Vektorräume

In vielen physikalischen Betrachtungen treten Größen auf, die nicht nur durch ihren Zahlenwert charakterisiert werden, sondern auch durch ihre Richtung. Man nennt sie *vektorielle Größen* im Gegensatz zu *skalaren Größen*, die keine Richtung haben. Diese vektoriellen Größen lassen sich in der Ebene durch ein Zahlentupel (Element von $\mathbb{R}^2$) oder im Raum durch ein Zahlentripel (Element von $\mathbb{R}^3$) darstellen. Wir wollen aber den Begriff des Vektors noch allgemeiner fassen. Dazu erinnern wir uns an die Operationen, die man typischer Weise mit Vektoren durchführt: Vektoren lassen sich addieren (in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ als Parallelogrammaddition veranschaulicht) und mit Zahlen (also Skalaren) multiplizieren (in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ als Streckung oder Stauchung mit eventueller Richtungsumkehr veranschaulicht). Jedes System von Objekten, das diese beiden Operationen gestattet, die einige einfache Rechengesetze erfüllen, bezeichnet man als Vektorraum.

Definition 1. *Eine nichtleere Menge V heißt reeller (komplexer)* Vektorraum *und seine Elemente* Vektoren, *falls eine mit $+$ bezeichnete Operation „Vektoraddition" zwischen je zwei Vektoren und eine unbezeichnete Operation „Skalarmultiplikation" zwischen je einer reellen (komplexen) Zahl und einem Vektor existieren, die als Ergebnis wieder Vektoren in V liefern, so dass für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{C}$) gilt:*

1. *(Kommutativität der Vektoraddition)*
2. *(Assoziativität der Vektoraddition)*
3. *(Existenz des* Nullvektors*)*
4. *(Existenz des zu $\vec{v}$* entgegengesetzten Vektors*)*
5. *(Assoziativgesetz der Skalarmultiplikation)*
6. *(Distributivgesetz der Skalarmultiplikation)*
7. *(Distributivgesetz der Vektoraddition)*
8. .

Vorerst wichtigstes Beispiel eines reellen Vektorraumes ist

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

wobei die Operationen Vektoraddition und Skalarmultiplikation definiert sind durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Man sagt, die Elemente von $\mathbb{R}^n$ werden *komponentenweise* addiert bzw. skalarmultipliziert. Die Rolle des Nullvektors spielt der Vektor $0 = (0, 0, \ldots, 0)^T$
und der entgegengesetzte Vektor von $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ ist $-\vec{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)^T$.

Als *Differenz zweier Vektoren* definiert man ferner

$$\vec{v} - \vec{w} := \vec{v} + (-1)\vec{w}.$$

Linearkombinationen, Lineare (Un-)Abhängigkeit

Definition 2. *Jede aus endlich vielen Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ eines Vektorraumes V gebildete Summe der Form*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_k \vec{v}_k$$

mit den Koeffizienten $\lambda_i \in \mathbb{R}$ heißt Linearkombination *der $\vec{v}_i$.*

Für eine Menge $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\} \subseteq V$ bezeichnet man als lineare Hülle *von M die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus M, geschrieben als*

$$\operatorname{Lin} M = \operatorname{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beispiele:

- Falls $M = \{\vec{v}\}$ nur aus einem Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ eines reellen Vektorraumes besteht, so ist $\operatorname{Lin} M = \{\lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ einfach die Menge aller skalaren Vielfachen von $\vec{v}$. In $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ bilden diese Vektoren eine Gerade durch den Ursprung.
- Falls $M = \{\vec{v}, \vec{w}\}$ aus zwei vom Nullvektor verschiedenen Vektoren eines reellen Vektorraumes besteht, so ist $\operatorname{Lin} M = \{\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Im $\mathbb{R}^3$ kann dies eine Ebene oder eine Gerade durch den Ursprung darstellen.

Definition 3. *Endlich viele Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\ldots, \vec{v}_k$ des Vektorraumes V heißen* linear abhängig, *wenn es Zahlen λ_1, λ_2, $\ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ gibt, die nicht alle gleich Null sind, so dass gilt*

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}.$$

Die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\ldots, \vec{v}_k$ heißen linear unabhängig, *wenn aus*

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

als einzige Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$ folgt.

