Gauß-Algorithmus* oder des *Gauß-Jordan-Algorithmus*. Um uns das Schreiben der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ zu ersparen, schreiben wir die Koeffizientenmatrix A und die rechte Seite $\vec{b}$ in ein Schema der Gestalt

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & \ldots & x_n & \\ \hline a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

Nun kann man folgende Umformungen vornehmen, die offenbar die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht ändern:

- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$,
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile,
- Vertauschen von zwei Zeilen,
- Vertauschen von zwei Variablen (dies muss man sich allerdings merken bzw. im Schema markieren)
- Weglassen von Nullzeilen
- Weglassen einer von zwei identischen Zeilen

Das Ziel dieser Operationen ist die Herstellung der sogenannten *Zeilenstufenform* bzw. *Gaußschen Normalform*:

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_r & x_{r+1} & \dots & x_n & \\
\hline
1 & c_{1,2} & c_{1,3} & \dots & c_{1,r} & c_{1,(r+1)} & \dots & c_{1,n} & c_1 \\
0 & 1 & c_{2,3} & \dots & c_{2,r} & c_{2,(r+1)} & \dots & c_{2,n} & c_2 \\
0 & 0 & 1 & \dots & c_{3,r} & c_{3,(r+1)} & \dots & c_{3,n} & c_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_{r,(r+1)} & \dots & c_{r,n} & c_r \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{r+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_m
\end{array}
$$

Dabei erzeuge man zuerst die Nulleinträge in der ersten Spalte, danach in der zweiten Spalte, usw.
Wir bezeichnen die neu entstandene obere Dreiecksmatrix mit C und die neue rechte Seite mit c.

Definition 4. *Sei C eine Matrix in Zeilenstufenform. Die Anzahl r der Zeilen, die keine Nullzeilen sind, wird als* Rang *der Matrix C bezeichnet, und wird geschrieben als $\operatorname{rg} C$.*

Entsteht eine Matrix C in Zeilenstufenform aus einer Matrix A durch oben beschriebene Umformungen, so besitzt A denselben Rang wie C.

Satz 2. *Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei A eine $m \times n$ Matrix, $\vec{b}$ ein Spaltenvektor der Länge m und $\vec{x}$ ein Spaltenvektor der Länge n ist. Dann gilt:*

1. ***Lösbarkeitsentscheidung:*** *Ist eine der Zahlen $c_{r+1}, \dots, c_m$ von Null verschieden, so ist $C\vec{x} = \vec{c}$ nicht lösbar, und damit ist auch das Ausgangsgleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$* nicht lösbar.

2. ***Anzahl der freien Variablen:*** *Ist $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar, dann enthält die allgemeine Lösung $n - r$ freie Variable, dabei ist n die Anzahl der Unbekannten.*

3. ***Lösungsstruktur:*** *Ist das System $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar, dann lässt sich die allgemeine Lösung in der Form*
$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{u},$$
darstellen. Dabei ist $\vec{v}_0$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ *und $\vec{u}$* die allgemeine Lösung des zugeordneten homogenen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$.

Beispiel: Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 6 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 + 12x_4 &= 18 \\ 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= 16 \end{aligned}$$

Hier gilt $m = n = 4$. Wir wenden den Gauß-Algorithmus an:

Definition 5. *Gegeben sei das lineare Gleichungssystem* $A\vec{x} = \vec{b}$. *Hängt man den Vektor* $\vec{b}$ *als neue Spalte an die Matrix* A *an, so erhält man die erweiterte Koeffizientenmatrix* $A \mid \vec{b}$.

Satz 3. *Gegeben sei das lineare Gleichungssystem* $A\vec{x} = \vec{b}$*, wobei* A *eine* $m \times n$ *Matrix,* $\vec{b}$ *ein Spaltenvektor der Länge* m *und* $\vec{x}$ *ein Spaltenvektor der Länge* n *ist. Dann gilt:*

1. *Das Gleichungssystem ist nicht lösbar, wenn* $\operatorname{rg} A < \operatorname{rg}(A \mid \vec{b})$ *ist.*
2. *Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn* $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A \mid \vec{b}) = n$ *ist.*
3. *Das Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar, wenn* $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A \mid \vec{b}) < n$ *ist.*

Beispiel: Betrachten wir das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 19 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 22 \\ 6x_1 - 7x_2 + 7x_3 &= 10. \end{aligned}$$

Dabei ist $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ und $A \mid \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 19 \\ 4 & -4 & 3 & 22 \\ 6 & -7 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

Der Gauß-Algorithmus verläuft so:

Gauß-Jordan-Algorithmus

Der Gauß-Jordan-Algorithmus funktioniert genauso wie der Gauß-Algorithmus, jedoch werden auch oberhalb der Diagonalen der Matrix Nullen erzeugt. Als Ergebnis erhält man die *Gauß-Jordan-Normalform*:

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
x_1 & x_2 & \dots & x_r & x_{r+1} & \dots & x_n & \\
\hline
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & c_r \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{r+1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_m
\end{array}
$$

Der Gauß-Jordan-Algorithmus wird zur Berechnung der Inversen einer Matrix verwendet.

