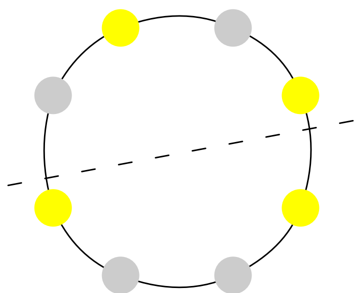
Kombinatorik - Hausübung 2 (WS 11/12)

Musterlösung

„Mathematics compares the most diverse phenomena and discovers the secret analogies that unite them.“
(Joseph Fourier)

Lösung 1

Es genügt Schnitte zu betrachten, bei denen jeder Dieb die Hälfte der Perlen, also $n + m$, bekommt. Ferner genügt es die Verteilung der goldenen Perlen zu betrachten, denn aus der Anzahl der goldenen Perlen m_i $(i = 1, 2)$ von Dieb i lässt sich die Anzahl der silbernen Perlen von Dieb i mittels $n + m - m_i$ berechnen.
Sei S_0 ein beliebiger Schnitt, bei dem Dieb 1 $m_1^0 \neq m$ goldene Perlen erhalten hat. Drehen wir diesen Schnitt um eine Perle entlang der Kette weiter, d.h. sozusagen um $\frac{2\pi}{2(n+m)}$, ändert sich nichts an der Anzahl der Perlen pro Dieb, es werden aber zwei Perlen miteinander ausgetauscht. Sei nun S_1 dieser neue Schnitt. Haben die beiden ausgetauschten Perlen dieselbe Farbe, so hat Dieb 1 bei Schnitt 1 $m_1^1 = m_1^0$ goldene Perlen. Waren die Perlen verschieden, so gilt entweder $m_1^1 = m_1^0 + 1$ oder $m_1^1 = m_1^0 - 1$. Drehen wir nach diesem Prinzip weiter, so entspricht der Schnitt S_{m+n} dem Schnitt S_0, jedoch mit vertauschten Seiten. Folglich ist dann $m_1^{m+n} = m_2^0$ und $n_1^{m+n} = n_2^0$. Damit muss es aber einen Schnitt $S_k,\ 0 < k < m + n$ geben, bei dem $m_1^k = m_2^k$ erfüllt ist.



Lösung 2

Zur Lösung der Aufgabe zerlege man eine Menge mit $2n$ Elementen in zwei Teilmengen mit jeweils n Elementen. Nun betrachten wir die Anzahl der Möglichkeiten genau zwei Elemente zu ziehen. Dann haben wir drei verschiedene Situationen:

Fall A Beide Elemente sind aus der ersten Menge $\Longrightarrow \binom{n}{2}$ Möglichkeiten.

Fall B Beide Elemente sind aus der zweiten Menge $\Longrightarrow \binom{n}{2}$ Möglichkeiten.

Fall C Ein Element ist aus der ersten, das andere aus der zweiten Menge. Für jedes Element haben wir dann n mögliche Wahlen, was zusammen n^2 macht.

Nun können wir die einzelnen Anzahlen nach der Summenregel addieren und erhalten die gesuchte Gleichung.

Lösung 3

(a) Sei a_n die Anzahl der Möglichkeiten eine n-stufige Treppe hinauf zu laufen. Wenn das Kind zwei Stufen auf einmal nimmt, zu Beginn, dann muss es noch eine $n-2$-stufige Treppe hochlaufen und hat dafür a_{n-2} Möglichkeiten. Im Falle von einer Stufe, sind es noch a_{n-1} Möglichkeiten. Somit ergibt sich

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

(b) Sei b_n die Anzahl solcher Wörter. Ist der erste Buchstabe eine 0, dann gibt es zwei Möglichkeiten für Wörter der Länge $n-2$. Sind es eine 1 oder eine 2, dann haben wir zwei Möglichkeiten für Wörter der Länge $n-1$, also

$$b_n = 2b_{n-2} + 2b_{n-1}.$$