Beispiel: $V = \mathbb{R}^n$ und

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in V$$

Wir wollen zeigen, dass sie linear unabhängig sind:

Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$ und $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in V$

Definition 4. *Eine Menge* $M \subseteq V$ *heißt* Erzeugendensystem *von* V*, falls* $\operatorname{Lin} M = V$.

Wir wollen uns überlegen, dass die früher schon betrachtete Menge $M = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$ ist. Dazu müssen wir nur nachweisen, dass sich jeder Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ darstellen lässt:

Definition 5. *Eine Menge* $B \subseteq V$ *heißt* Basis *von* V *und ihre Elemente heißen* Basisvektoren*, falls* B *linear unabhängiges Erzeugendensystem ist. Gibt es eine Basis* B *aus endlich vielen Vektoren, so heißt* V endlichdimensional *und die Zahl der Basisvektoren die* Dimension *von* V*. Andernfalls nennt man* V unendlichdimensional.

Nach dem bisher gezeigten ist klar, dass $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bildet. Man nennt sie die *Standardbasis*. Also hat $\mathbb{R}^n$ erwartungsgemäß die Dimension n.
In einem Vektorraum gibt es in der Regel viele verschiedene Basen.

Satz 1. *Sei* $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ *Basis des Vektorraumes* V*. Dann gilt:*

1. *Jeder Vektor* $\vec{v} \in V$ *ist eindeutig als Linearkombination* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b}_i$ *der Basisvektoren darstellbar. Die* λ_i *heißen dann* Koordinaten *von* $\vec{v}$ *bzgl. der Basis* B.
2. *Für* $m > n$ *sind beliebige* m *Vektoren linear abhängig.*
3. *Für* $m < n$ *bilden beliebige* m *Vektoren kein Erzeugendensystem von* V.

Beispiele:

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sind linear abhängig
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig, bilden aber kein Erzeugendensystem für $\mathbb{R}^3$

- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

  Die Koordinaten des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis B sind:

Lineare (Un-)Abhängigkeit und Matrizen

Möchte man die lineare Abhängigkeit von Vektoren überprüfen, oder die Dimension der linearen Hülle von einer Menge von Vektoren ermitteln, so kann man dazu Matrizen verwenden.

Definition 6. *Es sei A eine $m \times n$-Matrix mit den Zeilen $\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_m$, und den Spalten $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\ldots$, $\vec{s}_n$. Dann nennt man*

$$\mathrm{Lin}\,(\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_m) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{z}_i;\ \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

den Zeilenraum *von A und*

$$\mathrm{Lin}\,(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{s}_i;\ \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

den Spaltenraum *von A.*

Satz 2. *Der Zeilenraum und der Spaltenraum einer Matrix haben die gleiche Dimension. Diese ist gleich dem Rang der Matrix, d.h. der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen bzw. Spalten der Matrix.*

Beispiel: Wir bestimmen die Dimension der linearen Hülle der Vektoren

$$\vec{a} = (1,1,2,4)^T,\ \vec{b} = (2,-1,-5,-2)^T,\ \vec{c} = (1,-1,-4,0)^T,\ \vec{d} = (2,1,1,6)^T \in \mathbb{R}^4 :$$

Möchte man überprüfen, ob eine Menge von n Vektoren eine Basis des $n-$dimensionalen Vektorraums V ist, so kann man dazu ebenfalls Matrizen verwenden:

Satz 3. *Sei A eine $n \times n-$Matrix. Dann sind äquivalent:*

1. *Die Zeilen bzw. Spalten von A sind linear unabhängig.*
2. $\det A \neq 0$.
3. $\operatorname{rg} A = n$
4. *A ist regulär*

Beispiel: Wir überprüfen, ob folgende drei Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden:

$$\vec{a} = (1,2,-3)^T,\ \vec{b} = (0,1,6)^T,\ \vec{c} = (3,-4,0)^T$$

Beispiel: Ist $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ für:

$$\vec{a} = (1, 2, -1, 0)^\mathsf{T},\ \vec{b} = (2, 0, 1, -1)^\mathsf{T},\ \vec{c} = (-1, 4, 2, 2)^\mathsf{T},\ \vec{d} = (0, 3, -1, 0)^\mathsf{T}\ ?$$

Unterräume

Definition 7. *Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraumes V heißt* Unterraum *von V, wenn sie selbst Vektorraum bezüglich derselben Operationen Addition und Skalarmultiplikation wie V ist.*

Wie bei jedem Vektorraum kann man auch bei Unterräumen endlich- und unendlichdimensionale unterscheiden und bei ersteren von deren Dimension sprechen. Die Dimension eines Unterraumes U von V ist nie größer als die Dimension von V selbst. Unterräume lassen sich folgendermaßen charakterisieren.