Algorithmus zur Bestimmung der inversen Matrix: Es sei A eine $n \times n$-Matrix.

1. Man füge die $n \times n$—Einheitsmatrix an die Matrix A an, d.h. man bilde die Matrix $(A|E)$.
2. Man erzeuge durch äquivalente Zeilenumformungen gemäß dem Gauß-Jordan-Algorithmus die Gauß-Jordan-Normalform der Matrix $(A|E)$.
   Ist die erzeugte Gauß-Jordan-Normalform von der Gestalt $(E|B)$, so ist B die zu A inverse Matrix.
   Ist die erzeugte Gauß-Jordan-Normalform nicht von der Gestalt $(E|B)$, d.h ist die Matrix der ersten n Zeilen und Spalten nicht die Einheitsmatrix, dann ist A nicht invertierbar.

Beispiel: Wir überprüfen, ob die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ eine Inverse besitzt.

Beispiel: Berechnung der Inversen zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3 Determinanten

Die Determinante $\det A$ bzw. $|A|$ ordnet einer quadratischen Matrix A eine Zahl zu. Sie hat vielfältige Anwendungen, z.B. kann man mit ihr entscheiden, ob eine Matrix invertierbar ist oder ob ein lineares Gleichungssystem mit quadratischer Koeffizientenmatrix eindeutig lösbar ist:

Satz 4. *Sei A eine $n \times n$–Matrix. Dann sind äquivalent:*

1. $\det A \neq 0$.
2. *A ist regulär, d.h. A ist invertierbar.*
3. $\operatorname{rg} A = n$
4. *Das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung.*

Berechnung von Determinanten

Für die quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ vom Typ $n \times n$ lässt sich die Determinante von A wie folgt berechnen:

- Für $n = 1$ ist $\det A = a_{11}$.
- Für $n = 2$ gilt

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

  Man multipliziert also überkreuz:

- Für $n = 3$ gilt

$$\begin{aligned} \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

  Diese Determinante kann mit der *Regel von Sarrus* berechnet werden:

  Beispiele:

Für $n \geqslant 4$ gibt es solche Merkregeln nicht mehr. Hier muss die Determinante anders berechnet werden.

Definition 6. *Sei A eine quadratische $n \times n$–Matrix. Ferner sei A_{ij} mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte hervorgeht. Dann nennen wir die vorzeichenbehafteten Unterdeterminanten*

$$U_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

die Adjunkten *von A.*

Ihre Vorzeichen $(-1)^{i+j}$ sind schachbrettartig angeordnet:

$$\begin{matrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

Beispiel: Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ erhalten wir $U_{23} =$

Wir können nun die Determinante der $n \times n$–Matrix A aus den Determinanten der $(n-1) \times (n-1)$–Matrizen U_{ij} berechnen:

Satz 5. (Laplacescher Entwicklungssatz) *Sei A eine $n \times n$–Matrix.*
Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt die Entwicklung nach der i-ten Zeile:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} U_{ij}.$$

Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt die Entwicklung nach der j-ten Spalte:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} U_{ij}.$$

Mit diesem Satz kann man die Berechnung einer 4×4–Determinante auf die Berechnung von 3×3–Determinanten zurückführen, die dann mit Hilfe der Regel von Sarrus berechnet werden. Bei noch größeren Determinanten muss man den Entwicklungssatz mehrfach anwenden.

Beispiele:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 10 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & -4 & 7 \end{vmatrix} =$$

Eigenschaften von Determinanten: Sei A eine $n \times n-$Matrix und $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ seien die Zeilenvektoren von A (vom Typ $1 \times n$). $\vec{b}$ sei ein weiterer Zeilenvektor (vom Typ $1 \times n$). Dann gilt:

1. Man kann einen Faktor aus einer Zeile vor die Determinante ziehen:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda\vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \lambda\vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} = \ldots = \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \lambda\vec{a}_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix},$$

2. Hat A zwei gleiche Zeilen, so gilt $\det A = 0$.

3. Vertauscht man in einer Determinante zwei Zeilen, so ändert sich ihr Vorzeichen.

4. Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert.

5. $\det A = \det A^T$

Die Eigenschaften 1. bis 5. gelten sinngemäß auch für die Spalten.

Aus diesen Eigenschaften ergibt sich nun auch eine alternative Strategie zur Determinanten-Berechnung. Dazu formen wir die Determinante durch Anwendung der Operationen

- Addieren von Vielfachen von Zeilen (Spalten) zu anderen Zeilen (Spalten),
- Vertauschen von Zeilen (Spalten) (Achtung: Vorzeichenwechsel!)

so lange um, bis sich eine obere Dreiecksmatrix ergibt. An dieser kann man den Wert der Determinante sofort ablesen, denn es gilt:

Satz 6. *Es gilt für die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Ebenso ist die Determinante einer unteren Dreiecksmatrix das Produkt der Diagonalelemente.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$