

# Inhaltsverzeichnis

<b>2</b>	<b>Transportoptimierung</b>	<b>1</b>
2.1	Das klassische Transportproblem . . . . .	2
2.1.1	Modell . . . . .	2
2.1.2	Qualitative Grundlagen . . . . .	6
2.1.3	Eröffnungsverfahren . . . . .	15
2.1.4	Optimierungsverfahren . . . . .	21
2.1.5	Ergänzungen . . . . .	25
2.2	Das lineare Zuordnungsproblem . . . . .	33
2.2.1	Modelle und Eigenschaften . . . . .	33
2.2.2	Ungarische Methode . . . . .	35
2.3	Offene Transportprobleme . . . . .	40
2.3.1	Standardmodelle . . . . .	40
2.3.2	Modell mit gemischten Restriktionen . . . . .	60
2.4	Kapazitierte Transportprobleme . . . . .	65
2.4.1	Das kapazitierte klassische Transportproblem . . . . .	65
2.4.2	Erweiterung des primalen Lösungsverfahrens . . . . .	69
2.4.3	Zweiseitig beschränkte Transportprobleme . . . . .	78
2.5	Umladeprobleme . . . . .	83
2.6	Bottleneck Transportprobleme . . . . .	91



# Kapitel 2

## Transportoptimierung

Eine spezielle Klasse von linearen Optimierungsproblemen stellen die *Transport-* und *Zuordnungsprobleme* dar. Ihre Struktur erlaubt eine wesentlich kompaktere Darstellung des Problems. Aufgrund der großen praktischen Bedeutung gibt es eine Vielzahl von recht einfachen Lösungsverfahren.

Transportprobleme besitzen unter den vielschichtigen Beziehungen in der Wirtschaft eine besondere Bedeutung. Der kostengünstige Transport von Arbeitskräften, Produktionsmitteln und Arbeitsgegenständen ist eine wesentliche Voraussetzung für erfolgreiche wirtschaftliche Tätigkeit. Auch andere reale Probleme in Wirtschaft und Technik weisen eine ähnliche mathematische Struktur wie die hier zu behandelnden Problemklassen auf.

Unter *Transportoptimierung* werden alle Maßnahmen und Methoden verstanden, die darauf hinauslaufen, dass durch Produktionsplanung und Transportdisposition unter Einsatz mathematischer Methoden und der Rechentchnik lang- mittel- und kurzfristig eine Reduzierung des Transportaufwandes erreicht wird. Dazu gehören die Optimierung der Lieferbeziehungen auf der Basis der Standorte, die optimale Verteilung der Transportaufgaben bei gegebenen Lieferbeziehungen und die Bestimmung optimaler Betriebsabläufe und Technologien innerhalb der einzelnen Transportzweige.

Ausgangspunkt dieses Kapitels bilden ausführliche Darlegungen zum klassischen Transportproblem und die Vorstellung eines einfachen primalen Lösungsverfahrens. Das lineare Zuordnungsproblem kann als Spezialfall des klassischen Transportproblems aufgefasst werden. Für dieses Problem wird ein spezieller primal-dualer Algorithmus angegeben. Anschließend werden offene Transportprobleme betrachtet und ihre Rückführung auf klassische Transportprobleme demonstriert. Für kapazitierte Transportprobleme erfolgt eine Erweiterung des für das klassische Transportproblem formulierten Lösungsverfahrens. Abschließend folgen noch Darstellungen zu einigen Umladeproblemen und dem Bottleneck-Transportproblem. Innerhalb der einzelnen Teilabschnitte werden an Hand betriebswirtschaftlicher Beispiele vielfältige Anwendungen aufgezeigt.

Die Transportoptimierung ist mit den Namen F.L. Hitchcock (1941 erste konstruktive Lösungen für Transportprobleme) und T. C. Koopmans (Mitglied des Combined Shipping Board im 2. Weltkrieg, Anwendungen zur Lösung von Transportproblemen zur Minimierung der totalen Verschiffungszeiten, 1975 NOBEL-Preis für Wirtschaftswissenschaften gemeinsam mit L.W. Kantorowitsch) verbunden.

Eine umfangreiche Darstellung zu diesem Themengebiet findet man in [Do95] und [Do97].

## 2.1 Das klassische Transportproblem

### 2.1.1 Modell

Die bekannteste und einfachste Transportaufgabe, die am häufigsten in der Literatur behandelt wurde und mit dem Namen HITCHCOCK verbunden ist, lässt sich wie folgt formulieren:

Ein *homogenes* Produkt soll von  $m$  Ausgangsorten  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , zu  $n$  Bestimmungsorten  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , transportiert werden. In den Ausgangsorten  $A_i$  ist ein bestimmter Vorrat vorhanden. In den Bestimmungsorten  $B_j$  liege ein bestimmter Bedarf vor. Gesamtbestand und Gesamtbedarf sollen übereinstimmen. Ein Transport vom Ausgangsort  $A_i$  zum Bestimmungsort  $B_j$  ist grundsätzlich möglich und wird auch nicht durch Kapazitätsschranken beeinflusst. Die Transportkosten seien proportional zur transportierten Menge und proportional zur Entfernung. Gesucht ist ein Transportplan, charakterisiert durch die von den Ausgangsorten  $A_i$  zu den Bestimmungsorten  $B_j$  zu transportierenden Mengen, dessen Gesamtkosten minimal sind.

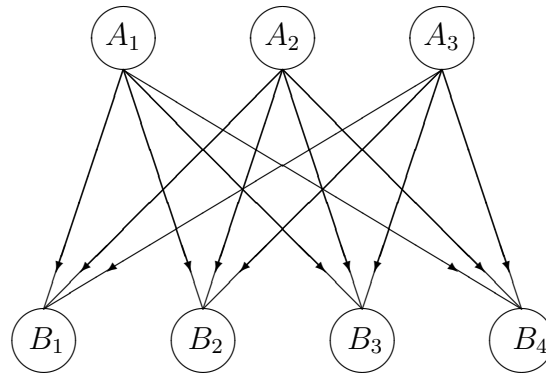


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung für  $m = 3$  und  $n = 4$

Für die Beschreibung des mathematischen Modells werden die folgenden Bezeichnungen beziehungsweise Variable verwendet:

#### Bezeichnungen:

- $m$  Anzahl der Ausgangsorte
- $n$  Anzahl der Bestimmungsorte
- $a_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , Vorrat im Ausgangsort  $A_i$
- $b_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , Bedarf im Bestimmungsort  $B_j$
- $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , spezifische Transportaufwendungen für die Lieferung einer Mengeneinheit von  $A_i$  nach  $B_j$

#### Variable:

- $x_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , von  $A_i$  nach  $B_j$  zu transportierende Menge
- $z$  Gesamttransportkosten, auch kurz als Gesamtkosten bezeichnet

Die mathematische Formulierung des Problems lautet dann wie folgt:

**Modell KTP** (Klassisches Transportproblem):

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

Den zulässigen Bereich (2.2)-(2.4) des klassischen Transportproblems stellt ein Polyeder dar. Eine zulässige Lösung wird *Transportplan* genannt. Die Gleichungen (2.2) beschreiben den Abtransport der Vorratsmengen und die Gleichungen (2.3) die Anlieferung der Bedarfsmengen. Oft sind neben den Nichtnegativitätsbedingungen (2.4) an die gesuchten Transportmengen noch Ganzzahligkeitsforderungen zu stellen. Die Realisierung dieser zusätzlichen Forderungen erweist sich bei dieser speziellen Aufgabe als problemlos.

Es wird vorausgesetzt, dass Vorrats- und Bedarfsmengen nichtnegativ sind und die sogenannte Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist:

$$\begin{aligned} a_i &\geq 0, & i &= 1, \dots, m \\ b_j &\geq 0, & j &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (2.6)$$

Für praxisnahe Aufgaben kann man von den schärferen Forderungen  $a_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und  $b_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ausgehen.

Beim klassischen Transportproblem handelt es sich um eine lineare Optimierungsaufgabe spezieller Struktur mit  $m + n$  Gleichungsrestriktionen und  $mn$  Variablen. Zur Lösung des Problems ist damit grundsätzlich die Simplexmethode anwendbar. Hier werden entsprechend effektivere Verfahren vorgestellt, welche die spezielle Struktur der Aufgabe berücksichtigen. Dabei spielt die Dualitätstheorie eine bedeutende Rolle. Die zum klassischen Transportproblem gehörige Dualaufgabe besitzt die folgende Gestalt:

$$Z_D = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \longrightarrow \max \quad (2.7)$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

$$u_i, v_j \text{ beliebig}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

Dabei sind die Dualvariablen  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , den zu den Vorratsmengen gehörenden Restriktionen und die Dualvariablen  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , den zu den Bedarfsmengen gehörenden Restriktionen zugeordnet.



Wie am Beispiel 2.1 unschwer zu erkennen ist, besitzt die Koeffizientenmatrix eines klassischen Transportproblems eine ganz spezielle Struktur. Sie ist bereits durch die Dimensionen  $m$  und  $n$  eindeutig beschrieben. Die Anwendung der gewöhnlichen Simplexmethode auf diese Struktur ohne zusätzliche Modifikationen kann demzufolge nicht effektiv sein.

Zur Beschreibung effektiverer Verfahren ist es vorteilhaft, sogenannte *Transporttableaus* zu verwenden. Die spezielle Gestalt der Koeffizientenmatrix ermöglicht eine kompakte Darstellung des klassischen Transportproblems. Es kann äquivalent durch die folgende *Datentabelle* repräsentiert werden:

Tabelle 2.1: Datentabelle eines klassischen Transportproblems

	1	...	$j$	...	$n$	
1	$c_{11}$	...	$c_{1j}$	...	$c_{1n}$	$a_1$
.	.		.		.	.
.	.		.		.	.
$i$	$c_{i1}$	...	$c_{ij}$	...	$c_{in}$	$a_i$
.	.		.		.	.
.	.		.		.	.
$m$	$c_{m1}$	...	$c_{mj}$	...	$c_{mn}$	$a_m$
	$b_1$	...	$b_j$	...	$b_n$	

Für das Aufstellen von Transportplänen genügt auch eine Tabelle, in der mit Hilfe der bekannten Vorrats- und Bedarfsmengen die gesuchten Transportmengen erzeugt werden:

Tabelle 2.2: Tabelle der Restriktionen für ein klassisches Transportproblem

	1	...	$j$	...	$n$	
1	$x_{11}$	...	$x_{1j}$	...	$x_{1n}$	$a_1$
.	.		.		.	.
.	.		.		.	.
$i$	$x_{i1}$	...	$x_{ij}$	...	$x_{in}$	$a_i$
.	.		.		.	.
.	.		.		.	.
$m$	$x_{m1}$	...	$x_{mj}$	...	$x_{mn}$	$a_m$
	$b_1$	...	$b_j$	...	$b_n$	

Die Zeilensummen der nichtnegativen Matrix  $X$  müssen dabei den Vorratsmengen und die Spaltensummen den Bedarfsmengen entsprechen.

Für die weiteren Untersuchungen werden alle bekannten Begriffe und Aussagen der linearen Optimierung sinngemäß auch für das klassische Transportproblem verwendet. Zur Vereinfachung der Darstellung wird die Bezeichnung

$$N = \{ (i, j) \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \}$$

verwendet. Sie charakterisiert die vorhandenen Transportverbindungen des klassischen Transportproblems.

### 2.1.2 Qualitative Grundlagen

In diesem Abschnitt werden neben grundlegenden Eigenschaften auch Aussagen formuliert, welche die Übertragung der Simplexmethode auf die Tabellenform des klassischen Transportproblems ermöglicht.

#### Satz 2.1

Das klassische Transportproblem **KTP** ist genau dann lösbar, wenn die Voraussetzungen (2.5) und (2.6) erfüllt sind.

Mit dieser Aussage ist stets die Existenz eines optimalen Transportplans gesichert. Bezeichnet man mit  $G = \sum_{i=1}^m a_i$  die insgesamt zu transportierende Menge und gilt  $G > 0$ , dann ist zum Beispiel  $\tilde{x}_{ij} = \frac{a_i b_j}{G}$ ,  $(i, j) \in N$ , stets ein zulässiger, jedoch kaum brauchbarer Transportplan, da hier Transporte über alle Transportverbindungen stattfinden.

Wegen der Beschränktheit und Abgeschlossenheit des zulässigen Bereichs des klassischen Transportproblems sind keinerlei Voraussetzungen an die zur Zielfunktion (2.1) gehörigen Kostenmatrix  $C$  nötig.

Es seien  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , beliebige reelle Zahlen. Eine weitere Zielfunktion sei durch

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{c}_{ij} x_{ij}$$

mit

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j), \quad (i, j) \in N \quad (2.10)$$

beschrieben.

#### Satz 2.2

Für alle Transportpläne  $x$  eines klassischen Transportproblems gilt  $z(x) = \bar{z}(x) + \omega$ , wobei

$$\omega = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j. \quad (2.11)$$

eine Konstante ist.

Zum Beweis des Satzes benötigt man die Darstellung der Restriktionen in Gleichungsform. Damit kann man jeder Kostenmatrix  $C$  weitere äquivalente Kostenmatrizen  $C'$  zuordnen. Im Falle  $\bar{c}_{ij} \geq 0$ ,  $(i, j) \in N$ , gilt  $z(x) \geq \omega$  für alle Transportpläne  $x$ . Durch die Zuordnung geeigneter nichtnegativer Kostenmatrizen  $\bar{C}$  lassen sich somit untere Schranken zur Abschätzung des minimalen Zielfunktionswertes  $z_{\min}$  finden.

#### Bemerkung 2.1

Kann man die Zahlen  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , so wählen, dass für einen Transportplan  $\tilde{x}$  die Beziehungen

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ij} &= 0 \quad \text{für } \tilde{x}_{ij} > 0 \\ \bar{c}_{ij} &\geq 0 \quad \text{für } \tilde{x}_{ij} = 0 \end{aligned}$$

gelten, dann wird  $\tilde{x}$  als optimal erkannt und es gilt  $z_{\min} = \omega$ . Dies ist bereits ein Ansatz für ein später noch zu beschreibendes Optimalitätskriterium.



Neben den einfachen Abschätzungen für den Zielfunktionswert

$$\begin{aligned} z &\geq \min_{(i,j) \in N} c_{ij} \cdot \sum_{i=1}^m a_i \\ z &\geq \sum_{i=1}^m (a_i \cdot \min_{j=1, \dots, n} c_{ij}) \\ z &\geq \sum_{j=1}^n (b_j \cdot \min_{i=1, \dots, m} c_{ij}) \end{aligned}$$

erhält man durch die nachfolgende Reduktion der Kostenmatrix  $C$  eine in allgemeinen bessere Abschätzung. Dazu wird von der Matrix  $C$  zuerst das Zeilenminimum und von der daraus resultierenden Matrix das Spaltenminimum abgezogen:

$$\begin{aligned} u_i^0 &= \min_{j=1, \dots, n} c_{ij} \quad , \quad i = 1, \dots, m \\ v_j^0 &= \min_{i=1, \dots, m} (c_{ij} - u_i^0) \quad , \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die Matrix  $C^1$  mit

$$c_{ij}^1 = c_{ij} - (u_i^0 + v_j^0), \quad (i, j) \in N \quad (2.13)$$

ist nichtnegativ und besitzt in jeder Reihe, das heißt in jeder Zeile und in jeder Spalte, mindestens einen Nulleintrag. Die zugehörige Reduktionskonstante  $\omega_0$  ist für jeden Transportplan  $x$  eine untere Schranke für den Zielfunktionswert:

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^m a_i u_i^0 + \sum_{j=1}^n b_j v_j^0 \quad (2.14)$$

**Beispiel 2.2** (Fortsetzung von Beispiel 2.1)

Mit Hilfe der Datentabelle

$c_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1	630	150	320	310	75
2	710	380	600	400	125
3	340	250	170	420	100
$b_j$	80	65	70	85	

brechnet man die einfachen Zielfunktionsabschätzungen

$$\begin{aligned} z &\geq 150 \cdot 300 = 45000 \\ z &\geq 150 \cdot 75 + 380 \cdot 125 + 170 \cdot 100 = 75750 \\ z &\geq 340 \cdot 80 + 150 \cdot 65 + 170 \cdot 70 + 310 \cdot 85 = 75200. \end{aligned}$$

Nach der oben dargestellten Zielfunktionsreduktion erhält man über die Zwischenschritte

$$u^0 = \begin{pmatrix} 150 \\ 380 \\ 170 \end{pmatrix} \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} 480 & 0 & 170 & 160 \\ 330 & 0 & 220 & 20 \\ 170 & 80 & 0 & 250 \end{pmatrix} \quad v^0 = (170 \ 0 \ 0 \ 20)^T$$

die äquivalente nichtnegative Matrix

$$C^1 = \begin{pmatrix} 310 & 0 & 170 & 140 \\ 160 & 0 & 220 & 0 \\ 0 & 80 & 0 & 230 \end{pmatrix}$$

und damit die verbesserte Zielfunktionsabschätzung

$$z \geq 150 \cdot 75 + 380 \cdot 125 + 170 \cdot 100 + 170 \cdot 80 + 0 + 0 + 20 \cdot 85 = 91050.$$

Die zum klassischen Transportproblem gehörige Koeffizientenmatrix sei mit  $\mathbf{A}$  bezeichnet. Sie wird durch die Restriktionen (2.2) und (2.3) beschrieben und ist bereits durch die Dimensionen  $m$  und  $n$  eindeutig festgelegt. Für  $m = 3$ ,  $n = 4$  (vergleiche Beispiel 2.1) hat sie die folgende Gestalt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Mit den  $n$ -dimensionalen Vektoren  $s^\top = (1, 1, \dots, 1)$  und  $0^\top = (0, 0, \dots, 0)$  sowie der  $n$ -reihigen Einheitsmatrix  $E = E_n$  lässt sich die allgemeine Struktur der Koeffizientenmatrix  $A$ , bestehend aus  $m + n$  Zeilen und  $mn$  Spalten wie folgt darstellen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} s^\top & 0^\top & \dots & 0^\top \\ 0^\top & s^\top & \dots & 0^\top \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0^\top & 0^\top & \dots & s^\top \\ E & E & \dots & E \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Es sei  $\mathbf{a}_{ij}$  die zur Variable  $x_{ij}$  gehörige Spalte der Matrix  $A$ . Dann gilt

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} e_i^{(m)} \\ e_j^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_i^{(m+n)} + e_{m+j}^{(m+n)} \end{pmatrix},$$

wobei  $e_k^{(l)}$  ein  $l$ -dimensionaler Einheitsvektor, die Eins an der Stelle  $k$ , ist.

Für  $m = 3$  und  $n = 4$  erhält man für das Feld (2, 3) eines Transporttableaus die folgenden Zuordnungen:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & * & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \longrightarrow x_{23} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Bemerkung 2.2**

In der Matrix  $A$  stehen in jeder Spalte genau zwei Einsen und sonst nur Nulleinträge. Damit besitzt die Matrix  $A$  genau  $2mn$  Einsen und  $((m+n)-2)mn$  Nullen. Der Besetzungsgrad der Matrix  $A$  ist  $\frac{2}{m+n}$ .

