

# Kombinatorik - Hausübung 3 (WS 11/12)

## Musterlösung

*„Truth is ever to be found in the simplicity, and not in the multiplicity and confusion of things.“*

(Sir Isaac Newton)

### Lösung 1

(a) Es gilt

$$h_n = 2h_{n-1} + 1, \quad h_0 = 0,$$

da man zunächst  $h_{n-1}$  Züge braucht, um die oberen  $n - 1$  Scheiben auf den Stab B zu bewegen, danach einen Zug um die größte auf Stab C zu postieren und schließlich noch einmal  $h_{n-1}$  Züge um die Scheiben von Stab B auf Stab C zu stapeln.

(b)

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n = 0x^0 + \sum_{n \geq 1} (2h_{n-1} + 1)x^n \\ &= 2x \sum_{n \geq 1} h_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n \geq 1} x^n = 2xH(x) + \frac{1}{1-x} - 1 \\ (1-2x)H(x) &= \frac{x}{1-x} \\ H(x) &= \frac{x}{(1-x)(1-2x)} \end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung liefert uns

$$H(x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$$

und damit für die Reihenentwicklung

$$H(x) = \sum_{n \geq 1} (2^n - 1)x^n,$$

also als explizite Bildungsvorschrift  $h_n = 2^n - 1$ .

### Lösung 2

(a) Betrachten wir die Anzahl der Partitionen, in denen kein Summand mehr als  $q$ -mal auftritt, d.h. die Polynome brechen nach dem  $q$ -ten Glied ab, dann erhält man als erzeugende Funktion:

$$\begin{aligned} A_1(x) &= (1+x+\dots+x^q)(1+x^2+\dots+x^{2q})(1+x^3+\dots+x^{3q})\dots \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k+\dots+x^{kq}). \end{aligned}$$

Laut Summenformel für endliche geometrischen Reihen gilt:

$$1+x^k+\dots+x^{kq} = \sum_{i=0}^q (x^k)^i = \frac{1-(x^k)^{q+1}}{1-x^k} = \frac{1-x^{(q+1)k}}{1-x^k}$$

Damit erhalten wir für die erzeugende Funktion:

$$A_1(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-x^{(q+1)k}}{1-x^k}.$$

---

Betrachten wir nun die Anzahl der Partitionen, bei denen alle Summanden nicht durch  $q + 1$  teilbar sind, so erhalten wir als erzeugende Funktion:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \cdot \dots \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^{qk} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^{(q+2)k} \cdot \dots \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^{(2q+1)k} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^{(2q+3)k} \cdot \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-x^q} \cdot \frac{1}{1-x^{q+2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-x^{2q+1}} \cdot \frac{1}{1-x^{2q+3}} \cdot \dots \end{aligned}$$

Erweitern mit den fehlenden Faktoren  $1 - x^{(q+1)k}$  und erhalten:

$$\mathcal{A}_2(x) = \frac{1-x^{(q+1)}}{1-x} \cdot \frac{1-x^{2(q+1)}}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^{3(q+1)}}{1-x^3} \cdot \dots = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1-x^{(q+1)k}}{1-x^k}.$$

Somit gilt  $\mathcal{A}_1(x) = \mathcal{A}_2(x)$  und damit sind auch die Anzahlen der Partitionen gleich.

- (b) Die erzeugende Funktion der Anzahl aller Partitionen der Zahl  $n$ , in denen alle geraden Summanden durch vier teilbar sind, ergibt sich als

$$\prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{4k+1})(1-x^{4k+3})(1-x^{4k+4})}.$$

Nun erweitern wir diesen Bruch mit der erzeugenden Funktion der ungeraden Summanden, die höchstens einmal vorkommen, und wir erhalten

$$\begin{aligned} &\prod_{k=0}^{\infty} \frac{1+x^{2k+1}}{(1-x^{4k+1})(1-x^{4k+3})(1-x^{4k+4})(1+x^{2k+1})} = \\ &\prod_{k=0}^{\infty} \frac{1+x^{2k+1}}{(1-x^{4k+1})(1+x^{4k+1})(1-x^{4k+3})(1+x^{4k+3})(1-x^{4k+4})} = \\ &\prod_{k=0}^{\infty} \frac{1+x^{2k+1}}{(1-x^{8k+2})(1-x^{8k+6})(1-x^{4k+4})} = \\ &\prod_{k=0}^{\infty} \frac{1+x^{2k+1}}{1-x^{2k}}, \end{aligned}$$

was aber gerade die erzeugende Funktion der Anzahl aller Partitionen der Zahl  $n$  ist, in denen ungerade Summanden höchstens einmal vorkommen.

### Lösung 3

Die Aufgabe kann man zum Beispiel durch mehrmaliges Anwenden des Binomialsatzes lösen. Dazu betrachten wir folgende Verallgemeinerung der Aufgabe:

$$\begin{aligned} (w+x+y+z)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} w^i (x+y+z)^{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} w^i \left[ \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} x^j (y+z)^{n-i-j} \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} w^i x^j (y+z)^{n-i-j} \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} w^i x^j \left[ \sum_{k=0}^{n-i-j} \binom{n-i-j}{k} y^k z^{n-i-j-k} \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=0}^{n-i-j} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} \binom{n-i-j}{k} w^i x^j y^k z^{n-i-j-k}. \end{aligned}$$

Für das Produkt der drei Fakultäten ergibt sich der sogenannte Multinomialkoeffizient:

$$\binom{n}{i} \binom{n-i}{j} \binom{n-i-j}{k} = \frac{n!}{i!j!k!(n-i-j-k)!}.$$

Setzen wir nun unsere Ausgangsgleichung ein, erhalten wir

$$(a + 3b - 4c2d)^{10} = \sum_{i=0}^1 0 \sum_{j=0}^{10-i} \sum_{k=0}^{10-i-j} \frac{10!}{i!j!k!(10-i-j-k)!} a^i (3b)^j (-4c)^k (2d)^{10-i-j-k}.$$

Da wir aber am Koeffizienten vor  $a^4 b^3 c^2 d$  interessiert sind, müssen wir lediglich den Koeffizienten für  $i = 4$ ,  $j = 3$  und  $k = 2$  berechnen, also

$$\frac{10!}{4!3!2!1!} 3^3 (-4)^2 2 = 10.886.400.$$