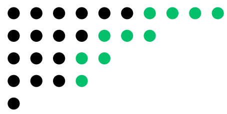
Kombinatorik - Hausübung 1 (WS 11/12)

Musterlösung

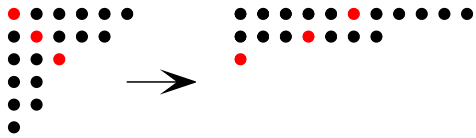
„Never guess, unless you have to; there's enough uncertainty in the universe as it is."
(The Doctor in Logopolis)

Lösung 1

(a) Man betrachte den Ferrers-Graphen einer beliebigen Partition von n in k Summanden (o.B.d.A. sei er so geordnet, dass die Punkteanzahl pro Zeile nicht zunimmt). Nun ergänze man in der ersten Zeile genau $k-1$ Knoten, in der zweiten Zeile $k-2, \ldots,$ in der vorletzten Zeile einen Knoten und in der letzten, der k-ten Zeile, keinen Knoten. Dann hat man nun eine Partition von $n + \sum_{i=0}^{k-1} i = n + \frac{k(k-1)}{2} = n + \binom{k}{2}$ in k Summanden. dass diese Summanden paarweise verschieden sind, ergibt sich aus der vorausgesetzten Zeilenanordnung eines Ferrers-Graphen und dem Hinzufügen einer abnehmenden Anzahl von Punkten. Mit Anwendung der Isomorphieregel folgt die die Aussage.



(b) Die Menge aller selbstadjungierten Partitionen ist bijektiv in die Menge aller Ferrers-Graphen mit n Punkten, die symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonale sind, abbildbar. D.h. es befinden sich in der i-ten Spalte genauso viele Punkte wie in der i-ten Zeile. Sei der Ferrers-Graph nun o.B.d.A. zeilenweise geordnet, sodass die Punkteanzahl pro Zeile nicht zunimmt. Wir bilden nun einen neuen Ferrers-Graphen, indem wir die Punkte der k-ten Zeile <u>und</u> Spalte in die neue k-Zeile setzen.



Dann sind alle Summanden ungerade auf Grund der Symmetrie der vorherigen Ferrers-Graphen und außerdem noch paarweise verschieden, da sich ja die Anzahl der Punkte rechts bzw. unterhalb des Hauptdiagonalpunktes von Zeile zu Zeile mindestens um eins verringert.

Lösung 2

(a) Grundsätzlich kann der Zoodirektor auswählen, ob er eine, zwei, ... oder neun neue Arten haben möchte. Damit muss er aus den neun zur Verfügung stehenden Arten auswählen. Das ergibt

$$\binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6} + \binom{9}{7} + \binom{9}{8} + \binom{9}{9} = \sum_{k=1}^{9} \binom{9}{k} = \underline{2^9 - 1}.$$

(b) Unter die Raubkatzen fallen die Leoparden und die Tiger, unter die Wasserbewohner die Krokodile und Nilpferde. Um unter den restlichen Tieren welche auszuwählen, bis zu fünf Sorten, gibt es analog zu oben, einschließlich der leeren Auswahl, 2^5 Möglichkeiten. Dazu kommen jetzt noch folgende Fälle:

Leoparden	Tiger	Krokodile	Nilpferde
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	0	1	1

Das sind also sieben Fälle. Es ergibt sich:

$$7 \cdot 2^5 - 1 = \underline{223}.$$

(Abzug der leeren Auswahl!)

(c) Um aus den „Big Five“, die in Frage kommen, höchstens zwei auszuwählen, hat man (Büffel, Elefanten, Leoparden)

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 7$$

Möglichkeiten. Damit ergibt sich insgesamt

$$7 \cdot 2^6 - 1 = \underline{447}.$$

Lösung 3

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion:

- IA: $n = 0$

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} \cdot a^0 \cdot b^0$$

- IV: Die Behauptung gelte für alle $k \leqslant n$.
- IS: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Man beachte hierbei die Verwendung der Identität

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Lösung 4

(a)

$$
\begin{aligned}
\underline{p(n,k)} &= p(n-k,k) + p(n-1,k-1) \\
&= p(n-k,k) + p(n-k,k-1) + p(n-2,k-2) = \cdots \\
&= p(n-k,k) + p(n-k,k-1) + \cdots + p(n-k,2) + p(n-k+1,1) \\
&= p(n-k,k) + p(n-k,k-1) + \cdots + p(n-k,2) + p(n-k,1) + p(n-k,0) \\
&= \underline{\sum_{i=0}^{k} p(n-k,i)}
\end{aligned}
$$

(b) Um eine Partition einer Menge mit $(n+1)$ Elementen zu erhalten, kann man das $(n+1)$-te Element im ersten Block platzieren und danach all die m Elemente auswählen, die nicht in diesem Block auftauchen. Dafür haben wir jeweils $\binom{n}{m}$ Möglichkeiten, bei denen jeweils $S(m,k-1)$ verschiedene Aufteilungen auf die restlichen $(k-1)$Blöcke denkbar sind. Beachtet man weiterhin, dass in der Summe die ersten $k-2$ Summanden verschwinden, da die Stirling-Zahlen zweiter Art für $m < k-1$ gleich Null sind, so ist die Gültigkeit der Summe

$$S(n+1,k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} S(i,k-1)$$

gezeigt.