Bei genauerer Betrachtung der Koeffizientenmatrix erkennt man, dass die Summe der ersten  $m$  Zeilen als auch die Summe der letzten  $n$  Zeilen einen Zeilenvektor aus lauter Einsen ergibt. Damit liegt ein Rangabfall vor.

**Satz 2.3**

Die Koeffizientenmatrix  $A$  eines klassischen Transportproblems mit  $m$  Ausgangsorten und  $n$  Bestimmungsorten besitzt den Rang  $r(A) = m + n - 1$ .

Lässt man eine beliebige Gleichung aus (2.2) oder (2.3) weg, dann gilt für den Rang der reduzierten Koeffizientenmatrix  $\bar{A}$ , bestehend aus den verbliebenen  $m + n - 1$  Gleichungen, stets  $r(\bar{A}) = m + n - 1$ . Jede Basislösung des klassischen Transportproblems besitzt demzufolge  $m + n - 1$  Basisvariable und  $mn - m - n + 1$  Nichtbasisvariable.

**Bemerkung 2.3**

Für ein klassisches Transportproblem seien die Vorrats- und Bedarfsmengen positiv. Es sei  $p$  die Anzahl der positiven Variablen einer zulässigen Basislösung des klassischen Transportproblems. Diese zulässige Basislösung entspricht einem speziellen Transportplan, bei dem genau  $p$  Transportverbindungen genutzt werden. Dann gilt  $\max\{m, n\} \leq p \leq m + n - 1$ .

Für gewöhnliche lineare Optimierungsaufgaben sind Basislösungen nicht automatisch ganzzahlig, auch dann nicht, wenn der Erfordernisvektor ganzzahlig ist. Um dies zu sichern, muss man einschneidende Bedingungen an die Koeffizientenmatrix stellen.

**Definition 2.1**

Eine Matrix  $A$  heißt *total unimodular*, wenn die Determinante jeder quadratischen Teilmatrix von  $A$  nur Werte aus der Menge  $\{-1; 0; 1\}$  annehmen kann.

Wenn eine Matrix  $A$  total unimodular ist, dann ist auch jede Teilmatrix von  $A$  total unimodular. Insbesondere können die Einträge  $a_{ij}$  der Matrix  $A$  selbst nur aus der Menge  $\{-1; 0; 1\}$  sein.

**Satz 2.4**

Die Koeffizientenmatrix  $A$  des klassischen Transportproblems ist total unimodular.

Einen Beweis zu dieser Aussage findet man u.a. in [BoGr93].

**Bemerkung 2.4**

Die Matrix  $\bar{A}$  entstehe aus der Koeffizientenmatrix (2.15) durch Streichen der letzten Zeile. Dann kann  $\bar{A}$  zerlegt werden in  $\bar{A} = (\bar{B}, \bar{R})$ , wobei  $\bar{B}$  eine reguläre Teilmatrix ist. Für diese gilt  $\det(\bar{B}) \in \{-1; 1\}$ . Für die zugehörige Basislösung mit den Basisvariablen  $x_B$  und den Nichtbasisvariablen  $x_R$  erhält man  $x_B + \bar{B}^{-1}\bar{R}x_R = \bar{B}^{-1}\bar{d}$  mit  $\bar{d} = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_{n-1})^\top$ . Die Matrizen  $\bar{B}^{-1}$  und  $\bar{B}^{-1}\bar{R}$  enthalten nur Einträge aus der Menge  $\{-1; 0; 1\}$ . Ist  $\bar{d}$  ein ganzzahliger Vektor, so ist auch  $\bar{B}^{-1}\bar{d}$  ganzzahlig. Damit ist  $(x_B, x_R) = (\bar{B}^{-1}\bar{d}, 0)$  eine ganzzahlige Basislösung.

Sind Vorrats- und Bedarfsmengen ganzzahlig, dann beinhalten die zu zulässigen Basislösungen gehörigen Transportpläne automatisch ganzzahlige Transportmengen.

Jeder Variablen  $x_{ij}$ ,  $(i, j) \in N$ , entspricht in der Tabellenform des klassischen Transportproblems ein Feld  $(i, j)$ . Im Folgenden werden einige Aussagen zur Lage der Basisvariablen einer Basislösung bezüglich der Tabellenform erläutert.

### Definition 2.2

Eine Folge von Feldern  $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)$  in der Tabellenform heißt *Weg im engeren Sinn*, wenn für alle  $t$  mit  $1 \leq t < k$  auf  $(i_t, j_t)$  entweder  $(i_t + 1, j_t)$  oder  $(i_t, j_t + 1)$  folgt. Jede Folge von Feldern, die durch Umordnung von Zeilen oder Spalten in der Tabelle einen Weg im engeren Sinn ergibt, heißt *Weg*. Ein Weg mit  $m + n - 1$  Feldern heißt *maximaler Weg*.

Alle Felder eines Weges sind paarweise verschieden. Ein Weg besteht aus höchstens  $m+n-1$  Feldern. In der linken Tabelle ist ein maximaler Weg im engeren Sinn zu sehen.

*	*	*	
		*	*
			*

*	*	*	*
	*		
		*	

In der rechten Tabelle ist ein maximaler Weg dargestellt. Er kann in einen Weg im engeren Sinn überführt werden, wenn man Zeile 1 mit Zeile 2, Spalte 1 mit Spalte 2 und Spalte 3 mit Spalte 4 vertauscht.

### Definition 2.3

Eine Folge von Feldern  $(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k), (i_k, j_1)$ ,  $k \geq 2$ , in der Tabellenform heißt *Zyklus*, wenn sie aus jeder Zeile und jeder Spalte der Tabelle höchstens zwei Felder enthält.

Die Anzahl der Felder  $q$  eines Zyklus ist gerade und es gilt  $4 \leq q \leq 2 \min\{m, n\}$ . Die nachfolgende linke Tabelle zeigt einen Zyklus aus vier Feldern.

	*	*	
	*	*	

*	*		
*			*
	*		*

In der rechten Tabelle ist ein für  $m = 3$ ,  $n = 4$  größtmöglicher Zyklus mit den Feldern  $(1, 1), (1, 2), (3, 2), (3, 4), (2, 4), (2, 1)$  zu sehen.

### Satz 2.5

Die Vektoren  $a_{ij}$  der Koeffizientenmatrix (2.15), die zu den Feldern  $(i, j)$  eines Weges gehören, bilden ein linear unabhängiges Vektorsystem.

Die Vektoren  $a_{ij}$  der Koeffizientenmatrix (2.15), die den Feldern  $(i, j)$  eines Zyklus zugeordnet sind, erzeugen einen Unterraum, dessen Rang um Eins kleiner als die Anzahl der Felder des Zyklus ist. Wird irgend ein Feld des Zyklus gestrichen, so bilden die Vektoren  $a_{ij}$ , die zu den restlichen Feldern des Zyklus gehören, eine Basis dieses Unterraums.

Eine Menge  $B$  von Feldern der Tabellenform des klassischen Transportproblems stellt eine Basis dar, wenn die zugehörigen Vektoren  $a_{ij}$  eine Basis im Spaltenraum der Koeffizientenmatrix  $A$  bilden. In Bezug auf die Basis heißen die Felder von  $B$  *besetzte Felder*, die übrigen Felder aus  $N \setminus B$  *freie Felder*. Aus Satz 2.5 folgt, dass zwischen je zwei besetzten Felder einer Basis  $B$  genau ein Weg existiert. Damit erhält man für die besetzten Felder einer Basis  $B$  eine Baumstruktur. Speziell kann dies ein maximaler Weg sein.

**Satz 2.6**

Die Werte der Variablen der besetzten Felder einer Basis  $B$  (Basisvariable) des klassischen Transportproblems lassen sich als Summen und Differenzen von Vorrats- und Bedarfsmengen bilden.

Für  $m = 3$ ,  $n = 4$  erhält man bei der Wahl einer Basis  $B$  gemäß der folgenden Tabelle

	*		
*	*	*	
		*	*

die Variablenwerte

$$\begin{aligned}
 x_{34} &= b_4 \\
 x_{33} &= a_3 - b_4 \\
 x_{23} &= b_3 - (a_3 - b_4) = b_3 + b_4 - a_3 \\
 x_{21} &= b_1 \\
 x_{22} &= a_2 - b_1 - (b_3 + b_4 - a_3) = a_2 + a_3 - b_1 - b_3 - b_4 = b_2 - a_1 \\
 x_{12} &= b_2 - (b_2 - a_1) = a_1.
 \end{aligned}$$

Bei der Vereinfachung der Darstellung des Wertes der Variablen  $x_{22}$  wurde die Gleichgewichtsbedingung  $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$  verwendet.

Für konkret vorgegebene Vorrats- und Bedarfsmengen können bei willkürlicher Wahl einer Basis  $B$  einige der berechneten Werte negativ sein.

**Bemerkung 2.5**

Die Werte der Basisvariablen  $x_B$  lassen sich mit Hilfe des eindeutig lösaren Gleichungssystems  $\bar{B}x_B = \bar{d}$  bestimmen (siehe dazu auch Bemerkung 2.4). Die Matrix  $\bar{B}$  hat dabei *Dreiecksgestalt*. Ist  $\bar{d}$  ganzzahlig, so erhält man auch auf diesem Weg die Bestätigung, dass  $x_B$  eine ganzzahlige Lösung ist, weil  $\bar{B}$  Dreiecksgestalt besitzt und nur Einträge aus der Menge  $\{0; 1\}$  besitzt.

Eine Basislösung heißt im Fall des klassischen Transportproblems *degeneriert*, wenn die Anzahl der von Null verschiedenen Variablenwerte kleiner als  $m + n - 1$  ist. Für den Degenerationsgrad  $r$  gilt die Schranke

$$r \leq m + n - 1 - \max\{m, n\} = \min\{m, n\} - 1.$$

Für das noch zu behandelnde lineare Zuordnungsproblem wird diese Schranke auch angenommen.

Mit Hilfe des nachfolgenden Satzes kann man leicht feststellen, ob ein Transportproblem degenerierte Basislösungen besitzen kann.

**Satz 2.7**

Genau dann, wenn es zwei nichtleere Indexmengen  $I_1 \subset \{1, \dots, m\}$  und  $J_1 \subset \{1, \dots, n\}$  mit  $\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{j \in J_1} b_j$  gibt, besitzt das klassische Transportproblem degenerierte Basislösungen.

Bei der Simplexmethode wird eine Folge von benachbarten Basislösungen mittels Gauß-Jordan-Transformation erzeugt. Grundlage für die Übertragung des Basiswechsels auf die Tabellenform des klassischen Transportproblems ist der folgende Satz.

**Satz 2.8**

Ist für das klassische Transportproblem eine Basismenge  $B$  gegeben, so kann jedem freien Feld eindeutig ein Zyklus, bestehend aus dem freien Feld und sonst nur besetzten Feldern zugeordnet werden.

Man findet den Zyklus, in dem man sukzessive alle Zeilen und Spalten der Tabelle streicht, in denen nur ein Feld aus der Vereinigung der Menge  $B$  und dem ausgewähltem freien Feld steht. Nach Satz 2.5 erhält man durch Entfernen eines Feldes des gefundenen Zyklus wieder eine Basis, denn die zu den verbleibenden  $m+n-1$  Feldern gehörenden Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix sind linear unabhängig. Um das ausgewählte Feld aus  $B$  zu entfernen, sind die Variablenwerte alternativ um diesen Wert im Sinne eines "Turmzugprinzips" zu ändern.

Wählt man für die folgende Basis

*	*		
	*	*	
		*	*

das freie Feld  $(1, 4)$  aus, dann erkennt man (nach Streichen der ersten Spalte) den Zyklus  $(1, 4), (3, 4), (3, 3), (2, 3), (2, 2), (1, 2)$ :

(*)	*		◇
	*	*	
		*	*

Die betroffenen Variablenwerte ändern sich dann alternativ um einen konstanten Wert  $d$ , der noch konkret festzulegen ist.

$$x_{14} := d, x_{34} := x_{34} - d, x_{33} := x_{33} + d, x_{23} := x_{23} - d, x_{22} := x_{22} + d, x_{12} := x_{12} - d$$

Der Wert  $x_{11}$  bleibt dabei unverändert.

Streicht man nun das zum Zyklus gehörige besetzte Feld  $(2, 3)$ , dann bilden die verbliebenen Eintragungen eine neue Basis:

*	*		*
	*		
		*	*

Zur Abänderung der Variablenwerte wäre dann konkret  $d = x_{23}$  zu setzen.

Zu einer Basis  $B$  gibt es  $mn - (m + n - 1)$  freie Felder. Mit Hilfe der zugehörigen Zyklen kann auch die Änderung des Zielfunktionswertes bei beabsichtigtem Basiswechsel erfasst werden. Damit lässt sich eine Möglichkeit zur Überprüfung der Optimalität einer zulässigen Basis  $B$  skizzieren.

Es sei  $(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k), (i_k, j_1)$  ein derartiger Zyklus mit dem (o.B.d.A.) freien Feld  $(i_1, j_1)$  und sonst nur besetzten Feldern. Ändert man die zugehörigen Variablen, beginnend mit  $x_{i_1 j_1}$ , alternativ um den Wert  $d = 1$ , so erhält man den *Optimalitätsindikator*

$$c'_{i_1 j_1} = c_{i_1 j_1} - c_{i_1 j_2} + c_{i_2 j_2} - \dots + c_{i_k j_k} - c_{i_k j_1}. \quad (2.16)$$

Im Falle  $c'_{i_1 j_1} \geq 0$  bringt ein Basiswechsel mit dem freien Feld  $(i_1, j_1)$  für  $d \geq 0$  keine Zielfunktionsverbesserung.

### Bemerkung 2.6

Die sogenannte *Stepping-Stone-Methode* berechnet ausgehend von einer zulässigen Basislösung des klassischen Transportproblems die Optimalitätsindikatoren zu jeder freien Variablen, indem jeweils die zugehörigen Zyklen ermittelt werden. Die Betrachtung aller  $mn - (m + n - 1)$  Zyklen verursacht aber einen unverhältnismässig hohen Aufwand.

Die Optimalitätsindikatoren lassen sich auch ohne Kenntnis der zu den freien Variablen gehörenden Zyklen finden. Dazu ist es nötig die zu den Basisfeldern gehörigen Kostenkoeffizienten in *Potentiale* zu zerlegen.

### Satz 2.9

Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$u_i + v_j = c_{ij}, \quad (i, j) \in B, \quad (2.17)$$

wobei  $B$  eine Basis ist, besitzt den Freiheitsgrad Eins.

Wählt man zum Beispiel  $u_1 = 0$ , dann erhält man ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix Dreiecksgestalt besitzt.

### Bemerkung 2.7

Unabhängig von der Wahl der frei wählbaren Variable ist stets die Summe der Potentiale  $u_i + v_j$ ,  $(i, j) \in N$ , eindeutig bestimmt.

Mit Hilfe von (2.17) erhält man aus (2.16) die Darstellung der Optimalitätsindikatoren in der Form

$$\begin{aligned} c'_{i_1 j_1} &= c_{i_1 j_1} - (u_{i_1} + v_{j_2}) + (u_{i_2} + v_{j_2}) - \dots + (u_{i_k} + v_{j_k}) - (u_{i_k} + v_{j_1}) \\ &= c_{i_1 j_1} - (u_{i_1} + v_{j_1}) \end{aligned}$$

Damit kann für jede freie Variable der Optimalitätsindikator ohne Kenntnis des zugehörigen Zyklus relativ einfach mittels

$$c'_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j), \quad (i, j) \in N \setminus B \quad (2.18)$$

berechnet werden.

**Bemerkung 2.8**

Die Optimalität einer Basis  $B$  lässt sich auch mit Hilfe der zum klassischen Transportproblem gehörigen Dualaufgabe (2.7) - (2.9) herleiten.

Es sei  $x_{ij}^0$ ,  $(i, j) \in N$ , ein optimaler Transportplan mit der Basis  $B$ . Aus dem Satz vom komplementären Schlupf folgt die Existenz einer dualen Optimallösung  $u_i^0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $v_j^0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , die die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$x_{ij}^0 > 0 \implies u_i^0 + v_j^0 = c_{ij}$$

Mit (2.17) wird gefordert, dass jede der  $m + n - 1$  Basisvariable einer zulässigen Basislösung des klassischen Transportproblems die zugehörige duale Ungleichung (2.8) als Gleichung erfüllt:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \quad (i, j) \in B$$

Erfüllt eine Lösung von (2.17) auch noch die zu den  $mn - (m + n - 1)$  freien Variablen gehörigen dualen Ungleichungen

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad (i, j) \in N \setminus B,$$

dann ist die Optimalitätsbedingung für den Transportplan nachgewiesen. Dies entspricht dem Test der in (2.18) formulierten Größen auf Nichtnegativität.

Mit Hilfe der Dualvariablen lässt sich auch auf einfache Weise die Änderung der minimalen Gesamtkosten in Abhängigkeit von Änderungen in den Vorrats- und Bedarfsmengen darstellen. Bei der Änderung von Vorrats- und Bedarfsmengen ist aber darauf zu achten, dass die Lösbarkeitsbedingungen (2.5) und (2.6) nicht verletzt werden. Eine einzelne Änderung einer Vorratsmenge oder einer Bedarfsmenge ist nicht möglich.

**Bemerkung 2.9**

Ist  $u_i^0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $v_j^0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , eine Optimallösung der Dualaufgabe des klassischen Transportproblems, dann folgt aus der starken Dualitätsaussage die Gültigkeit der Beziehungen

$$z_{Min} = \sum_{i=1}^m a_i u_i^0 + \sum_{j=1}^n b_j v_j^0. \quad (2.19)$$

Die Größen  $u_i^0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , repräsentieren die *Schattenpreise* zu den Vorratsmengen  $a_i$ . Analog sind  $v_j^0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , die zu den Bedarfsmengen  $b_j$  gehörigen Schattenpreise.

Erhöht man gleichzeitig den Vorrat in einem Ausgangsort  $A_k$  als auch den Bedarf in einem Bestimmungsort  $B_l$  um eine Einheit, so verändern sich die Gesamtkosten  $z_{Min}$  um die Größe  $u_k^0 + v_l^0$ , falls der zugehörige lokale Stabilitätsbereich diese Änderung um eine Einheit zulässt.



### 2.1.3 Eröffnungsverfahren

Zur Erzeugung eines optimalen Transportplanes benötigt man in einem primalen Lösungsverfahren als Ausgangspunkt einen ersten Transportplan, genauer eine erste zulässige Basislösung für das klassische Transportproblem.

Grundlage für den nachfolgenden Algorithmus sind die im Abschnitt 2.1.2 formulierten Aussagen, insbesondere Definition 2.2 und die Sätze 2.5 und 2.6. Ausgangspunkt ist nicht eine beliebige Basismenge  $B$ , sondern die Basismenge wird so aufgebaut, dass die Zulässigkeit garantiert wird. Dabei werden sukzessive Basisfelder  $(k, l)$  ausgewählt und den zugehörigen Variablen  $x_{kl}$  wird die größtmögliche noch transportierbare Menge für diese Transportverbindung zugeordnet.