Satz 4. *Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraumes V ist genau dann Unterraum von V, wenn sie bezüglich der Operationen Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist, d.h.*

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (bzw. } \mathbb{C}) : \ \vec{v} + \vec{w} \in U, \ \lambda\vec{v} \in U.$$

Beispiele für Unterräume :

- In $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind jede Gerade und jede Ebene durch den Ursprung ein Unterraum.
- In jedem Vektorraum V ist die lineare Hülle jeder nichtleeren Teilmenge $M \subseteq V$ ein Unterraum. Dies sieht man leicht ein: die Summe von zwei Linearkombinationen und ein skalares Vielfaches einer Linearkombination von Elementen aus M sind wieder Linearkombinationen von Elementen aus M.
- In jedem Vektorraum ist $\{\vec{0}\}$ ein Unterraum. Seine Dimension ist übrigens 0, denn $\emptyset$ ist eine Basis. ($\vec{0}$ ist die Summe einer leeren Linearkombination. Wem das mysteriös erscheint, der kann die Dimension auch per Definition auf 0 setzen.)

Beispiel: Die Menge $U = \{(\alpha, 2\alpha, \beta)^T \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ist ein $2-$dim. Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

Skalarprodukt und Längen

Wenn wir an Vektoren und als eines ihrer uns vertrautesten Beispiele, die Geometrie, denken, dann ist uns neben den bloßen Richtungen auch oftmals an konkreten Längen oder Lagen von Vektoren zueinander gelegen. dazu benötigen wir allerdings das Skalarprodukt:

Definition 8. *Ein* Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ *ordnet je zwei Vektoren* $\vec{v},\vec{w} \in V$ *eine reelle bzw. komplexe Zahl* $(\vec{v},\vec{w})$ *zu, so dass folgende Rechengesetze für alle* $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{R}$ *bzw.* $\lambda \in \mathbb{C}$ *erfüllt sind:*

1. *(Symmetrie)*
2. *(Positivität)*
3. *(Linearität)*

Die Konjugation in (i) spielt dabei nur in komplexen Vektorräumen eine Rolle, im reellen Fall ist sie gegenstandslos. Das wichtigste Beispiel ist das im $\mathbb{R}^n$ durch

$$(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n, \quad \vec{x} = (x_1,\ldots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \vec{y} = (y_1,\ldots,y_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

definierte Skalarprodukt. Man schreibt hier auch oft $\vec{x}\cdot\vec{y}$ statt $(\vec{x},\vec{y})$.

Definition 9. *Zwei Vektoren* $\vec{v},\vec{w} \in V$ *heißen* orthogonal, *wenn* $(\vec{v},\vec{w}) = 0$. *Eine Basis* B *heißt* Orthogonalbasis, *wenn für je zwei Vektoren* $\vec{v},\vec{w} \in B$ *gilt*

$$(\vec{v},\vec{w}) = \begin{cases} 1, & \vec{v} = \vec{w} \\ 0, & \vec{v} \neq \vec{w}. \end{cases}$$

Wir können das Skalarprodukt nutzen, um die sogenannte Norm eines Vektors $\vec{v}$ zu definieren:

$$||\vec{v}|| := \sqrt{(\vec{v},\vec{v})}.$$

Diese können wir auch ganz profan als Länge des Vektors betrachten.

Satz 5. *Sei V ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Dann gilt für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw.$\lambda \in \mathbb{C}$*

1.
2.
3. *(Dreiecksungleichung)*

Mit Hilfe der Norm und des Skalarproduktes kann man nun zum Beispiel den zwischen zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ eingeschlossenen Winkel α berechnen:

$$\cos \alpha := \frac{(\vec{v}, \vec{w})}{||\vec{v}|| \; ||\vec{w}||}.$$