Dr. A. Kohl, Dipl.-Math. S. Matos Camacho, Institut für Diskrete Mathematik und Algebra

Kombinatorik - Serie 5 (WS 11/12)

Ich glaub, das sind zu viele

„Suppose a contradiction were to be found in the axioms of set theory. Do you seriously believe that a bridge would fall down?"
(Frank Ramsey)

Aufgabe 1

An einem runden, drehbaren Tisch sollen 24 Personen mit gleichem Abstand positioniert werden. Dazu wurden Platzkarten an den Plätzen verteilt. Die 24 Personen verteilen sich nun zufällig auf die Plätze. Keiner sitzt auf dem ihm zugeteilten Platz. Ist es möglich durch Drehung des Tisches zu erreichen, dass mindestens zwei Personen an ihren Platzkarten sitzen?

Aufgabe 2

Sei ABC ein gleichseitiges Dreieck und enthalte S alle Punkte auf den Seiten des Dreiecks. Außerdem seien alle Punkte aus S mit einer der beiden Farben Rot oder Blau gefärbt. Man zeige, dass es dann immer drei gleich gefärbte Punkte in S gibt, die ein rechtwinkliges Dreieck beschreiben.

Aufgabe 3

Es sei M eine Menge bestehend aus sieben Elementen, die alle samt ganze Zahlen kleiner 24 sind. Es werden nun sämtliche Teilmengen A von M mit $\emptyset \neq A \subset M$ betrachtet. Für jede dieser Teilmengen A berechne man die Summe S_A der Elemente aus A, also $S_A = \sum_{n \in A} n$. Man zeige, dass die Summen S_A dieser Teilmengen nicht alle untereinander verschieden sein können.

Aufgabe 4

In einem Brettspielturnier sollen drei verschiedene Spiele gespielt werden: Schach, Dame und Mühle. Jeder Turnierteilnehmer muss gegen jeden anderen Teilnehmer genau eins der drei Spiele bestreiten, wobei ein Spieler maximal zwei verschiedene Spiele spielen muss. Außerdem gibt es keine drei Spieler, die untereinander alle das gleiche Spiel gegeneinander austragen. Wie groß kann die maximale Anzahl an Teilnehmern sein?

Aufgabe 5

Man bestimme $N \in \mathbb{N}$ so, dass jede Zweifärbung der Zahlen $\{1, 2, \ldots, N\}$ drei monochromatische Zahlen x, y, z enthält mit $x + y = z$. Ist N minimal?

Aufgabe 6

Bezeichne $w(k_1, k_2, \ldots, k_r; r)$ die sogenannte gemischte Van-der-Waerden-Zahl, d.h. $w(k_1, k_2, \ldots, k_r; r)$ ist die kleinste natürliche Zahl N, so dass in jeder r-Färbung der Zahlen $1, \ldots, N$ ein $i \in \{1, \ldots, r\}$ existiert mit einer arithmetische Progression der Länge k_i in dieser Farbe i. Bestimmen Sie $w(k, 2; 2)$ falls $k \geqslant 2$ gerade bzw. ungerade ist.