#### Verfahren zur Erzeugung einer beliebigen zulässigen Basislösung für das klassische Transportproblem:

0. Trage in die Tabelle der Restriktionen die Vorratsmengen  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und die Bedarfsmengen  $b_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ein. Die Felder  $(i, j) \in N$  enthalten keine Eintragungen und sind ungestrichen.
1. Wähle beliebiges nichtgestrichenes Feld  $(k, l) \in N$ .
2. Setze  $x_{kl} = \min\{a_k, b_l\}$ .
  - (a)  $a_k < b_l$ :  
Streiche Zeile  $k$  und ersetze  $b_l$  durch  $b_l - a_k$ .  
Weiter mit 1.
  - (b)  $a_k > b_l$ :  
Streiche Spalte  $l$  und ersetze  $a_k$  durch  $a_k - b_l$ .  
Weiter mit 1.
  - (c)  $a_k = b_l$ :
    - i. Die Tabelle enthält genau eine ungestrichene Zeile und eine ungestrichene Spalte.  
Streiche die Zeile  $k$  und die Spalte  $l$ .  
Weiter mit 3.
    - ii. Die Tabelle enthält mehr als zwei ungestrichene Zeilen und Spalten.  
Streiche entweder Zeile  $k$  und ersetze  $b_l$  durch 0, oder streiche Spalte  $l$  und ersetze  $a_k$  durch 0, so dass noch mindestens eine Zeile und eine Spalte ungestrichen sind.  
Weiter mit 1.
3. Den Variablen der nichtbesetzten Felder wird der Wert 0 zugeordnet (aber nicht eingetragen).
4. Berechne die Gesamtkosten  $z$ .

Nach jeder Iteration verringert sich die Dimension des noch zu betrachtenden verbliebenen Transportproblems um eine Zeile oder um eine Spalte, bis im  $(m + n - 1)$ -ten Durchlauf nur noch ein einziges Feld verblieben ist. Wird wenigstens einmal der zweite Teil von Schritt 2 (c) durchlaufen, so entsteht eine degenerierte Basislösung. Im Unterschied zu den Nichtbasisvariablen mit Wert Null, wo kein Eintrag in die freien Felder erfolgt, wird eine Basisvariable mit Wert Null in das entsprechende besetzte Feld eingetragen.

Im Algorithmus zur Erzeugung einer beliebigen ersten zulässigen Basislösung des klassischen Transportproblems ist noch der Schritt 1 zu präzisieren. Im Folgenden werden deshalb spezielle Regeln zur Auswahl des Feldes  $(k, l) \in N$  angegeben. Je mehr Rechenaufwand dafür aufgewendet wird, um so besser wird im allgemeinen der erzeugte Transportplan sein. Damit kann man eventuell im noch zu beschreibenden Optimierungsverfahren mit einer geringeren Anzahl von Iterationen auskommen.

Nordwesteckenregel:

Wähle jeweils das nichtgestrichene Feld in der linken oberen Ecke.

Bei der Nordwesteckenregel wird keine Rücksicht auf die Kostenmatrix genommen. In der Tabelle der Restriktionen wird eine Folge von Feldern erzeugt, die einen maximalen Weg im engeren Sinn bilden (siehe Definition 2.2). Die Erzeugung eines Transportplans nach dieser Regel erfordert nur einen Aufwand von  $\mathcal{O}(m + n)$ .

Zeilenminimumregel:

Wähle die nichtgestrichene Zeile mit dem kleinsten Index.

Wähle in dieser Zeile ein nichtgestrichenes Feld mit dem kleinsten Kostenkoeffizienten.

Beginnend mit der ersten Zeile werden die zugehörigen Vorratsmengen unter Berücksichtigung des aktuellen Restbedarfs in den Bestimmungsorten kostenminimal verteilt.

Spaltenminimumregel:

Wähle die nichtgestrichene Spalte mit dem kleinsten Index.

Wähle in dieser Spalte ein nichtgestrichenes Feld mit dem kleinsten Kostenkoeffizienten.

Beginnend mit der ersten Spalte werden die zugehörigen Bedarfsmengen unter Berücksichtigung der noch vorhandenen Vorratsmengen in den Ausgangsorten kostenminimal zugeordnet.

Für den praktisch relevanten Fall, dass die Zahl der Abnehmer  $n$  wesentlich größer als die Zahl der Anbieter  $m$  ist, erweist sich die Spaltenminimumregel oder auch die folgende modifizierte Regel als besonders günstig.

Modifizierte Spaltenminimumregel:

Iteration der Spalten in der Reihenfolge  $1, \dots, n$ :

Ist die Spalte nichtgestrichen, so wähle in dieser Spalte ein nichtbesetztes Feld mit dem kleinsten Kostenkoeffizienten. Gehe dann zur nächsten Spalte.

Nach Überprüfung der Spalte  $n$  beginnt die Iteration wieder mit Spalte 1, falls noch nicht alle Spalten gestrichen sind.

Die modifizierte Spaltenminimumregel orientiert sich darauf, im ersten Durchlauf möglichst in vielen Spalten die zugehörigen Spaltenminima zu besetzen. Der Nachteil gegenüber der gewöhnlichen Spaltenminimumregel ist das mehrfache Durchlaufen der Spalten. Spürbare Effekte erzielt man erst bei Beispielen mit großer Spaltenzahl.

Gesamtminimumregel:

Wähle nichtgestrichenes Feld mit kleinstem Kostenkoeffizienten.

Durch das Suchen des kleinsten Kostenkoeffizienten in jeder Iteration des Eröffnungsverfahrens in der verbliebene Kostenmatrix verursacht die Gesamtminimumregel einen recht hohen Aufwand. Dafür ist die Güte des erhaltenen Transportplans im Allgemeinen recht gut.

Approximationsmethode von VOGEL:

Für jede nichtgestrichene Zeile und jede nichtgestrichene Spalte wird die Differenz zwischen dem kleinsten und nächstkleinsten jeweils nichtgestrichenem Kostenkoeffizienten gebildet.

Wähle dann eine Zeile beziehungsweise eine Spalte mit der betragsmäßig größten Differenz aus und wähle in dieser Zeile beziehungsweise in dieser Spalte ein Feld mit dem kleinsten Kostenkoeffizienten.

Existiert nur noch eine ungestrichene Zeile oder eine ungestrichene Spalte, dann gehe zur Nordwesteckenregel über.

Bei der Approximationsmethode von VOGEL wird zunächst immer das Feld besetzt, bei dem die meisten Zusatzkosten in der Zeile oder Spalte im Falle seiner Nichtbesetzung drohen. Es ist eine sehr aufwendige Regel, da nach jeder Iteration zu prüfen ist, ob und wie sich diese Differenzen nach Streichung einer Zeile oder Spalte aus der Tabelle ändern. Existiert nur noch eine ungestrichene Zeile oder eine ungestrichene Spalte, dann erfolgen die Besetzungen der verbliebenen Felder zwangsläufig. Die formale Anwendung der Nordwesteckenregel führt die notwendigen Besetzungen ohne weiteren Aufwand aus.

### **Bemerkung 2.10**

Jede der hier aufgeführten Regeln kann im konkreten Fall einen Transportplan mit hohen Gesamtkosten erzeugen. Das in der letzten Iteration verbliebene Feld muss stets zwangsweise besetzt werden, wobei sich dann dort ein hoher Kostenkoeffizient sehr ungünstig auswirkt. Auch für die Approximationsmethode von VOGEL lassen sich derartige Beispiele angeben, auch wenn diese Regel sonst meist zu passablen zulässigen Transportplänen führt. Die Nordwesteckenregel wird im Allgemeinen unbefriedigende Transportpläne erzeugen. Aber auch hier werden später noch spezielle und auch praktisch bedeutsame Kostenmatrizen angegeben, für die diese Regel stets einen optimalen Transportplan liefert.

Abschließend werden für das klassische Transportproblem aus Beispiel 2.1 Transportpläne mit Hilfe der oben formulierten speziellen Eröffnungsverfahren erzeugt. Dabei wird auch demonstriert, dass bei Verwendung einer äquivalenten Kostenmatrix, zum Beispiel die in Beispiel 2.2 berechnete Matrix  $C^1$ , bei Anwendung der gleichen speziellen Regel unterschiedliche Transportpläne erzeugt werden können.

**Beispiel 2.3** (Erzeugung erster Transportpläne für Beispiel 2.1)

Ausgangspunkt seien die Datentabellen zu Beispiel 2.1 mit Kostenmatrix  $C$  beziehungsweise mit der äquivalenten Kostenmatrix  $C^1$  und der zugehörigen Reduktionskonstanten  $\omega_0 = 91050$ .

$c_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$	$c_{ij}^1$	1	2	3	4	$a_i$
1	630	150	320	310	75	1	310	0	170	140	75
2	710	380	600	400	125	2	160	0	220	0	125
3	340	250	170	420	100	3	0	80	0	230	100
$b_j$	80	65	70	85		$b_j$	80	65	70	85	

In jedem der im Folgenden zu erzeugenden Transportpläne hinsichtlich der oben beschriebenen speziellen Regeln sind genau  $m+n-1 = 6$  Felder zu besetzen. Den vollständigen Ablauf des Eröffnungsverfahren wird dabei nur bei der etwas aufwendigeren Approximationsmethode von VOGEL demonstriert.

Bei dem nach der Nordwesteckenregel zu erzeugenden Transportplan werden die Felder in der Reihenfolge  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(3, 4)$  besetzt. Der in der nachfolgenden Tabelle dargestellte Transportplan zeigt den typischen Weg der besetzten Felder von der Nordwestecke zur Südostecke.

$x_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1	75				75
2	5	65	55		125
3			15	85	100
$b_j$	80	65	70	85	

Die Gesamtkosten für diesen Transportplan betragen  $z = 146750$ .

Bei Verwendung der Zeilenminimummethode bezüglich der Kostenmatrix  $C$  werden die Felder  $(1, 2)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(3, 1)$  in der angegebenen Reihenfolge besetzt. Bei den letzten beiden Feldern erfolgt die Besetzung zwangweise, da nach Besetzung der ersten vier Felder nur noch die ungestrichene Zeile 3 existiert. Es ergibt sich damit der in der folgenden Tabelle dargestellte Transportplan:

$x_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1		65		10	75
2			50	75	125
3	80		20		100
$b_j$	80	65	70	85	

Die Gesamtkosten von  $z = 103450$  sind gegenüber dem nach der Nordwesteckenregel erzeugten Transportplan für das betrachtete Beispiel deutlich geringer.

Verwendet man für die Zeilenminimummethode die äquivalente Kostenmatrix  $C^1$ , dann werden nacheinander die Felder  $(1, 2)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(3, 1)$  besetzt. In der vierten Iteration wird das Feld  $(2, 1)$  und nicht das Feld  $(2, 3)$  wie bei der Zeilenminimummethode bezüglich der Matrix  $C$  ausgewählt. Damit ergibt sich ein anderer Transportplan:

$x_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1		65		10	75
2	50			75	125
3	30		70		100
$b_j$	80	65	70	85	

Zu ihm gehören die geringeren Gesamtkosten  $z = z_1 + \omega_0 = 9400 + 91050 = 100450$ .

Wendet man die Spaltenminimumregel auf die Kostenmatrix  $C$  an, so werden der Reihe nach die Felder  $(3, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(2, 4)$  besetzt. Daraus resultiert der folgende Transportplan mit den Gesamtkosten  $z = 101550$ .

$x_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1		65	10		75
2			40	85	125
3	80		20		100
$b_j$	80	65	70	85	

Bei Anwendung der modifizierten Spaltenminimumregel werden im ersten Durchlauf die zu den vier Spaltenminima gehörigen Felder  $(3, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(1, 4)$  mit der maximal möglichen Transportmenge besetzt. Da nur die ungestrichene Zeile 2 verbleibt, erfolgt im zweiten Durchlauf die zwangsweise Besetzung der Felder  $(2, 3)$ ,  $(2, 4)$ . Damit erhält man den bereits mit der Zeilenminimumregel bezüglich der Kostenmatrix  $C$  gefundenen Transportplan. Hier zeigt sich auch, dass die modifizierte Spaltenminimumregel bei derart kleinen Beispielen nicht immer bessere Ergebnisse als die herkömmliche Spaltenminimummethode liefert.

Ausgehend von der Kostenmatrix  $C$  werden bei der Gesamtminimummethode nacheinander die Felder  $(1, 2)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(2, 1)$  besetzt. In den ersten vier Iterationen findet man das zu suchende Gesamtminimum jeweils in einer anderen Zeile als auch in einer anderen Spalte. Die letzten beiden Felder werden dabei zwangsweise ausgewählt, da auch hier die Zeile 2 die einzig noch verbliebene ungestrichene Zeile ist. Damit erhält man den bereits bei der Zeilenminimumregel bezüglich der Kostenmatrix  $C^1$  gefundenen Transportplan mit den Gesamtkosten  $z = 100450$ .

Die Approximationsmethode von VOGEL soll an Hand der äquivalenten Kostenmatrix  $C^1$  ausführlich demonstriert werden. Zuerst bildet man für alle Zeilen und alle Spalten die Differenzen zwischen dem kleinsten und nächstkleinsten Kostenkoeffizienten. Sie sind in der folgenden Tabelle angegeben:

$c_{ij}^1$	1	2	3	4	$\Delta z_i$
1	310	0	170	140	140
2	160	0	220	0	0
3	0	80	0	230	0
$\Delta s_j$	160	0	170	140	

Das Maximum aller Differenzen wird in Spalte 3 angenommen. Das zugehörige Spaltenminimum befindet sich im Feld  $(3, 3)$ . Dieses Feld wird mit dem Wert  $x_{33} = \min\{100; 70\} = 70$  besetzt. Die Spalte 3 ist zu streichen und der Vorrat im dritten Ausgangort auf 30 zu reduzieren. Die Eintragungen sind in der folgenden linken Tabelle der Restriktionen realisiert. In der rechten Tabelle wurden die Differenzen neu berechnet. Da die dritte Spalte ausgeblendet wurde, sind nur die Differenzen zu den Zeilen zu aktualisieren.

$x_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$	$c_{ij}^1$	1	2	3	4	$\Delta z_i$
1			–		75	1	310	0	–	140	140
2			–		125	2	160	0	–	0	0
3			70		30	3	0	80	–	230	80
$b_j$	80	65	–	85		$\Delta s_j$	160	0	–	140	

Das Maximum aller Differenzen wird jetzt in Spalte 1 angenommen. Das zugehörige Spaltenminimum befindet sich im Feld (3,1) und der zugehörigen Variable wird der Wert  $x_{31} = \min\{30; 80\} = 30$  erteilt. Die Zeile 3 ist zu streichen und der Bedarf im ersten Bestimmungsort auf 50 zu reduzieren. Die folgenden beiden Tabellen enthalten wieder die bereits besetzten Felder mit zugeordneter Transportmenge und die neu berechneten Differenzen, die nur für die Spalten zu aktualisieren sind.

$x_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$	$c_{ij}^1$	1	2	3	4	$\Delta z_i$
1			–		75	1	310	0	–	140	140
2			–		125	2	160	0	–	0	0
3	30	–	70	–	–	3	–	–	–	–	–
$b_j$	50	65	–	85		$\Delta s_j$	150	0	–	140	

Das Maximum aller Differenzen wird abermals in Spalte 1 angenommen. Das Spaltenminimum befindet sich nun im Feld (2,1), dem Feld mit den ursprünglich zweitkleinsten Kosten. Die zugehörigen Variable erhält den Wert  $x_{21} = \min\{125; 50\} = 50$ . Die Spalte 1 ist zu streichen und der Vorrat im zweiten Ausgangsort auf 75 zu reduzieren. Die folgenden beiden Tabellen enthalten die bisher zugeordneten Transportmengen und die neu berechneten Differenzen.

$x_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$	$c_{ij}^1$	1	2	3	4	$\Delta z_i$
1	–		–		75	1	–	0	–	140	140
2	50		–		75	2	–	0	–	0	0
3	30	–	70	–	–	3	–	–	–	–	–
$b_j$	–	65	–	85		$\Delta s_j$	–	0	–	140	

Das Maximum der verbliebenen Differenzen ist nicht eindeutig. Wählt man die Zeile 1 aus, dann ist das Feld mit dem kleinsten Kostenkoeffizienten (1,2) zu besetzen. Die Variable erhält den Wert  $x_{12} = \min\{75; 65\} = 65$ . Die Spalte 2 wird gestrichen und der Vorrat im ersten Ausgangsort auf 10 reduziert. Die folgende linke Tabelle berücksichtigt die bislang vorgenommenen vier Eintragungen:

$x_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$	$x_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1	–	65	–		10	1	–	65	–	10	–
2	50	–	–		75	2	50	–	–	75	–
3	30	–	70	–	–	3	30	–	70	–	–
$b_j$	–	–	–	85		$b_j$	–	–	–	–	

Da nur noch die Spalte 4 ungestrichen ist, bricht das Verfahren zur Berechnung der Differenzen ab. Die verbliebenen beiden Felder werden zwangsweise mit  $x_{14} = 10$  und  $x_{24} = 75$  belegt. Die obige rechte Tabelle enthält den erzeugten Transportplan mit den Gesamtkosten  $z = 100450$ . Dieser Plan, der auch mit einer anderen Regel erzeugt wurde, ist der bisher beste von allen erzeugten Transportplänen und kann als Ausgangspunkt für weitere Optimierungsverfahren dienen.

### 2.1.4 Optimierungsverfahren

Ausgehend von einer zulässigen Basislösung eines klassischen Transportproblems, die man sich mit Hilfe von den im letzten Abschnitt beschriebenen Eröffnungsverfahren erzeugen kann, soll jetzt ein primales Lösungsverfahren zur Bestimmung eines optimalen Transportplans beschrieben werden. Für das zu skizzierende Optimierungsverfahren genügen dabei die folgenden beiden grundlegenden Schritte:

- Test einer zulässigen Basislösung des klassischen Transportproblems auf Optimalität.
- Erzeugung einer weiteren zulässigen Basislösung für das klassische Transportproblem mit nichtschlechteren Gesamtkosten.

Grundlage für den nachfolgenden Algorithmus sind die im Abschnitt 2.1.2 formulierten Aussagen zum Basiswechsel, insbesondere die dort beschriebene Potentialmethode.

#### Verfahren zur Erzeugung eines optimalen Transportplans für das klassische Transportproblem:

0. Erzeuge mit dem Eröffnungsverfahren einen Transportplan  $x$  mit der zugehörigen Basis  $B$  und den Gesamtkosten  $z$ .
1. Berechne die Potentiale durch Lösen des linearen Gleichungssystems
 
$$u_i + v_j = c_{ij}, \quad (i, j) \in B, \quad u_1 = 0.$$
2. Berechne die Optimalitätsindikatoren
 
$$c'_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j), \quad (i, j) \in N \setminus B.$$
3. Abbruchkriterium:  
Gilt  $c'_{ij} \geq 0$ ,  $(i, j) \in N \setminus B$ , dann liegt ein optimaler Transportplan vor.
4. Wähle ein freies Feld  $(k, l)$  mit  $c'_{kl} = \min\{c'_{ij} \mid (i, j) \in N \setminus B\}$ .
5. Bestimmung des Austauschzyklus:  
Streiche alle Felder aus der Menge  $B \cup \{(k, l)\}$ , die allein in einer Zeile oder Spalte stehen. Wiederhole diesen Prozess, bis keine Streichungen mehr möglich sind. Unterteile die verbliebenen Felder in  
 $B^+$ : Feld  $(k, l)$  und jedes weitere zweite Feld des Zyklus,  
 $B^-$ : nicht zu  $B^+$  gehörige Felder des Zyklus.
6. Bestimme ein besetztes Feld  $(p, q)$  und die Größe  $d$  durch die Vorschrift
 
$$d = x_{pq} = \min\{x_{ij} \mid (i, j) \in B^-\}.$$
7. Abänderung des Transportplans (Turmzugprinzip):
 
$$x_{ij} := x_{ij} + d, \quad (i, j) \in B^+$$

$$x_{ij} := x_{ij} - d, \quad (i, j) \in B^-$$

$$z := z + c'_{kl}d$$

$$B := (B \setminus \{(p, q)\}) \cup \{(k, l)\}$$
 Weiter mit 1.

Das im Schritt 1 zu lösende lineare Gleichungssystem lässt sich ebenfalls tabellarisch erfassen und leicht lösen. Dies soll im anschließenden Beispiel demonstriert werden. Wird eine vorliegender Transportplan im Schritt 3 nicht als optimal erkannt, dann erfolgt die Auswahl der neuen Basisvariable im Schritt 4 nach der bei der Simplexmethode üblichen Vorgehensweise (Most Negative Rule). Bei starker Degeneration sollte allerdings die BLAND-Regel (First Negative Rule) verwendet werden. Ist das Minimum im Schritt 6 nicht eindeutig bestimmt, so ist der neu entstehende Transportplan auf jeden Fall degeneriert. Lag bereits ein degenerierter Transportplan vor und tritt der Fall  $d = 0$  ein, dann entsteht zwar eine andere Basisdarstellung, aber der Transportplan selbst hat sich nicht geändert.

### Bemerkung 2.11

Der nach dem beschriebenen Optimierungsverfahren erzeugte optimale Transportplan ist der einzige mit dieser Eigenschaft, wenn  $c'_{ij} > 0$ ,  $(i, j) \in N \setminus B$  gilt. Notwendig für das Vorliegen weiterer optimaler Transportpläne ist die Existenz eines Feldes  $(k, l) \in N \setminus B$  mit  $c'_{kl} = 0$ . Im Falle der Nichtdegeneriertheit ist das auch hinreichend. Man findet dann einen anderen optimalen Transportplan, wenn man mit dem Feld  $(k, l)$  die Schritte 5 bis 7 des Optimierungsverfahren noch einmal durchläuft.

### Beispiel 2.4 (Erzeugung eines optimalen Transportplans für Beispiel 2.1)

Ausgangspunkt der Betrachtungen sei die Datentabelle zu Beispiel 2.1 mit der Kostenmatrix  $C$  und ein bereits im letzten Abschnitt erzeugter Transportplan mit den Gesamtkosten  $z = 100450$ .

$c_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$		$x_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1	630	150	320	310	75		1		65		10	75
2	710	380	600	400	125		2	50			75	125
3	340	250	170	420	100		3	30		70		100
$b_j$	80	65	70	85			$b_j$	80	65	70	85	

Um den vorliegenden Transportplan auf Optimalität zu testen, müssen zuerst die Potentiale berechnet werden. Das zugehörige lineare Gleichungssystem für die gegebene Basismenge  $B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 3)\}$  lautet wie folgt:

$$\begin{aligned}
 u_1 + v_2 &= 150 & u_1 + v_4 &= 310 \\
 u_2 + v_1 &= 710 & u_2 + v_4 &= 400 \\
 u_3 + v_1 &= 340 & u_3 + v_3 &= 170
 \end{aligned}$$

Als frei wählbare Variable wird  $u_1 = 0$  fixiert. Das lineare Gleichungssystem lässt sich anhand der folgende Tabelle veranschaulichen, wobei die Variable  $u_1$  mit dem Vorgabewert Null bereits eingetragen wurde.

$u_i + v_j$	1	2	3	4	$u_i$
1		150		310	0
2	710			400	
3	340		170		
$v_j$					



Da das lineare Gleichungssystem Dreiecksgestalt besitzt, lässt sich sukzessive stets eine Gleichung finden, bei der nur noch eine Variable unbekannt ist. Aus  $u_1 = 0$  folgt sofort  $v_2 = 150$  und  $v_4 = 310$ . Aus  $v_4 = 310$  erhält man  $u_2 = 90$ . Mit dem nun bekannten Wert für  $u_2$  kann  $v_1 = 620$  bestimmt werden. Aus  $v_1 = 620$  folgt  $u_3 = -280$  und letztlich mit diesem Wert auch  $v_3 = 450$ . Diese Rechnungen lassen sich analog in der Tabelle nachvollziehen und führen zur Eintragung aller Potentiale:

$u_i + v_j$	1	2	3	4	$u_i$
1		150		310	0
2	710			400	90
3	340		170		-280
$v_j$	620	150	450	310	

Zur Berechnung der Optimalitätsindikatoren benötigt man die Summe der Potentiale  $u_i + v_j$  gerade für die freien Felder  $(i, j) \in N \setminus B$ . Dies lässt sich nun leicht in der obigen Tabelle nachholen, indem die Summen in die noch nicht ausgefüllten Felder eingetragen werden.

$u_i + v_j$	1	2	3	4	$u_i$
1	620	150	450	310	0
2	710	240	540	400	90
3	340	-130	170	30	-280
$v_j$	620	150	450	310	

Zur Berechnung der Optimalitätsindikatoren ist jetzt nur noch der Inhalt der eben erzeugten Tabelle von der Kostenmatrix abzuziehen. Der zu den Optimalitätsindikatoren der besetzten Felder gehörende Wert Null ist in der folgenden Tabelle hervorgehoben:

$c'_{ij}$	1	2	3	4
1	10	0	-130	0
2	0	140	60	0
3	0	380	0	390

Da die Eintragungen der Optimalitätsindikatoren der besetzten Felder  $(i, j) \in B$  nicht benötigt werden, kann man die letzten beiden Tabellen auch platzsparend überlagern. In den gerahmten Feldern werden die Kosten für die besetzten Felder eingetragen. Anschließend werden die Potentiale durch Lösen des linearen Gleichungssystems bestimmt. In die noch verbliebenen freien Felder werden dann gleich die Optimalitätsindikatoren eingetragen, ohne erst in einer Zwischerechnung die Summe der Potentiale für diese Felder zu bilden:

$c'_{ij}$	1	2	3	4	$u_i$
1	10	150	-130	310	0
2	710	140	60	400	90
3	340	380	170	390	-280
$v_j$	620	150	450	310	

Der vorliegende Transportplan wird wegen  $c'_{13} = -130 < 0$  nicht als optimal erkannt. Da der Transportplan nicht degeneriert ist, ist er tatsächlich auch nicht optimal. Das freie Feld (1, 3) muss in die Basis aufgenommen werden und wird vorerst mit der Unbekannten  $d$  besetzt. Zur Ermittlung der umzulagernden Transportmenge  $d$  und der ausscheidenden Basisvariable ist der Austauschzyklus zu bestimmen. Dabei ist nur die Spalte 2 zu streichen, da sie genau eine Eintragung enthält und die verbliebenen Zeilen und Spalten genau zwei Einträge besitzen. Beginnend mit dem ausgewählten freien Feld werden die zum Austauschzyklus gehörigen Transportmengen alternativ um  $d$  erhöht beziehungsweise um  $d$  vermindert. Die folgende Tabelle zeigt diesen Vorgang.

$x_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1		65	$d$	$10 - d$	75
2	$50 - d$			$75 + d$	125
3	$30 + d$		$70 - d$		100
$b_j$	80	65	70	85	

Um die Gesamtkosten zu minimieren, muss der Wert  $d$  möglichst groß werden. Um die Zulässigkeit des neuen Transportplans zu gewährleisten, darf  $d$  nur so groß werden, dass die Bedingungen  $10 - d \geq 0$ ,  $50 - d \geq 0$  und  $70 - d \geq 0$  erfüllt werden. Damit ist der Wert  $d = 10$  eindeutig durch das besetzte Feld (1, 4) bestimmt. Dieses Feld verlässt die Basis. Alle Variablenwerte sind alternierend um den Wert  $d = 10$  zu ändern.

$x_{ij}^o$	1	2	3	4	$a_i$
1		65	10		75
2	40			85	125
3	40		60		100
$b_j$	80	65	70	85	

Die Gesamtkosten des neu erzeugten Transportplans verbessern sich gegenüber dem ursprünglichen Plan auf  $z = 100450 + (-130) \cdot 10 = 99150$ .

Der Ablauf des Verfahrens wiederholt sich nun. Der neue Transportplan ist auf Optimalität zu testen. Die folgende Tabelle vereint die dazu benötigten Potentiale und die daraus berechneten Optimalitätsindikatoren:

$c'_{ij}$	1	2	3	4	$u_i$
1	140	150	320	130	0
2	710	10	60	400	220
3	340	250	170	390	-150
$v_j$	490	150	320	180	

Alle Optimalitätsindikatoren sind nichtnegativ. Damit stellt der zuletzt erzeugte Plan einen optimalen Transportplan mit minimalen Gesamtkosten in Höhe von  $z = 99150$  dar. Er ist zugleich der einzige optimale Transportplan, da die Optimalitätsindikatoren der freien Variablen sämtlich positiv sind.

### 2.1.5 Ergänzungen

In diesem Abschnitt werden einige für weitere Anwendungen nützliche Sachverhalte dargestellt. Es geht dabei um einfach handhabbare Variationen und Erweiterungen zum klassischen Transportproblem, um die Behandlung von Aufgaben mit spezieller Datenstruktur und die Vorstellung eines Paradoxons.

Begonnen wird mit dem Problem der Maximierung einer linearen Zielfunktion über dem zulässigen Bereich eines klassischen Transportproblems. Es seien  $g_{ij}$ ,  $(i, j) \in N$ , die spezifischen Gewinne für den Transport einer Mengeneinheit vom Ausgangsort  $A_i$  zum Bedarfsort  $B_j$ . Die zugehörige Gewinnmatrix wird mit  $G$  und der Gesamtgewinn mit  $z_G$  bezeichnet. Nun kann die folgende Variante zum klassischen Transportproblem formuliert werden:

**Modell KTP-Max** (Maximumform zu KTP):

$$\begin{aligned}
 z_G &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \max \\
 \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, & i = 1, \dots, m \\
 \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, & j = 1, \dots, n \\
 x_{ij} &\geq 0, & i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Zur Lösung dieses Problems sind mehrere Wege denkbar. Eine Möglichkeit besteht darin, das Modell (2.20) in die Standardform des klassischen Transportproblems zu überführen. Die folgende Vorschrift ordnet der Gewinnmatrix  $G$  eine nichtnegative Kostenmatrix  $C$  zu:

$$\begin{aligned}
 g &= \max_{(i,j) \in N} g_{ij} \\
 c_{ij} &= g - g_{ij}, \quad (i, j) \in N
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Mit dieser Matrix  $C$  wird das klassische Transportproblem mit der in (2.1) beschriebenen zu minimierenden Zielfunktion  $z$  gelöst. Jeder erzeugte optimale Transportplan ist auch optimal für das Transportproblem KTP-Max. Bezüglich der Zielfunktionswerte gilt der Zusammenhang

$$z_G(x) = g \sum_{i=1}^m a_i - z(x) \tag{2.22}$$

für alle zulässigen Transportpläne  $x$ .

Eine weitere Möglichkeit zur Lösung der Maximumform des klassischen Transportproblems besteht in einem minimalen Eingriff des im letzten Abschnitt beschriebenen Verfahrens zur Erzeugung eines optimalen Transportplans für das klassische Transportproblem. Der zu maximierenden Zielfunktion  $z_G$  ist die zu minimierende Zielfunktion  $z = -z_G$  äquivalent. Damit kann der Algorithmus formal mit den Daten  $c_{ij} = -g_{ij}$ ,  $(i, j) \in N$ , aufgerufen werden. Diese Transformation ist nicht nötig, wenn man für die Maximumform im Algorithmus alle Größen  $c_{ij}$  durch  $g_{ij}$ ,  $(i, j) \in N$ , ersetzt, den Abbruchtest im Schritt 3 durch  $g'_{ij} \leq 0$ ,  $(i, j) \in N \setminus B$ , neu formuliert und im Schritt 4 den größten Optimalitätsindikator bestimmt.

In der Praxis tritt oft der Fall ein, dass von gewissen Ausgangsorten zu gewissen Bedarfsorten keine Lieferung stattfinden darf. Diese Situation entsteht auch oft bei den noch zu beschreibenden Möglichkeiten der mathematischen Umformulierung nichtklassischer Transportmodelle.

Es sei  $E \subset N$  eine Menge von zugelassenen Transportverbindungen und  $N \setminus E$  die Menge der gesperrten Transportverbindungen.

**Modell TP-S** (Transportproblem mit Sperrungen):

$$\begin{aligned}
 z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\longrightarrow \min \\
 \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & \quad i = 1, \dots, m \\
 \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & \quad j = 1, \dots, n \\
 x_{ij} \geq 0, & \quad (i, j) \in E \\
 x_{ij} = 0, & \quad (i, j) \in N \setminus E
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Der zulässige Bereich des Transportproblems TP-S kann bereits bei nur einer Sperrung leer sein. Einfach handhabbare Lösbarkeitsbedingungen lassen sich für dieses Problem nicht ohne weiteres formulieren. Der folgende Lösungsweg liefert aber automatisch eine Entscheidung über die Lösbarkeit.

Die Forderungen  $x_{ij} = 0$ ,  $(i, j) \in N \setminus E$ , lassen sich bei dem beschriebenen Lösungsverfahren für das klassische Transportproblem an Hand der Transporttableaus in dieser Form nicht berücksichtigen. Deshalb werden die Sperrungen der Transportverbindungen aufgehoben und für diese Transportverbindungen sehr hohe Strafkosten  $M$  angesetzt, über deren Mindestgröße noch zu sprechen ist. Mit dem Aufheben der Sperrungen wird nur formal die eventuelle Unlösbarkeit des Transportproblems TP-S beseitigt.

Mit der revidierten Kostenmatrix  $\tilde{C}$ , die durch die spezifischen Transportaufwendungen

$$\tilde{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & (i, j) \in E \\ M, & (i, j) \in N \setminus E \end{cases} \tag{2.24}$$

gegeben ist, wird ein optimaler Transportplan  $x^0$  des so entstandenen klassischen Transportproblems bestimmt.

### Bemerkung 2.12

Das Lösungsverfahren für das klassische Transportproblem sorgt automatisch dafür, dass über Transportverbindungen  $(i, j) \in N \setminus E$  keine Transporte stattfinden, falls das Problem mit gesperrten Transportverbindungen lösbar ist und die Strafkosten hinreichend groß gewählt wurden. Ist das Transportproblem mit Sperrungen unlösbar, dann gilt für jede Optimallösung  $x^0$  des zugeordneten klassischen Transportproblems die Beziehung  $\sum_{(i,j) \in N \setminus E} x_{ij}^0 > 0$ . Eine positive Transportmenge in einem optimalen Transportplan für ein beliebiges zu sperrendes Feld zeigt demzufolge die Unlösbarkeit des Transportproblems mit Sperrungen an.

Die Werte der Basisvariablen eines klassischen Transportproblems lassen sich als Summe und Differenzen von Vorrats- und Bedarfsmengen darstellen. Damit kann jeder mögliche positive Wert einer Basisvariablen durch eine theoretisch bestimmbare Zahl  $\Delta(a, b) > 0$  nach unten abgeschätzt werden, die nur von den konkreten Vorrats- und Bedarfsmengen abhängt. Erfüllen die Strafkosten  $M$  die Bedingung

$$M \cdot \Delta(a, b) > \max_{(i,j) \in E} c_{ij} \cdot \sum_{i=1}^m a_i, \tag{2.25}$$

dann wird jedem im Sinne des Transportproblems mit Sperrungen unzulässigen Transportplan ein größerer Zielfunktionswert als jedem zulässigen Transportplan zugeordnet. Im Falle ganzzahliger Vorrats- und Bedarfsmengen gilt stets  $\Delta(a, b) \geq 1$ . Die Zahl

$$M = 1 + \max_{(i,j) \in E} c_{ij} \cdot \sum_{i=1}^m a_i$$

genügt in diesem Fall den Anforderungen.

**Beispiel 2.5**

Gegeben sei die folgende Datentabelle eines klassischen Transportproblems:

$c_{ij}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	2	1	7	11
$A_2$	3	5	2	23
$b_j$	12	14	8	

Fordert man, dass keine Transporte von  $A_2$  nach  $B_2$  stattfinden dürfen, dann ist der Koeffizient  $c_{22} = 5$  durch eine Zahl  $M > 7 \cdot 34 = 238$  zu ersetzen. Für das zugeordnete klassische Transportproblem erhält man die folgende eindeutige Optimallösung und die zugehörigen Optimalitätsindikatoren:

$x_{ij}^0$	1	2	3	$a_i$	$c'_{ij}$	1	2	3
1		11		11	1	$M - 2$	$\boxed{0}$	$M + 4$
2	12	3	8	23	2	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$
$b_j$	12	14	8					

Am minimalen Zielfunktionswert  $z = 63 + 3M$  erkennt man die Unlösbarkeit der Ausgangsaufgabe.

Sperrt man dagegen die Transportverbindung von  $A_1$  nach  $B_3$ , dann wird der Koeffizient  $c_{13} = 7$  durch eine Zahl  $M > 5 \cdot 34 = 170$  ersetzt. Die oben angegebene Lösung ist auch in diesem Fall optimal, was man an Hand der neu zu berechnenden Optimalitätsindikatoren erkennt:

$c'_{ij}$	1	2	3
1	3	$\boxed{0}$	$M + 2$
2	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$

Die Lösung ist wegen  $x_{13}^0 = 0$  zulässig für das Ausgangsproblem. Damit stellt  $x^0$  einen optimalen Transportplan mit minimalen Gesamtkosten  $z = 78$  dar.

Bei der Erläuterung der Nordwesteckenregel wurde bereits darauf hingewiesen, dass hier bei der Erzeugung eines ersten Transportplans die Einträge der Kostenmatrix nicht berücksichtigt werden. Man stellt sofort die Vermutung an, dass ein derartiger Transportplan im Allgemeinen stark von einem optimalen Transportplan abweicht und damit auch kein guter Ausgangspunkt für das Optimierungsverfahren ist. Im Folgenden wird ein Klasse von Kostenmatrizen angegeben, für welche die Nordwesteckenregel sehr bedeutsam ist.

Im Jahre 1781 beschäftigte sich der französische Ingenieur und Mathematiker GASPARD MONGE u.a. mit dem Problem des Transports von Erdmassen. Dabei machte er die folgende Beobachtung (siehe [Mon1781]):

”Lorsque le transport du déblai se fait de manière que la somme des produits des molécules par l'espace parcouru est un minimum, les routes de deux points quelconques  $A$  &  $B$ , ne doivent pas se couper entre leurs extrémités, car la somme  $A_b + B_a$ , des routes qui se coupent, est toujours plus grande que la somme  $A_a + B_b$ , de celles qui ne se coupent pas.”

Ist jeweils eine Mengeneinheit von den Ausgangsorten  $A_1$  und  $A_2$  zu den Bedarfsorten  $B_1$  und  $B_2$  zu transportieren, dann ist ein Transportplan nicht optimal, wenn sich die benutzten Transportwege kreuzen:



Abbildung 2.2: Illustration der *Monge*-Eigenschaft

1961 wurde diese Beobachtung von MONGE durch ALAN J. HOFFMANN wiederentdeckt und verallgemeinert.

#### Definition 2.4

Eine reelle Matrix  $C$  heißt *Monge*-Matrix, wenn ihre Einträge den Bedingungen

$$c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}, \text{ für alle } (i, r, j, s) \text{ mit } 1 \leq i < r \leq m, 1 \leq j < s \leq n \quad (2.26)$$

genügen.

Um zu erkennen, ob eine reelle Matrix  $C$  die *Monge*-Eigenschaft (2.26) besitzt, genügt es, nur die Erfüllung der Ungleichungen

$$c_{ij} + c_{i+1,j+1} \leq c_{i,j+1} + c_{i+1,j}, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad j = 1, \dots, n-1$$

zu prüfen. Damit reduziert sich der Prüfaufwand erheblich. Für die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 8 \\ 6 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & c_{33} & 3 \end{pmatrix}$$

sind diese Bedingungen nur für  $1 \leq c_{33} \leq 2$  erfüllt.

Der folgende Satz basiert auf allgemeinere Untersuchungen zu *Monge*-Sequenzen [Hof63] von ALAN J. HOFFMANN und weist auf die besondere Bedeutung der *Monge*-Matrizen für die Transportoptimierung hin.

**Satz 2.10**

Ist die zum klassischen Transportproblem **KTP** gehörige Kostenmatrix  $C$  eine *Monge*-Matrix, dann liefert die Nordwesteckenregel stets einen optimalen Transportplan.

Damit lassen sich klassische Transportprobleme in linearer Zeit lösen, wenn die Kostenmatrix eine *Monge*-Matrix ist. Die doch recht speziell erscheinende *Monge*-Eigenschaft ist für viele, auch praktisch relevante Sachverhalte erfüllt:

- Gegeben sei ein konvexes Polygon mit  $m + n$  Eckpunkten. Ein beliebiger Eckpunkt sei mit  $A_1$  bezeichnet. Danach werden allen weiteren  $m - 1$  Eckpunkte in Uhrzeigerichtung die Bezeichnung  $A_2, A_3, \dots, A_m$  zugeordnet. Die verbleibenden  $n$  Eckpunkte erhalten gegen den Uhrzeigersinn die Bezeichnungen  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .

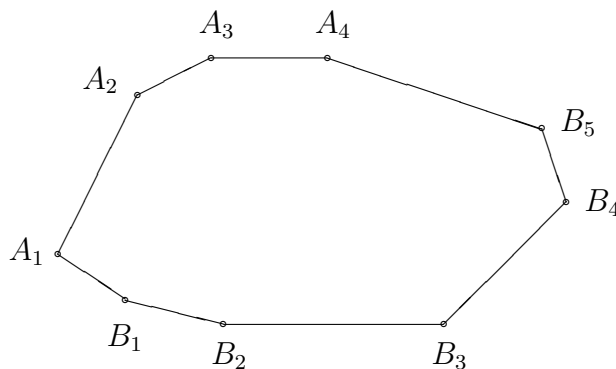


Abbildung 2.3: Polygonzug:  $m = 4, n = 5$

Die Zahlen  $c_{ij} = d(A_i, B_j)$ ,  $(i, j) \in N$ , sollen den euklidischen Abstand von  $A_i$  nach  $B_j$  angeben. Betrachtet man nun beispielsweise das Sehnenviereck mit den Eckpunkten  $A_2, A_3, B_1$  und  $B_2$ , dann ist klar, dass die Summe der Seitenlängen  $c_{21} + c_{32}$  echt kleiner als die Summe der Längen der Diagonalen  $c_{22} + c_{31}$  ist. Damit ist die entsprechende *Monge*-Eigenschaft erfüllt. Analog kann man die Betrachtungen für alle Sehnenvierecke mit den Eckpunkten  $A_i, A_{i+1}, B_j$  und  $B_{j+1}$ ,  $i = 1, \dots, m - 1$ ,  $j = 1, \dots, n - 1$ , durchführen. Damit wird klar, dass die Matrix  $C$  mit den euklidischen Abständen als Einträge eine *Monge*-Matrix ist.

- Alle Ausgangs- und Bedarfsorte befinden sich auf einer Linie, zum Beispiel an den Zufahrten einer Autobahn. Die Lage der Orte kann durch eindimensionale Koordinaten erfasst werden. Diese seien mit  $d_{A_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , für die Ausgangsorte und mit  $d_{B_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , für die Bedarfsorte bezeichnet. Die Nummerierung sei so vorgenommen, dass  $d_{A_1} \leq d_{A_2} \leq \dots \leq d_{A_m}$  und  $d_{B_1} \leq d_{B_2} \leq \dots \leq d_{B_n}$  gilt. Die Entfernungsmatrix  $C$  mit den Einträgen  $c_{ij} = |d_{A_i} - d_{B_j}|$ ,  $(i, j) \in N$ , ist eine *Monge*-Matrix.
- Eine Matrix  $C$  heißt *biproportional*, wenn  $c_{ij} = p_i q_j$ ,  $(i, j) \in N$ , gilt. Bei einer gegenläufigen Sortierung  $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_m$ ,  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$ , erfüllt die biproportionale Matrix die *Monge*-Eigenschaft.

Nach der Behandlung der Zuordnungsprobleme wird ein praktisches Anwendungsbeispiel mit einer biproportionalen Kostenmatrix aufgezeigt.

Einen umfassenden Überblick zur Bedeutung der *Monge*-Matrizen für die Optimierung findet man in [BuKliRu96].

Für ein klassisches Transportproblem mit nichtnegativer Kostenmatrix  $C$  sei ein optimaler Transportplan  $x^0$  mit Basis  $B$ , die zugehörigen Potentiale (duale Optimallösung) und die minimalen Kosten  $z_{\min}$  bekannt.

Das Angebot eines Erzeugers  $A_k$  und die Nachfrage eines Verbrauchers  $B_l$  erhöhe sich um jeweils  $t$  Mengeneinheiten. Nach Bemerkung 2.9 ändern sich die minimalen Gesamtkosten wie folgt:

$$z_{\min}(t) = z_{\min} + t(u_k^0 + v_l^0), \quad t \in T.$$

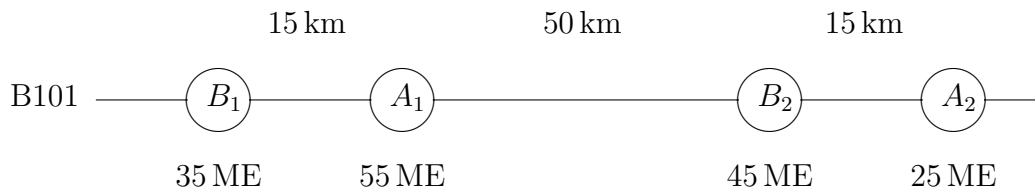
Dabei ist  $T$  die Menge aller Parameter, für welche die Basis  $B$  auch bei den geänderten Vorrats- und Bedarfsmengen zulässig bleibt. Wegen  $0 \in T$  ist  $T$  nicht leer.

Gilt  $u_k^0 + v_l^0 < 0$ , dann fallen die minimalen Gesamtkosten für alle  $t \in T$  mit  $t > 0$ , obwohl alle Kostenkoeffizienten nichtnegativ sind und sich die insgesamt zu transportierende Menge um  $t$  erhöht hat. In diesem Fall kann man zu recht von einem *Paradoxon* sprechen.

Das folgende kleine Beispiel soll diesen Sachverhalt veranschaulichen. Ein ähnliches Beispiel kann man in [BeDe94] nachlesen.

### Beispiel 2.6

An der Bundesstraße B 101 befinden sich zwei Kalkwerke  $A_1$  und  $A_2$ . Die mit Kalk zu beliefernden Baustellen  $B_1$  und  $B_2$  liegen gleichfalls an der B 101. Die Entfernungen der Orte, die Kapazitäten der Kalkwerke und der Bedarf der Baustellen sind der folgenden Skizze zu entnehmen:



Die Transportkosten je Mengeneinheit betragen für jeden gefahrenen Kilometer  $10 \text{ €}$ .

Die Datentabelle des zugehörigen klassischen Transportproblems hat die folgende Gestalt:

$c_{ij}$	1	2	$a_i$
1	150	500	55
2	800	150	25
$b_j$	35	45	

Die Kostenmatrix  $C$  ist eine MONGE-Matrix. Damit liefert die Nordwesteckenregel einen optimalen Transportplan, der in der folgenden linken Tabelle angegeben ist. Die beiden anderen Tabellen zeigen die Berechnung der Potentiale und die Optimalitätsindikatoren.

$x_{ij}^0$	1	2	$a_i$
1	35	20	55
2		25	25
$b_j$	35	45	

$u_i + v_j$	1	2	$u_i$
1	150	500	0
2	-200	150	-350
$v_j$	150	500	

$c'_{ij}$	1	2
1	0	0
2	1000	0

Die Gesamtkosten für den optimalen Transportplan betragen  $19.000 \text{ €}$ .

Für das freie Feld  $(2, 1)$  gilt  $u_2 + v_1 = -200 < 0$ . Damit sind die Voraussetzungen für das Auftreten eines Paradoxons erfüllt.



Auf der Baustelle  $B_1$  werden nun zusätzlich 5 Mengeneinheiten Kalk benötigt. Die Bereitstellung der zusätzlichen Menge an Kalk sei nur im Kalkwerk  $A_2$  möglich. Würde man diese zusätzlichen 5 Mengeneinheiten direkt von  $A_2$  nach  $B_1$  liefern, dann müsste dafür der längste Transportweg in Kauf genommen werden und die Zusatzkosten betragen 4.000 €. Die folgende Tabelle enthält für das parametrische Transportproblem mit der variierten Vorratsmenge  $a_2 = 25 + t$  und Bedarfsmenge  $b_1 = 35 + t$  jeweils einen optimalen Transportplan für alle Parameter  $t \in [-25; 20]$ :

$x_{ij}^0(t)$	1	2	$a_i$
1	$35 + t$	$20 - t$	55
2		$25 + t$	$25 + t$
$b_j$	$35 + t$	45	

Für die minimalen Gesamtkosten gilt  $z_{\min}(t) = 19000 - 200t$ . Für  $t = 5$  erhält man damit tatsächlich eine Minderung der Gesamtkosten um 1.000 €. Dabei werden auf den beiden kürzesten Verbindungen jeweils 5 Mengeneinheiten mehr und auf der längeren Verbindung von  $A_1$  nach  $B_2$  genau 5 Mengeneinheiten weniger transportiert.

Treten bei einem klassischen Transportproblem degenerierte Basislösungen auf, dann kann der Effekt eintreten, das mehrfach hintereinander verschiedene Basislösungen erzeugt werden, die den gleichen Transportplan beschreiben. Auch kann eine degenerierte Basislösung optimal sein, obwohl einige Optimalitätsindikatoren negativ sind. Im Folgenden wird eine Variante formuliert, bei der man den beschriebenen Effekten entgehen kann.

Gegeben sei ein klassisches Transportproblem KTP mit den ganzzahligen Vorratsmengen  $a_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und ganzzahligen Bedarfsmengen  $b_j \in \mathbb{N}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Die insgesamt zu transportierende Menge sei mit  $D$  bezeichnet. Es gilt  $D = \sum_{i=1}^m a_i \in \mathbb{N}$ .

Mit KTP-ND sei ein klassisches Transportproblem mit gleicher Kostenmatrix  $C$  und den Vorrats- und Bedarfsmengen

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_i &= a_i, & i &= 1, \dots, m-1 \\
 \tilde{a}_m &= a_m + 1 \\
 \tilde{b}_j &= b_j + \frac{1}{n}, & j &= 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

bezeichnet. Für die Gesamttransportmenge  $\tilde{D}$  gilt  $\tilde{D} = D + 1$ .

Für nichtleere Indexmengen  $I_1 \subset \{1, \dots, m\}$  und  $J_1 \subset \{1, \dots, n\}$  gilt stets  $\sum_{i \in I_1} a_i \in \mathbb{N}$  und  $\sum_{j \in J_1} b_j \notin \mathbb{N}$ . Damit besitzt das klassische Transportproblem KTP-ND nach Satz 2.7 keine degenerierten Basislösungen.

Der folgende Satz zeigt, wie man das zugeordnete klassische Transportproblem KTP-ND zur Lösung eines eventuell stark degenerierten klassischen Transportproblems KTP nutzen kann.

### Satz 2.11

Es sei  $B$  die Menge der besetzten Felder eines optimalen Transportplans  $\tilde{x}^0$  (Basislösung) des klassischen Transportproblems KTP-ND. Der Transportplan  $x^0$  mit der gleichen Basis  $B$  für das klassische Transportproblem KTP ist zulässig und damit auch optimal.

Hat man mit Hilfe von KTP-ND eine Menge von besetzten Felder  $B$  bestimmt, die einen optimalen Transportplan anzeigen, dann muss man nur noch  $x_{ij} = 0$ ,  $(i,j) \in N \setminus B$ , fixieren und die Werte  $x_{ij}$ ,  $(i,j) \in B$ , analog Satz 2.6 berechnen, um einen zulässigen Transportplan zu erhalten.

Der Nachteil der Vorgehensweise liegt darin begründet, dass man in der Tabelle der Restriktionen statt mit ganzzahligen Daten nun mit rationalen Daten operieren muss und sich auf diese Art einen höheren Speicherplatzbedarf zur Datenerfassung und Berechnung der Variablenwerte einhandelt.

### Beispiel 2.7

Gegeben ist die Datentabelle eines klassischen Transportproblems, bei dem jede Basislösung degeneriert ist:

$c_{ij}$	1	2	3	$a_i$
1	4	3	7	6
2	3	6	2	3
$b_j$	3	3	3	

Die folgenden beiden Tabellen zeigen einen optimalen Transportplan des zugeordneten klassischen Transportproblems und die Optimalitätsindikatoren:

$\tilde{x}_{ij}^0$	1	2	3	$\tilde{a}_i$	$c'_{ij}$	1	2	3
1	$2\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{3}$		6	1	0	0	4
2	$\frac{2}{3}$		$3\frac{1}{3}$	4	2	0	4	0
$\tilde{b}_j$	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$					

Zur Bestimmung eines optimalen Transportplans für das Ausgangsproblem werden zuerst die freien Felder durch die Belegung  $x_{13}^0 = x_{22}^0 = 0$  gesperrt.

$x_{ij}^0$	1	2	3	$a_i$
1			–	6
2		–		3
$b_j$	3	3	3	

Jetzt können als erstes die Werte  $x_{12} = 3$  und  $x_{23} = 3$  berechnet werden. Mit diesen Festlegungen erhält man schließlich  $x_{11} = 6 - 3 = 3$  und  $x_{21} = 3 - 3 = 0$ . In der folgenden Tabelle sind die Werte aller Basisvariablen komplett eingetragen.

$x_{ij}^0$	1	2	3	$a_i$
1	3	3		6
2	0		3	3
$b_j$	3	3	3	

Zu beachten ist, dass die Komponenten von  $x^0$  nicht einfach durch Auf- oder Abrunden der entsprechenden Komponenten von  $\tilde{x}^0$  entstehen. Dies ist bei den Feldern der ersten Spalte zu beobachten.

Ein Spezialfall des klassischen Transportproblems, bei der jede Basislösung maximal degeneriert ist, wird in dem nun folgenden Kapitel behandelt.

## 2.2 Das lineare Zuordnungsproblem

Die eigentlich diskrete Optimierungsaufgabe, die in diesem Abschnitt behandelt werden soll, ist allgemein unter dem Namen *lineares Zuordnungsproblem* bekannt. Sie lässt sich, wie gleich zu sehen sein wird, als spezielles klassisches Transportproblem formulieren. Für sie wurde in [Kuhn55] ein Lösungsverfahren entwickelt, das auf einem von dem ungarischen Mathematiker KÖNIG bewiesenen Satz der Graphentheorie beruht. Deshalb wird dieser Algorithmus auch als *Ungarische Methode* bezeichnet.

### 2.2.1 Modelle und Eigenschaften

Ein lineares Zuordnungsproblem entsteht zum Beispiel durch die mathematische Modellierung der folgenden Problemsituation:

Zur Erledigung von  $n$  verschiedenen Aufträgen  $A_i$  stehen  $n$  Maschinen  $B_j$  zur Verfügung, von denen jede zur Erledigung jedes Auftrages eingesetzt werden kann. Ist für jedes Paar  $(i, j)$  der Aufwand  $c_{ij}$  bekannt, der beim Einsatz der Maschine  $B_j$  zur Erledigung des Auftrages  $A_i$  entsteht, dann soll eine solche Zuordnung je einer Maschine zu jedem Auftrag ermittelt werden, für welche die Aufwandssumme minimal ist.

Die beschriebenen Aufwandsgrößen lassen sich in einer quadratischen Matrix  $C$  anordnen, deren Felder durch die Menge  $N = \{(i, j) \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n\}$  erfasst werden.

#### Definition 2.5

Eine Auswahl von Elementen einer Matrix  $C$  heißt *unabhängig*, wenn in jeder Zeile und in jeder Spalte der Matrix  $C$  höchstens eines der ausgewählten Elemente steht.

In einer quadratischen Matrix der Ordnung  $n$  existieren maximal  $n$  unabhängige Elemente. Ist  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  eine beliebige Permutation der Zahlen  $\{1, 2, \dots, n\}$ , dann bilden die Elemente  $c_{1j_1}, c_{2j_2}, \dots, c_{nj_n}$  eine Auswahl von  $n$  unabhängigen Elementen der Matrix  $C$ .

Unter dem linearen Zuordnungsproblem versteht man die Bestimmung von  $n$  unabhängigen Elementen einer quadratischen Matrix  $C$ , so dass deren Summe minimal ausfällt.

Es sei  $S_n$  die Menge aller Permutationen der Zahlen  $\{1, \dots, n\}$ . Das Zuordnungsproblem kann durch das folgende diskrete Optimierungsmodell ausgedrückt werden:

$$z = \sum_{i=1}^n c_{ij_i} \longrightarrow \min \quad (2.28)$$

$$(j_1, \dots, j_n) \in S_n$$

Die Permutationsgruppe  $S_n$  besitzt genau  $n!$  Elemente. Das formale Auswerten aller Zuordnungsmöglichkeiten kann kein vernünftiger Lösungsweg sein.

Eine andere mathematische Formulierung erhält man, wenn für jedes Paar  $(i, j)$  die folgenden binären Variablen eingeführt werden:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Auftrag } A_i \text{ wird Maschine } B_j \text{ zugeordnet} \\ 0, & \text{anderenfalls} \end{cases} \quad (2.29)$$

Eine derartige Matrix  $X$  repräsentiert genau dann eine *zulässige Zuordnung*, wenn sich in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Eintrag mit dem Wert Eins befindet. Das lässt sich mit den Restriktionssystem des klassischen Transportproblems bewerkstelligen, indem die Vorratsmengen  $a_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , und die Bedarfsmengen  $b_j = 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ , gewählt werden.

**Modell ZOP** (Lineares Zuordnungsproblem):

$$\begin{aligned}
 z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\longrightarrow \min \\
 \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, & \quad i = 1, \dots, n \\
 \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, & \quad j = 1, \dots, n \\
 x_{ij} \geq 0, & \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

In der vorliegenden Formulierung ist (2.30) tatsächlich ein Spezialfall des klassischen Transportproblems KTP. Allerdings sind die in (2.29) beschriebenen Forderungen nicht berücksichtigt worden.

### Satz 2.12

Jede zulässige Basislösung von ZOP erfüllt zugleich die Bedingungen (2.29). Genau  $n$  der  $2n - 1$  Basisvariablen besitzen den Wert Eins, alle übrigen Variablen sind Null.

Die Aussage lässt sich sofort aus der totalen Unimodularität der Restriktionsmatrix und den oberen Schranken  $x_{ij} \leq 1$ ,  $(i, j) \in N$ , ableiten.

Jede zulässige Basislösung des linearen Zuordnungsproblems besitzt den größtmöglichen Degenerationsgrad. Stets haben  $n - 1$  der  $2n - 1$  Basisvariablen den Wert Null. Damit ist die Anwendung des in Abschnitt 2.1.4 beschriebenen primalen Lösungsverfahrens nicht unbedingt zu empfehlen, da sehr oft beim Basiswechsel nur eine weitere Basisdarstellung zum gleichen Zuordnungsplan erzeugt wird.

Vor der Behandlung eines passenden Lösungsverfahrens soll noch ein Beispiel aus der Polygraphie (siehe dazu auch [Mau82]) angegeben werden, dessen Lösung recht einfach ist.

### Beispiel 2.8

Eine Druckerei hat in einer Schicht  $n$  Druckaufträge im Umfang von je  $p_i$  Bogen (Vielfache von 1000) auf den vorhandenen  $n$  Druckautomaten zu realisieren, deren spezifischer Zeitaufwand mit  $q_j$  Minuten je 1000 Bogen bekannt ist. Die Fertigungszeiten  $c_{ij}$  für die Realisierung des Auftrages  $i$  auf dem Druckautomaten  $j$  berechnet sich als Produkt von Auftragsvolumen und spezifischem Zeitaufwand. Demzufolge gilt  $c_{ij} = p_i q_j$ .

Die Matrix der Fertigungszeiten  $C$  ist biproportional. Sie erfüllt die *Monge*-Eigenschaft, wenn die Auftragsvolumen  $p_i$  und spezifischen Zeitaufwänden  $q_j$  gegenläufig sortiert werden (siehe dazu Abschnitt 2.1.5). Dann liefert aber die Nordwesteckenregel eine Optimallösung. Bei deren Anwendung auf das lineare Zuordnungsproblem wird die  $n$ -te Einheitsmatrix erzeugt. Damit ist auch klar, dass man zur Erzeugung dieser optimalen Zuordnung die Matrix der Fertigungszeiten gar nicht berechnen muss.

### 2.2.2 Ungarische Methode

In diesem Abschnitt wird ein Lösungsverfahren vorgestellt, das in die Kategorie der primal-dualen Lösungsverfahren für lineare Optimierungsprobleme eingeordnet werden kann.

Die zum linearen Zuordnungsproblem (2.30) gehörige Dualaufgabe lautet

$$\begin{aligned} Z_D &= \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j \longrightarrow \max \\ u_i + v_j &\leq c_{ij}, \quad (i, j) \in N \\ u_i, v_j &\text{ beliebig, } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Eine zulässige Lösung von (2.30) und eine zulässige Lösung von (2.31) sind genau dann optimal, wenn die aus dem Satz vom komplementären Schlupf resultierenden Optimalitätsbedingungen

$$\begin{aligned} u_i + v_j < c_{ij} &\implies x_{ij} = 0 \\ x_{ij} > 0 &\implies u_i + v_j = c_{ij} \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Die *Ungarische Methode* beginnt mit einer zulässigen Lösung der Dualaufgabe. Danach wird unter Einhaltung der Optimalitätsbedingungen eine nichtnegative Lösung der primalen Aufgabe gesucht, die möglichst viele ihrer Nebenbedingungen erfüllt. Findet man dabei eine zulässige Zuordnung, dann liegt gleichzeitig eine optimale Zuordnung vor. Anderenfalls schließen sich weitere Iterationen an, die sich aus einer Korrektur der dualen Lösung und der erneuten Suche einer Lösung des primalen Problems unter Einhaltung der Optimalitätsbedingungen zusammensetzen.

Für die Suche einer zulässigen Zuordnung wird die in (2.10) beschriebene *reduzierte* Matrix  $\bar{C}$  mit  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ ,  $(i, j) \in N$ , verwendet. Für Variablenwerte  $x_{ij} > 0$  kommen wegen  $u_i + v_j = c_{ij}$  damit nur Felder mit  $\bar{c}_{ij} = 0$  in Frage. Damit entspricht die Suche einer zulässigen Zuordnung der Bestimmung der Maximalzahl *unabhängiger* Nulleinträge der reduzierten Kostenmatrix  $\bar{C}$ .

Als Startlösung des dualen Problems wird die bereits im Abschnitt 2.1.2 dargestellte Anfangsreduktion

$$\begin{aligned} u_i^0 &= \min_{j=1, \dots, n} c_{ij}, \quad i = 1, \dots, n \\ v_j^0 &= \min_{i=1, \dots, n} (c_{ij} - u_i^0), \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

verwendet. Die Matrix  $C^1$  mit  $c_{ij}^1 = c_{ij} - (u_i^0 + v_j^0)$ ,  $(i, j) \in N$ , ist nichtnegativ und besitzt in jeder Zeile und in jeder Spalte mindestens ein Nullelement. Durch  $\omega_0 = \sum_{i=1}^m u_i^0 + \sum_{j=1}^n v_j^0$  wird eine erste untere Schranke für die Gesamtkosten einer zu bestimmenden minimalen Zuordnung berechnet.

Die Bestimmung der Maximalzahl unabhängiger Nullelemente einer sukzessive erzeugten nichtnegativen quadratischen Matrix  $C^p$ ,  $p \in \{1, 2, \dots\}$ , wird durch den folgenden Auswahlalgorithmus realisiert, dessen Beschreibung und Begründung man u.a. in [Scho76] nachlesen kann. Dazu werden die Elemente  $c_{ij}^p$  der Matrix  $C^p$  in einer Tabelle angeordnet, die noch um eine Zeile  $n+1$  für Spaltenmarkierungen  $\nu_j$  und um eine Spalte  $n+1$  für Zeilenmarkierungen  $\mu_i$  erweitert wird.

**Auswahlalgorithmus:**

## 1. Bestimmung einer ersten Zuordnung

Es werden der Reihe nach alle Felder  $(i, j) \in N$  der Tabelle mit  $c_{ij}^p = 0$  betrachtet. Enthält weder die Zeile  $i$  noch die Spalte  $j$  eine markierte Null, dann wird die Null im Feld  $(i, j)$  markiert.

## 2. Markierungsprozess

## (a) Erste Zeilenmarkierungen

Alle Zeilen  $i$ , die keine markierte Null enthalten, werden durch  $\mu_i = 0$  markiert.

Abbruchkriterium: Gibt es keine derartigen Zeilen, dann wurden genau  $n$  unabhängige Nullelemente von  $C^p$  markiert.

## (b) Markierung von Spalten

Der Reihe nach werden alle markierten Zeilen betrachtet. Enthält die markierte Zeile  $i$  Elemente  $c_{ij}^p = 0$ , deren Spalte  $j$  nicht markiert ist, dann werden diese Spalten durch  $\nu_j = i$  markiert.

Gehe zu Schritt 3(a), wenn eine Spalte  $j_0$  markiert wurde, die keine markierte Null enthält.

## (c) Markierung von Zeilen

Der Reihe nach werden alle markierten Spalten betrachtet. Enthält die markierte Spalte  $j$  im Feld  $(i, j)$  eine markierte Null, wobei die Zeile  $i$  nicht markiert ist, dann wird Zeile  $i$  durch  $\mu_i = j$  markiert.

Abbruchkriterium: Wurden keine Zeilen neu markiert, dann liegt für die Matrix  $C^p$  eine maximale Anzahl unabhängiger Nullelemente vor.

Anderenfalls gehe zu Schritt 2(b).

## 3. Verbesserungsschritt

(a) Setze  $j = j_0$ (b) Setze  $i = \nu_j$  und markiere die Null im Feld  $(i, j)$ .(c) Gilt  $\mu_i = 0$ , dann ist der Verbesserungsschritt abgeschlossen. Lösche alle Markierungen für  $\mu_i$  und  $\nu_j$  und gehe zu Schritt 2.

Anderenfalls setze  $j = \mu_i$  und entferne die Markierung an der Null im Feld  $(i, j)$ . Gehe zu Schritt 3(b).

Endet der Auswahlalgorithmus im Schritt 2(c), dann besitzt die Matrix  $C^p$  weniger als  $n$  unabhängige Nullelemente. Um die Anzahl der unabhängigen Nullelemente zu erhöhen, muss der Prozess der Markierung von Zeilen und Spalten fortgesetzt werden. Dazu bedarf es einer Korrektur der Matrix  $C^p$ . Es muss eine Matrix  $C^{p+1}$  erzeugt werden, die mindestens ein neues Nullelement besitzt. Dies entspricht einer Abänderung der Dualvariablen, wobei darauf zu achten ist, dass die duale Zulässigkeit nicht verloren geht.

Die Anzahl der mit dem Auswahlalgorithmus für die nichtnegative Matrix  $C^p$  erzeugten unabhängigen Nullelemente sei  $k_p$  und es gelte  $k_p < n$ . Mit Hilfe der vorliegenden aktuellen Markierungen werden folgende Mengen gebildet:

$$I_p = \{i \mid \text{Zeile } i \text{ ist markiert}\} \quad J_p = \{j \mid \text{Spalte } j \text{ ist markiert}\}$$

Die nichtmarkierten Zeilen und Spalten werden mit  $\bar{I}_p$  und  $\bar{J}_p$  bezeichnet.

Wegen  $k_p < n$  gilt  $I_p \times \bar{J}_p \neq \emptyset$ . Aus dem Markierungsprozess des Auswahlalgorithmus folgt, dass für Felder  $(i, j) \in (I_p \times \bar{J}_p)$  stets  $c_{ij}^p > 0$  gilt. Sie enthalten demzufolge keine Nullelemente. Felder  $(i, j) \in (\bar{I}_p \times J_p)$  können höchstens unmarkierte Nullelemente enthalten.

Um die Schranke für den Zielfunktionswert nur minimal zu verschlechtern, wird die Zahl

$$h_p = \min_{(i,j) \in (I_p \times \bar{J}_p)} c_{ij}^p \quad (2.32)$$

berechnet und die Dualvariablen um die folgenden Größen korrigiert:

$$u_i^p = \begin{cases} h_p, & i \in I_p \\ 0, & i \in \bar{I}_p \end{cases} \quad v_j^p = \begin{cases} -h_p, & j \in J_p \\ 0, & j \in \bar{J}_p \end{cases} \quad (2.33)$$

Sie besitzen dann die Werte  $u_i = \sum_{k=0}^p u_i^k$ ,  $i = 1, \dots, n$ , und  $v_j = \sum_{k=0}^p v_j^k$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Die Reduktion der Matrix erfolgt wie üblich durch  $c_{ij}^{p+1} = c_{ij}^p - (u_i^p + v_j^p)$ ,  $(i, j) \in N$ , wobei hier speziell  $\omega_p = h_p(n - k_p)$  gilt.  $C^{p+1}$  entsteht konkret durch die folgende Vorschrift:

$$c_{ij}^{p+1} = \begin{cases} c_{ij}^p - h_p, & (i, j) \in (I_p \times \bar{J}_p) \\ c_{ij}^p + h_p, & (i, j) \in (\bar{I}_p \times J_p) \\ c_{ij}^p, & (i, j) \in (I_p \times J_p) \cup (\bar{I}_p \times \bar{J}_p) \end{cases} \quad (2.34)$$

$C^{p+1}$  ist ebenfalls eine nichtnegative Matrix, wobei die Menge  $I_p \times \bar{J}_p$  mindestens ein neues Nullelement besitzt. Ausgehend von den Markierungen zu den bisherigen  $k_p$  unabhängigen Nullelementen kann jetzt der Markierungsprozess mit der Neumarkierung wenigstens einer Spalte fortgesetzt werden. Für die nächste Iteration kann sich damit auch die maximale Anzahl unabhängiger Nullelemente nicht verringern, womit  $k_{p+1} \geq k_p$  gilt.

In dem folgenden Schema wird der gesamte Algorithmus formal erfasst.

### Ungarische Methode

1. Erzeuge die reduzierte Matrix  $C^1$ .  
Setze  $p = 1$  und  $z_p = \omega_0$ .
2. Wende den Auswahlalgorithmus auf  $C^p$  an.  
Für  $p > 1$  kann mit Schritt 2(b) begonnen werden.  
Der Auswahlalgorithmus markiert  $k$  unabhängige Nullelemente.
3. Abbruch: Im Fall  $k = n$  liegt eine optimale Zuordnung mit  $z_{\min} = z_p$  vor.
4. Erzeuge die reduzierte Matrix  $C^{p+1}$ .  
Setze  $z_{p+1} = z_p + h_p(n - k_p)$ .
5. Setze  $p := p + 1$  und gehe zu Schritt 2.

**Beispiel 2.9**

Sieben gleichartige Baustellenkräne müssen ihre Einsatzorte wechseln und von ihren Standorten  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , zu den künftigen Baustellen  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, 7$ , gebracht werden. Die folgende Tabelle enthält die Entfernung in km:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$B_7$
$A_1$	335	110	225	220	360	310	150
$A_2$	80	60	210	90	75	130	115
$A_3$	215	405	305	195	280	310	200
$A_4$	175	165	290	50	75	45	50
$A_5$	65	120	195	95	110	100	110
$A_6$	20	70	205	190	55	35	45
$A_7$	205	210	185	230	200	290	280

Als Optimierungsziel wird die Minimierung der Summe der insgesamt zurückzulegenden Entfernungen festgelegt.

Die Anfangsreduktion ist in der folgenden Tabelle festgehalten und liefert die erste untere Schranke  $z_1 = \omega_0 = 700$ .

$c_{ij}^1$	1	2	3	4	5	6	7	$u_i$
1	225	0	115	110	235	200	35	110
2	20	0	150	30	0	70	50	60
3	20	210	110	0	70	115	0	195
4	130	120	245	5	15	0	0	45
5	0	55	130	30	30	35	40	65
6	0	50	185	170	20	15	20	20
7	20	25	0	45	0	105	90	185
$v_j$	0	0	0	0	15	0	5	

Im ersten Schritt des Auswahlalgorithmus kann man der Reihe nach in den folgenden Feldern Nullelemente von  $C^1$  mit einem Stern markieren:  $(1, 2)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 6)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(7, 3)$ . Da nur ein unabhängiges Nullelement in Zeile 6 fehlt, wird diese mit  $\mu_6 = 0$  markiert. Ausgehend von Zeile 6 lässt sich dann Spalte 1 mit  $\nu_1 = 6$  markieren. Mit Spalte 1 kann wegen der markierten Null in Zeile 5 die Markierung  $\mu_5 = 1$  erfolgen. Weitere Markierungen sind nicht möglich. Damit besitzt  $C^1$  maximal  $k_1 = 6$  unabhängige Nullelemente.

Die folgende Tabelle weist alle bisherigen Eintragungen auf:

$c_{ij}^1$	1	2	3	4	5	6	7	$\mu_i$
1	<i>225</i>	0*	115	110	235	200	35	
2	<i>20</i>	0	150	30	0*	70	50	
3	<i>20</i>	210	110	0*	70	115	0	
4	<i>130</i>	120	245	5	15	0*	0	
5	0*	<b>55</b>	<b>130</b>	<b>30</b>	<b>30</b>	<b>35</b>	<b>40</b>	1
6	0	<b>50</b>	<b>185</b>	<b>170</b>	<b>20</b>	<b>15</b>	<b>20</b>	0
7	<i>20</i>	25	0*	45	0	105	90	
$\nu_j$	6							

Die Einträge zu den markierten Zeilen und nichtmarkierten Spalten wurden **fett** und die zu den markierten Spalten und nichtmarkierten Zeilen *kursiv* gedruckt.



Das zu berechnende Minimum  $h_1 = 15$  erhält man aus den Feldern zu den markierten Zeilen 5 und 6 und den nichtmarkierten Spalten 2 bis 7. Entsprechend werden die Dualvariablen  $u_5 = 80$ ,  $u_6 = 35$  und  $v_1 = -15$  korrigiert. Die untere Schranke für den Zielfunktionswert steigt auf  $z_2 = 700 + 15 \cdot (7 - 6) = 715$ .

Die folgende Tabelle zeigt die reduzierte Matrix  $C^2$  mit dem neuen Nullelement in Feld (6,6), das die Fortsetzung des Markierungsprozesses ermöglicht. Mit Hilfe von Zeile 6 lässt sich nun Spalte 6 mit  $\nu_6 = 6$  markieren. Mit Spalte 6 kann wegen der markierten Null in Zeile 4 die Markierung  $\mu_4 = 6$  erfolgen. Da sich in der nun markierten Zeile 4 ein nichtmarkiertes Nullelement in Spalte 7 finden lässt, wird diese Spalte mit  $\nu_7 = 4$  markiert.

$c_{ij}^2$	1	2	3	4	5	6	7	$\mu_i$
1	240	0*	115	110	235	200	35	
2	35	0	150	30	0*	70	50	
3	35	210	110	0*	70	115	0	
4	145	120	245	5	15	0*	0	6
5	0*	40	115	15	15	20	25	1
6	0	35	170	155	5	0	5	0
7	35	25	0*	45	0	105	90	
$\nu_j$	6					6	4	

Da Spalte 7 keine markierte Null enthält, kann die Anzahl der unabhängigen Nullelemente mit dem Verbesserungsschritt des Auswahlalgorithmus um Eins erhöht werden. Dazu wird zuerst die Null im Feld (4,7) mit einem Stern markiert, danach die Markierung der Null im Feld (4,6) gelöscht und zuletzt die Null im Feld (6,6) markiert.

In der letzten Tabelle sind 7 maximal mögliche unabhängige Nullelemente markiert. Damit liegt eine optimale Zuordnung vor.

$c_{ij}^2$	1	2	3	4	5	6	7	$\mu_i$
1	240	0*	115	110	235	200	35	
2	35	0	150	30	0*	70	50	
3	35	210	110	0*	70	115	0	
4	145	120	245	5	15	0	0*	
5	0*	40	115	15	15	20	25	
6	0	35	170	155	5	0*	5	
7	35	25	0*	45	0	105	90	
$\nu_j$								

Die konkrete Zuordnung für die Umsetzung der Baustellenkräne lautet wie folgt:  
 $A_1 \rightarrow B_2$     $A_2 \rightarrow B_5$     $A_3 \rightarrow B_4$     $A_4 \rightarrow B_7$     $A_5 \rightarrow B_1$     $A_6 \rightarrow B_6$     $A_7 \rightarrow B_3$   
 Insgesamt müssen die Kräne eine Strecke von 715 km zurücklegen.

Die *Ungarische Methode* ist eines der bekanntesten Verfahren des Operations Research und zugleich der erste polynomiale Algorithmus zur Lösung des linearen Zuordnungsproblems. Es ist möglich, den Algorithmus mit graphentheoretischen Hilfsmitteln so zu implementieren, dass die Komplexität  $\mathcal{O}(n^3)$  beträgt.

## 2.3 Offene Transportprobleme

In diesem Abschnitt werden Transportprobleme behandelt, deren Nebenbedingungen nicht ausschließlich wie beim bereits behandelten klassischen Transportproblem in Gleichungsform vorliegen. Damit muss auch nicht mehr eine Gleichgewichtsbedingung zwischen Gesamtbestand und Gesamtbedarf gefordert werden. Es wird das Ziel verfolgt, für die zu betrachtenden Probleme jeweils ein klassisches Transportproblem zuzuordnen, mit dessen Hilfe man einen optimalen Transportplan rekrutieren kann. Damit können die bereits beschriebenen effektiven Lösungsverfahren eingesetzt werden. Die ersten umfangreichen Darstellungen zu speziellen Standardproblemen findet man in [Appa73]. Die wesentlichen Standardmodelle werden hier anschließend ausführlich diskutiert. Eine mögliche Zusammenfassung all dieser Probleme in einem Modell kann man in [Bri74] nachlesen. Hier wird auf die sparsamere Version [Is82] näher eingegangen.

### 2.3.1 Standardmodelle

Nachfolgend werden offene Transportprobleme mit nur einem Restriktionstyp für die Anbieter beziehungsweise Nachfrager betrachtet. Begonnen wird mit dem wohl bekanntesten Problem, wo in jedem Bestimmungsort ein Bedarf zu befriedigen ist, jedoch der Gesamtbestand den Gesamtbedarf übersteigt. Damit können nicht alle Vorräte abtransportiert werden.

**Modell TP( $\leq, =$ ):** (Transportproblem mit Überschuss)

$$\begin{aligned}
 z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min \\
 \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i, & i = 1, \dots, m \\
 \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, & j = 1, \dots, n \\
 x_{ij} &\geq 0, & i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Ganz analog lässt sich ein Transportproblem mit Defizit TP( $=, \leq$ ) formulieren, bei dem der Gesamtbestand geringer als der Gesamtbedarf ist. Dieses Problem muss aber nicht extra besprochen werden, denn es kann durch Rollentausch von Ausgangs- und Bestimmungsorten in das Problem TP( $\leq, =$ ) überführt werden.

Analog zum klassischen Transportproblem lässt sich für das Problem TP( $\leq, =$ ) eine recht einfache Lösbarkeitsbedingung formulieren.

#### Satz 2.13

Das offene Transportproblem **TP( $\leq, =$ )** ist genau dann lösbar, wenn  $a_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $b_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , und  $\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$  gilt.

Für die weitere Behandlung wird wieder vorausgesetzt, dass Vorrats- und Bedarfsmengen positiv sind. Weiterhin gelte auch  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ , denn im Falle  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$  müsste der gesamte Vorrat abtransportiert werden und das betrachtete offene Transportproblem TP( $\leq, =$ ) entspräche dann bereits einem klassischen Transportproblem.

**Bemerkung 2.13**

Wegen der Kompaktheit des zulässigen Bereichs des offenen Transportproblems  $\text{TP}(\leq, =)$  sind keinerlei Voraussetzungen an die zugehörige Kostenmatrix  $C$  nötig. Analog Satz 2.2 kann man der Kostenmatrix  $C$  eine äquivalente Kostenmatrix  $\bar{C}$  mittels der Vorschrift  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - v_j$ ,  $(i, j) \in N$ , zuordnen. Die Zielfunktionswerte eines konkreten Transportplans bezüglich  $C$  und  $\bar{C}$  unterscheiden sich dann um die Konstante  $\omega = \sum_{j=1}^n v_j b_j$ .

Wählt man  $v_j^0 = \min_{i=1, \dots, m} c_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , dann entsteht eine äquivalente nichtnegative Kostenmatrix mit mindestens einem Nulleintrag in jeder Spalte.

Zur Lösung des offenen Transportproblems  $\text{TP}(\leq, =)$  wird ein fiktiver Verbraucher  $B_{n+1}$  mit dem Bedarf

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j \quad (2.36)$$

eingeführt. Die zur zusätzlichen Spalte im erweiterten Transportproblem gehörigen Variablen haben die Funktion, die in den Ausgangsorten verbleibenden überschüssigen Mengen aufzunehmen. Man kann sie als Schlupfvariable der zu den Vorratsmengen gehörenden Ungleichungen auffassen. Da keine Transportkosten auftreten, werden die neuen Transportverbindungen mit

$$c_{i,n+1} = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.37)$$

bewertet. Sollten in den Ausgangsorten Lagerkosten entstehen, so können die Bewertungskoeffizienten  $c_{i,n+1} = l_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , diese Kosten repräsentieren.

Nach diesen Vorüberlegungen lässt sich nun das folgende zum offenen Transportproblem  $\text{TP}(\leq, =)$  zugeordnete klassische Transportproblem **KTP**( $\leq, =$ ) formulieren:

$$\begin{aligned} \bar{z} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} y_{ij} &\longrightarrow \min \\ \sum_{j=1}^{n+1} y_{ij} = a_i, &\quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m y_{ij} = b_j, &\quad j = 1, \dots, n+1 \\ y_{ij} \geq 0, &\quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n+1 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die zugehörige Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist.

**Bemerkung 2.14**

Ist  $y_{ij}^0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ , ein optimaler Transportplan für das klassische Transportproblem **KTP**( $\leq, =$ ), dann ist  $x_{ij}^0 = y_{ij}^0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ein optimaler Transportplan des offenen Transportproblems  $\text{TP}(\leq, =)$ .

Die zu einem optimalen Transportplan  $y^0$  gefundenen Werte  $y_{ij}^0$ ,  $(i, j) \in N$ , das heißt die besetzten Felder zum Tableau der Ausgangsaufgabe, entsprechen den optimalen Transportmengen und die Größen  $y_{i,n+1}^0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , den verbliebenen Lagermengen.

Das folgende Beispiel zeigt eine Anwendung aus dem Gebiet der Finanzierung und verdeutlicht damit, dass Anwendungsaufgaben nicht unbedingt auf dem Bereich der Logistik beschränkt sein müssen.

**Beispiel 2.10**

Eine Immobilienfirma hat die Absicht, drei Wirtschaftsgebäude zu erwerben, die in unterschiedlichen Regionen liegen und zu unterschiedlichen Zwecken genutzt werden sollen. Die Erwerbskosten betragen 6, 10 beziehungsweise 14 Millionen €. Zur Finanzierung der Kosten wurden Verhandlungen mit drei Banken geführt, die bereit sind, Kredite in Höhe von maximal 16, 8 beziehungsweise 10 Millionen € zu gewähren. Auf Grund der verschiedenen Standortlagen und Nutzungszwecke haben die Kreditabteilungen beschlossen, unterschiedliche Zinssätze für die Finanzierung der verschiedenen Wirtschaftsgebäude einzuräumen. Die Zinssätze (in %) und die bereits genannten Geldmengen (in Millionen €) werden durch die folgende Tabelle wiedergegeben:

	Gebäude 1	Gebäude 2	Gebäude 3	
Bank 1	12	10	9	16
Bank 2	10	7	11	8
Bank 3	8	11	12	10
	6	10	14	

In welcher Weise sollte die Immobilienfirma die Kreditangebote nutzen, damit die Summe der zu leistenden Zinszahlungen minimal ausfällt? Ändert sich etwas an der gefundenen Splittung der Kredite, wenn Bank 3 ihre Zinssätze generell um 2% absenkt?

Die drei Banken bieten Kredite in der Gesamthöhe von 34 Millionen € an. Die Immobilienfirma benötigt die Summe von 30 Millionen €. Die Differenz von 4 Millionen € wird nicht benötigt und deshalb als Bedarf eines fiktiven vierten Wirtschaftsgebäudes aufgefasst. Da die nichtabgenommene Geldmenge nicht zu verzinsen ist, werden die fiktiven Zinsen mit 0% festgelegt. Die folgende Datentabelle beschreibt das zugeordnete klassische Transportproblem:

$c_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1	12	10	9	0	16
2	10	7	11	0	8
3	8	11	12	0	10
$b_j$	6	10	14	4	

Zur Bestimmung einer ersten zulässigen Lösung wird für dieses Beispiel die Spaltenminimumregel angewendet. Da die Einträge in der letzten Spalte zwangsweise erfolgen, aber dort alle Kosten gleich Null sind, tritt hier nicht der Effekt ein, das zuletzt Felder mit hohen Kosten besetzt werden.

$y_{ij}^0$	1	2	3	4	$a_i$
1		2	14	0	16
2		8			8
3	6			4	10
$b_j$	6	10	14	4	

Die erzeugte Basislösung ist degeneriert. Das besetzte Feld (1,4) weist der Basisvariablen  $y_{14}$  den Wert Null zu. Das Feld (1,4) ist auch zwingend zur Berechnung der Potentiale erforderlich. Streicht man dieses Feld gedanklich aus der Menge der besetzten Felder, dann fehlt eine Gleichung zur Bestimmung der Potentiale. Die Berechnung der Potentiale und der Optimalitätsindikatoren kann in den folgenden beiden Tabellen nachvollzogen werden.

$u_i + v_j$	1	2	3	4	$u_i$	$c'_{ij}$	1	2	3	4
1	8	10	9	0	0	1	4	0	0	0
2	5	7	6	-3	-3	2	5	0	5	3
3	8	10	9	0	0	3	0	1	3	0
$v_j$	8	10	9	0						

Damit stellt der erste zulässige Plan zugleich die eindeutige Optimallösung dar. Die Zuordnung der einzelnen Kredite zeigt die folgende Tabelle:

	Gebäude 1	Gebäude 2	Gebäude 3
Bank 1		2.000.000	14.000.000
Bank 2		8.000.000	
Bank 3	6.000.000		

Die Zinszahlungen erreichen dabei eine Höhe von 2.500.000€. Das entspricht einer durchschnittlichen Zinsrate von 8,33%. Ein Kreditangebot in Höhe von 4.000.000€ von der dritten Bank wird nicht nachgefragt.

Senkt die dritte Bank ihre Zinssätze generell um 2%, dann ist die vorliegende zulässige Lösung an Hand der geänderten Kostenmatrix ( $c_{31} = 6, c_{32} = 9, c_{33} = 10$ ) abermals auf Optimalität zu prüfen:

$u_i + v_j$	1	2	3	4	$u_i$	$c'_{ij}$	1	2	3	4
1	6	10	9	0	0	1	6	0	0	0
2	3	7	6	-3	-3	2	7	0	5	3
3	6	10	9	0	0	3	0	-1	1	0
$v_j$	6	10	9	0						

Die zulässige Basislösung wird nicht als optimal erkannt (Beachte: Bei Degeneration ist das Optimalitätskriterium nicht umkehrbar). Mit dem auszuwählenden freien Feld (3, 2) ergibt sich der in der nachfolgenden linken Tabelle dargestellte Austauschzyklus. Mit  $d = 2$  erhält man dann tatsächlich eine zulässige Lösung mit in der Summe geringeren Zinszahlungen.

$y_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$	$y_{ij}^o$	1	2	3	4	$a_i$
1		$2 - d$	14	$0 + d$	16	1			14	2	16
2		8			8	2		8			8
3	6	$d$		$4 - d$	10	3	6	2		2	10
$b_j$	6	10	14	4		$b_j$	6	10	14	4	

Die jetzt vorliegende zulässige Lösung ist optimal. Auf den Nachweis soll an dieser Stelle verzichtet werden. Bei Absenkung der Zinssätze in Bank 3 um 2% erhält man die folgende Splittung der Kredite:

	Gebäude 1	Gebäude 2	Gebäude 3
Bank 1			14.000.000
Bank 2		8.000.000	
Bank 3	6.000.000	2.000.000	

Die Änderung besteht darin, dass ein Teilbetrag in Höhe von 2.000.000€ für Gebäude 2 jetzt durch Bank 3 und nicht durch Bank 1 ausgereicht wird. Die Zinszahlungen betragen nur noch 2.360.000€, was einer durchschnittlichen Zinsrate von 7,87% entspricht.

Als zweites Standardmodell soll ein Transportproblem mit Mindestbedarf untersucht werden. Die Vorratsmengen in den Ausgangsorten seien vollständig abzutransportieren und in der Bestimmungsorten bestehe der Wunsch, einen gewissen Mindestbedarf zu befriedigen. Der Gesamtvorrat darf dabei den insgesamt zu befriedigenden Mindestbedarf nicht unterschreiten.

**Modell TP( $=, \geq$ )** (Transportproblem mit Mindestbedarf):

$$\begin{aligned}
 z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min \\
 \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, & i = 1, \dots, m \\
 \sum_{i=1}^m x_{ij} &\geq b_j, & j = 1, \dots, n \\
 x_{ij} &\geq 0, & i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Ganz analog kann man sich ein Transportproblem TP( $\geq, =$ ) mit Mindestkapazitäten in den Ausgangsorten vorstellen, bei dem ein vorgegebener Bedarf genau zu befriedigen ist. Dieses Problem muss nicht extra besprochen werden, denn es kann durch Rollentausch von Ausgangs- und Bestimmungsorten in das Problem TP( $=, \geq$ ) überführt werden.

Unter Vernachlässigung des praktischen Hintergrundes lassen sich die Lösbarkeitsbedingungen für das offene Transportproblem TP( $=, \geq$ ) etwas allgemeiner formulieren.

#### Satz 2.14

Das offene Transportproblem TP( $=, \geq$ ) ist genau dann lösbar, wenn  $a_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und  $\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n \max\{0, b_j\}$  gilt.

Für die Lösbarkeit ist es theoretisch unerheblich, ob einige der Mindestbedarfsgrößen negativ sind. Für die weitere Behandlung wird vorausgesetzt, dass die Vorratsmengen positiv sind und der Mindestbedarf nichtnegativ ist. Ein Mindestbedarf Null wird explizit nicht ausgeschlossen und ist auch praktisch relevant. Neben den schärferen Forderungen  $b_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , wird letztlich auch noch  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$  vorausgesetzt. Im Falle der Gleichheit wäre das zu betrachtende offene Transportproblem TP( $=, \geq$ ) bereits ein klassisches Transportproblem, da jeder Abnehmer nicht mehr als den Mindestbedarf erhalten kann.

#### Bemerkung 2.15

Wegen der Kompaktheit des zulässigen Bereichs des offenen Transportproblems TP( $=, \geq$ ) sind auch hier keinerlei Voraussetzungen an die zugehörige Kostenmatrix  $C$  nötig. Analog Satz 2.2 kann man der Kostenmatrix  $C$  eine äquivalente Kostenmatrix  $\bar{C}$  mittels der Vorschrift  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i$ ,  $(i, j) \in N$ , zuordnen. Die Zielfunktionswerte eines konkreten Transportplans bezüglich  $C$  und  $\bar{C}$  unterscheiden sich dann um die Konstante  $\omega = \sum_{i=1}^m u_i a_i$ . Wählt man  $u_i^0 = \min_{j=1, \dots, n} c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , dann entsteht eine äquivalente nichtnegative Kostenmatrix mit mindestens einem Nulleintrag in jeder Zeile.

Die Zuordnung eines klassischen Transportproblems ist für das offene Transportproblem  $\text{TP}(=, \geq)$  keineswegs trivial. Das formale Einführen von Überschussvariablen, welche die über den Mindestbedarf anzutransportierenden Mengen beschreiben, löst das Problem nicht. Die zu diesen Überschussvariablen gehörenden Spaltenvektoren der Restriktionsmatrix sind negative Einheitsvektoren. Sie lassen sich nicht in ein klassisches Transportproblem integrieren.

In dem nun zu beschreibenden klassischen Transportproblem wird für jeden Bestimmungsort der Mindestbedarf  $b_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , als Bedarf fixiert. Einem fiktiven Verbraucher  $B_{n+1}$  wird der in (2.36) ausgewiesene Bedarf zugeordnet. Er beschreibt hier die noch über den Mindestbedarf hinaus zu transportierende Menge  $\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ . Die zur zusätzlichen Spalte im erweiterten Transportproblem gehörigen Variablen haben die Funktion, diese über den Mindestbedarf hinaus zu transportierenden Mengen vorerst aufzunehmen. Eine vom Ausgangsort  $A_i$  kommende, dem fiktiven Bedarfsort  $B_{n+1}$  zugeordnete Transportmenge muss nun einem realen Bedarfsort  $B_j$  zugeordnet werden. Ein kostengünstiger Transport entsteht dann, wenn man die umzulegende Transportmenge dem Bedarfsort zuordnet, der ausgehend vom Bestimmungsort  $A_i$  die geringsten Kosten aufweist.

Deshalb ist zu jedem Ausgangsort  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ein Bestimmungsort  $B_{j_i}$  mit

$$c_{i,n+1} = c_{i,j_i} = \min_{j=1,\dots,n} c_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.40)$$

zuzuordnen. Sollte die Auswahl des Spaltenindex  $j_i$  nicht eindeutig sein, dann kann er unter den Kandidaten willkürlich gewählt werden.

Mit  $\mathbf{KTP}(=, \geq)$  werde jetzt das in (2.38) beschriebene klassische Transportproblem mit den durch (2.36) und (2.40) festgelegten Größen  $b_{n+1}$  und  $c_{i,n+1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , bezeichnet, welches dem offenen Transportproblem  $\text{TP}(=, \geq)$  zugeordnet wird. Es unterscheidet sich von dem zum offenen Transportproblem  $\text{TP}(\leq, =)$  zugeordneten klassischen Transportproblem  $\mathbf{KTP}(\leq, =)$  formal nur durch die Wahl der Bewertung der zusätzlichen Spalte.

Die Rechtfertigung der angeführten Plausibilitätserklärungen zur Konstruktion eines optimalen Transportplans für das Problem  $\text{TP}(=, \geq)$  liefert der folgende Satz, dessen Beweis in [Appa73] nachgelesen werden kann.

### Satz 2.15

Ist  $y_{ij}^0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ , ein optimaler Transportplan für das klassische Transportproblem  $\mathbf{KTP}(=, \geq)$ , dann ist

$$\left. \begin{aligned} x_{ij_i}^0 &= y_{ij_i}^0 + y_{i,n+1}^0 \\ x_{ij}^0 &= y_{ij}^0, \quad j = 1, \dots, n, j \neq j_i \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.41)$$

ein optimaler Transportplan des offenen Transportproblems  $\text{TP}(=, \geq)$ .

Die minimalen Gesamtkosten des für  $\mathbf{KTP}(=, \geq)$  erzeugten optimalen Transportplans  $y^0$  stimmen mit den Gesamtkosten des für  $\text{TP}(=, \geq)$  zugeordneten optimalen Transportplans  $x^0$  überein, das heißt, es gilt  $z(x^0) = \bar{z}(y^0)$ .

Zu einem Bestimmungsort  $B_l$  wird mehr als der Mindestbedarf  $b_l$  transportiert, wenn es in einem optimalen Transportplan  $y^0$  von  $\mathbf{KTP}(=, \geq)$  eine Zeile  $k$  gibt, für die  $y_{k,n+1}^0 > 0$  und  $j_k = l$  gilt.

Das folgende Beispiel zeigt eine Anwendung aus der Transportoptimierung, bei der es einerseits um die Maximierung einer Zielgröße geht und andererseits ein Mindestbedarf Null sein kann.

### Beispiel 2.11

Eine Firma besitzt drei Werke für die Produktion eines einzigen Produkts. Sie beliefert nur vier Großkunden. Der Ausstoss der drei Werke wird in der nächsten Periode 600, 800 beziehungsweise 400 Mengeneinheiten betragen. Allen Großkunden wünschen von der Produktion so viel wie möglich zu beziehen. Auf Grund vertraglicher Vereinbarungen wurden den Kunden 1, 2 und 3 mindestens 300, 400 beziehungsweise 300 Mengeneinheiten zugesichert. Diesbezügliche Vereinbarungen mit dem Kunden 4 gibt es nicht. Die folgende Tabelle gibt den spezifischen Gewinn der Firma in Geldeinheiten an, der aus dem Verkauf einer Mengeneinheit des Produktes an den Kunden  $j$  entsteht, wenn die Produktion ab Werk  $i$  geliefert wird:

	Kunde 1	Kunde 2	Kunde 3	Kunde 4
Werk 1	4	2	5	4
Werk 2	5	6	4	8
Werk 3	10	9	7	6

Das Management möchte die Verteilung der Produktion so vornehmen, dass der Gesamtgewinn maximal ausfällt.

Da für den Kunden 4 keine Vereinbarungen über einen Mindestbedarf vorliegen, wird  $b_4 = 0$  gesetzt. Die durch die obige Tabelle mittels der Gewinnkoeffizienten  $g_{ij}$  beschriebene zu maximierende Zielfunktion  $z_G$  kann durch die Transformation (siehe Abschnitt 2.1.5)

$$c_{ij} = 10 - g_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

in eine äquivalente zu minimierende Zielfunktion  $z$  überführt werden. Dann gilt für jeden Transportplan  $z_G = 18000 - z$ .

Die Datentabelle für das äquivalente offene Transportproblem hat die folgende Gestalt:

$c_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1	6	8	5	6	= 600
2	5	4	6	2	= 800
3	0	1	3	4	= 400
$b_j$	$\geq 300$	$\geq 400$	$\geq 300$	$\geq 0$	

Zur Formulierung des zugehörigen klassischen Transportproblems wird dem fiktiven Kunden die Spalte 5 mit dem Bedarf  $b_5 = 1800 - 1000 = 800$  zugeordnet. Für die Bewertung der Felder dieser Spalte sind die Zeilenminima zu bilden.

$$\begin{aligned} c_{15} &= \min\{6; 8; 5; 6\} = 5, & j_1 &= 3 \\ c_{25} &= \min\{5; 4; 6; 2\} = 2, & j_2 &= 4 \\ c_{35} &= \min\{0; 1; 3; 4\} = 0, & j_3 &= 1 \end{aligned}$$

Gleichzeitig wurde vermerkt, in welcher Spalte sich das entsprechende Zeilenminimum befindet. Damit liegt nun die komplette Datentabelle des im folgenden zu lösenden klassischen Transportproblems vor:



$c_{ij}$	1	2	3	4	5	$a_i$
1	6	8	5	3	5	600
2	5	4	6	2	2	800
3	0	1	3	4	0	400
$b_j$	300	400	300	0	800	

Bei der Lösung dieses klassischen Transportproblems wird die Spalte 4 formal ausgeblendet, denn die zugehörigen Variablen nehmen zwangsweise den Wert Null an. In der folgenden linken Tabelle ist ein Plan aus der Menge *aller* Optimallösungen des zugehörigen reduzierten Transportproblems angegeben. Die rechte Tabelle enthält zur Kontrolle die berechneten Optimalitätsindikatoren.

$y_{ij}^o$	1	2	3	5	$a_i$	$c'_{ij}$	1	2	3	5
1			300	300	600	1	0	1	0	0
2		300		500	800	2	2	0	4	0
3	300	100			400	3	0	0	4	1
$b_j$	300	400	300	800						

Der zugehörige minimale Zielfunktionswert beträgt  $z = 5300$ .

Die positive Transportmenge  $y_{15} = 300$  ist wegen  $j_1 = 3$  den Großkunden 3 zuzuordnen. Analog wird die Transportmenge  $y_{25} = 500$  wegen  $j_2 = 4$  dem Großkunde 4 zugeschlagen. Damit wird auch er mit dem Produkt versorgt. Es ergibt sich der folgende optimale Plan zur Verteilung der Produktion:

	Kunde 1	Kunde 2	Kunde 3	Kunde 4
Werk 1			600	
Werk 2		300		500
Werk 3	300	100		

Der erzielte Gewinn beträgt  $z_g = 18000 - 5300 = 12700$  Geldeinheiten.

Führt man für den im klassischen Transportproblem erzeugten optimalen Transportplan  $y^0$  einen Basiswechsel durch, in dem man das freie Feld (1, 1) besetzt und das Feld (1, 5) aus der Basismenge entfernt, so erhält man einen weiteren optimalen Transportplan  $\bar{y}^0$ , der zweifach degeneriert ist.

$\bar{y}_{ij}^o$	1	2	3	5	$a_i$
1	300		300		600
2		0		800	800
3	0	400			400
$b_j$	300	400	300	800	

Dies führt zu einer optimalen Verteilung der Produktion, bei der die ersten drei Großkunden nur den zugesicherten Mindestbedarf erhalten und der Großkunde 4 von der freien Kapazität von 800 Mengeneinheiten profitiert. Außerdem kommt man mit der kleinstmöglichen Anzahl von zu benutzenden Transportwegen aus:

	Kunde 1	Kunde 2	Kunde 3	Kunde 4
Werk 1	300		300	
Werk 2				800
Werk 3		400		

Als nächstes wird ein Standardmodell betrachtet, welches in der Literatur oft als Ausgangspunkt bei der Beschreibung von Transportmodellen verwendet wird. Bei diesem offenen Transportproblem ist die abzutransportierende Menge für jeden Ausgangsort nach oben beschränkt und für jeden Verbraucher liegen wieder Mindestbedarfsmengen vor. Die Summe dieser Kapazitätsschranken darf dabei den insgesamt zu befriedigenden Mindestbedarf nicht unterschreiten. Die Lösung dieses Problems korrespondiert mit den bereits behandelten offenen Transportproblemen  $TP(\leq, =)$  und  $TP(=, \geq)$ .

**Modell  $TP(\leq, \geq)$**  (Transportproblem mit Überschuss und Mindestbedarf):

$$\begin{aligned}
 z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\longrightarrow \min \\
 \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i, & i = 1, \dots, m \\
 \sum_{i=1}^m x_{ij} &\geq b_j, & j = 1, \dots, n \\
 x_{ij} &\geq 0, & i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Das dazu symmetrische Problem  $TP(\geq, \leq)$  geht wieder durch Rollentausch von Ausgangs- und Bestimmungsorten in das Problem  $TP(\leq, \geq)$  über.

### Bemerkung 2.16

Für das offene Transportproblem  $TP(\leq, \geq)$  gelten genau die gleichen Lösbarkeitsbedingungen, wie sie in Satz 2.14 für das offene Transportproblem  $TP(=, \geq)$  formuliert wurden. Für die weiteren Betrachtungen wird analog vorausgesetzt, dass die Kapazitätsschranken positiv sind, der Mindestbedarf nichtnegativ ist und  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$  gilt.

Da der zulässigen Bereich des offenen Transportproblems  $TP(\leq, \geq)$  beschränkt und abgeschlossen ist, sind auch hier keinerlei Voraussetzungen an die zugehörige Kostenmatrix  $C$  nötig. Da  $TP(\leq, \geq)$  keine Gleichungsrestriktionen enthält, kann mit Hilfe von Satz 2.2 keine zur Kostenmatrix  $C$  äquivalente Kostenmatrix  $\bar{C}$  konstruiert werden. Damit kann ein offenes Transportproblem  $TP(\leq, \geq)$  mit zum Teil negativen Kostenkoeffizienten nicht auf ein Transportproblem mit nichtnegativen Kostenkoeffizienten reduziert werden.

### Bemerkung 2.17

Sind alle Einträge der Spalte  $l$  der Kostenmatrix  $C$  nichtnegativ, dann gibt es stets einen optimalen Transportplan  $x^0$  für das offene Transportproblem  $TP(\leq, \geq)$ , bei dem im Bestimmungsort  $B_l$  genau der Mindestbedarf  $b_l$  befriedigt wird:

$$\min_{i=1, \dots, m} c_{il} \geq 0 \implies \exists x^0 : \sum_{i=1}^m x_{il}^0 = b_l.$$

Ist mindestens ein Eintrag der Zeile  $k$  der Kostenmatrix  $C$  nichtpositiv, dann gibt es stets einen optimalen Transportplan  $x^0$  für das offene Transportproblem  $TP(\leq, \geq)$ , bei dem im Ausgangsort  $A_k$  genau die maximale Menge  $a_k$  abtransportiert wird:

$$\min_{j=1, \dots, n} c_{kj} \leq 0 \implies \exists x^0 : \sum_{j=1}^n x_{kj}^0 = a_k.$$

Mit den vorangegangenen Bemerkungen ist die Idee zur Lösung für einige der offenen Transportprobleme  $\text{TP}(\leq, \geq)$  sofort klar. Liegt eine nichtnegative Kostenmatrix  $C$  vor, dann ist jeder optimale Transportplan des offenen Transportproblems  $\text{TP}(\leq, =)$  auch ein optimaler Transportplan für das hier betrachtete offene Transportproblem  $\text{TP}(\leq, \geq)$ . Besitzt die Kostenmatrix  $C$  in jeder Zeile mindestens einen nichtpositiven Eintrag, dann ist jeder optimale Transportplan des offenen Transportproblems  $\text{TP}(=, \geq)$  auch ein optimaler Transportplan für das hier betrachtete offene Transportproblem  $\text{TP}(\leq, \geq)$ . Der letzte Fall gilt zum Beispiel für alle nichtpositiven Kostenmatrizen.

Für den allgemeinen Fall einer beliebigen Kostenmatrix  $C$  erfolgt die Zuordnung eines klassischen Transportproblems  $\text{KTP}(\leq, \geq)$  auf ähnliche Weise wie beim bereits behandelten Problem  $\text{TP}(=, \geq)$ . In dem zu beschreibenden klassischen Transportproblem wird für jeden Ausgangsort der Abtransport der vorrätigen Mengen  $a_i, i = 1, \dots, m$ , gefordert und für jeden Bestimmungsort der Mindestbedarf  $b_j, j = 1, \dots, n$ , als Bedarf definiert. Einem fiktiven Verbraucher  $B_{n+1}$  wird der in (2.36) ausgewiesene Bedarf zugeordnet. Er beschreibt hier die Menge, die eventuell noch über den Mindestbedarf hinaus transportiert werden kann. Eine vom Ausgangsort  $A_i$  kommende, dem fiktiven Bedarfsort  $B_{n+1}$  zugeordnete Transportmenge muss entweder einem realen Bedarfsort  $B_j$  zugeordnet werden oder verbleibt als zu lagernde Menge im Ausgangsort. Ein kostengünstiger Transport für die tatsächlich zu transportierende Menge entsteht dann, wenn man sie dem Bedarfsort zuordnet, der ausgehend vom Bestimmungsort  $A_i$  die geringsten Kosten aufweist. Die Kosten für die zusätzliche Spalte werden deshalb wie folgt definiert:

$$c_{i,n+1} = \min\{0, \min_{j=1,\dots,n} c_{ij}\}, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.43)$$

Gilt  $c_{i,n+1} < 0$ , dann ist die zu diesem Feld gehörige Transportmenge einem Bestimmungsort  $B_{j_i}$  zuzuordnen, für den

$$c_{i,j_i} = \min_{j=1,\dots,n} c_{ij}$$

gilt. Im Fall  $c_{i,n+1} = 0$  wird der Verbleib der zu diesem Feld gehörigen Menge im Ausgangsort  $A_i$  signalisiert. Formal wird der fehlende Spaltenindex mit  $j_i = 0$  festgesetzt.

Mit  $\text{KTP}(\leq, \geq)$  werde das in (2.38) beschriebene klassische Transportproblem mit den durch (2.36) und (2.43) festgelegten Größen  $b_{n+1}$  und  $c_{i,n+1}, i = 1, \dots, n$ , bezeichnet, welches dem offenen Transportproblem  $\text{TP}(\leq, \geq)$  zugeordnet wird.

### Bemerkung 2.18

Der für das offene Transportproblem  $\text{TP}(=, \geq)$  formulierte Satz 2.15 listet mit den oben vorgeschriebenen Spaltenindizes  $j_i, i = 1, \dots, m$ , auch hier den Vorgang zum Bestimmen eines optimalen Transportplans für das offene Transportproblem  $\text{TP}(\leq, \geq)$  auf und wird deshalb nicht extra neu formuliert.

Zu einem Bestimmungsort  $B_l$  wird mehr als der Mindestbedarf  $b_l$  transportiert, wenn es in einem optimalen Transportplan  $y^0$  von  $\text{KTP}(\leq, \geq)$  eine Zeile  $k$  gibt, für die  $y_{k,n+1}^0 > 0$  und  $j_k = l$  gilt. Im Ausgangsort  $A_k$  verbleibt eine Menge  $y_{k,n+1}^0 > 0$ , falls  $j_k = 0$  gilt. In diesem Fall wird die Anweisung  $x_{ij_k}^0 = y_{ij_k}^0 + y_{k,n+1}^0$  nicht ausgeführt.

An Hand des folgenden kleinen Beispiels soll der Vorgang zur Bestimmung eines optimalen Transportplans für das offene Transportproblem  $\text{TP}(\leq, \geq)$  mit sowohl positiven als auch negativen Kostenkoeffizienten verdeutlicht werden.

**Beispiel 2.12**

Durch die folgende Datentabelle sei ein offenes Transportproblem  $TP(\leq, \geq)$  beschrieben:

$c_{ij}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$		$a_i$
$A_1$	1	-3	2	$\leq$	8
$A_2$	5	7	4	$\leq$	12
$A_3$	-2	3	5	$\leq$	10
	$\geq$	$\geq$	$\geq$		
$b_j$	2	12	10		

Zur Formulierung des zugehörigen klassischen Transportproblems wird ein fiktiver Verbraucher  $B_4$  durch eine zusätzliche vierte Spalte mit dem Bedarf  $b_4 = 30 - 24 = 6$  eingeführt. Für die Bewertung der Felder der neuen Spalte sind folgende Minima zu bilden und die benötigten Spaltenindizes wie folgt festzulegen:

$$\begin{aligned} c_{14} &= \min\{0; \min\{1; -3; 2\}\} = -3, & j_1 &= 2 \\ c_{24} &= \min\{0; \min\{5; 7; 4\}\} = 0, & j_2 &= 0 \\ c_{34} &= \min\{0; \min\{-2; 3; 5\}\} = -2, & j_3 &= 1 \end{aligned}$$

Bei diesem Problem wird der gesamte Vorrat in den Ausgangsorten  $A_1$  und  $A_3$  abtransportiert. Der Bestimmungsort  $B_3$  erhält nicht mehr als den Mindestbedarf.

Die Datentabelle

$c_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1	1	-3	2	-3	8
2	5	7	4	0	12
3	-2	3	5	-2	10
$b_j$	2	12	10	6	

beschreibt das zu lösende klassische Transportproblem  $KTP(\leq, \geq)$ . Die nachfolgende linke Tabelle enthält die eindeutige Optimallösung des zugeordneten klassischen Transportproblems und die rechte Tabelle die zugehörigen Optimalitätsindikatoren.

$y_{ij}^o$	1	2	3	4	$a_i$	$c'_{ij}$	1	2	3	4
1		8			8	1	9	0	6	5
2			10	2	12	2	5	2	0	0
3	2	4		4	10	3	0	0	3	0
$b_j$	2	12	10	6						

Die Menge  $y_{24}^0 = 2$  verbleibt wegen  $j_2 = 0$  im zweiten Ausgangsort, weil die zugehörigen Transportverbindungen echte Kosten verursachen. Die Transportmenge  $y_{34}^0 = 4$  wird wegen  $j_3 = 1$  dem Bestimmungsort  $B_1$  zugeschlagen.

Für das Ausgangsproblem ergibt sich damit der optimale Transportplan

	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$		8	
$A_2$			10
$A_3$	6	4	

mit minimalem Zielfunktionswert  $z = 16$ .

Als viertes Standardmodell wird ein offenes Transportproblem betrachtet, bei dem für jeden Anbieter Mindeskapazitäten für die abzutransportierende Menge und für jeden Verbraucher Mindestbedarfsmengen vorliegen.

**Modell TP( $\geq, \geq$ )** (Transportproblem mit Mindestkapazität und Mindestbedarf):

$$\begin{aligned}
 z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\longrightarrow \min \\
 \sum_{j=1}^n x_{ij} &\geq a_i, \quad i = 1, \dots, m \\
 \sum_{i=1}^m x_{ij} &\geq b_j, \quad j = 1, \dots, n \\
 x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Für dieses Problem gibt es wegen des nach oben unbeschränkten zulässigen Bereichs stets zulässige Lösungen. Man muss die einzelnen Transportmengen nur groß genug wählen. Ein Transportplan kann zum Beispiel durch  $\bar{x}_{ij} = \max\{0, a_i, b_j\}$ ,  $(i, j) \in N$ , beschrieben werden.

### Satz 2.16

Das offene Transportproblem TP( $\geq, \geq$ ) ist genau dann lösbar, wenn  $c_{ij} \geq 0$ ,  $(i, j) \in N$ , gilt.

Damit liegt mit dem offenen Transportproblem TP( $\geq, \geq$ ) erstmals ein Problem vor, bei dem die Lösbarkeit von der Kostenmatrix  $C$  abhängt. Für ein  $c_{kl} < 0$  fällt der Zielfunktionswert unbeschränkt, wenn die Transportmenge  $x_{kl}$  beliebig groß wird.

Theoretisch ist es unerheblich, ob einige der Mindestkapazitäten oder Mindestbedarfsmengen negativ sind. Für die weitere Behandlung wird deshalb  $a_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und  $b_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , vorausgesetzt.

### Bemerkung 2.19

Es sei  $x^o$  ein optimaler Transportplan des offenen Transportproblems TP( $\geq, \geq$ ). Gibt es ein Feld  $(k, l) \in N$  mit  $x_{kl}^o > 0$  und  $c_{kl} > 0$ , dann gilt  $\sum_{j=1}^n x_{kj}^o = a_k$  oder  $\sum_{i=1}^m x_{il}^o = b_l$ . Findet ein Transport von  $A_k$  nach  $B_l$  statt und sind die Transportkosten auf diesem Transportweg positiv, dann ist der Plan nicht optimal, wenn sowohl im Ausgangsort  $A_k$  mehr als die Mindestkapazität  $a_k$  abtransportiert als auch im Bestimmungsort  $B_l$  mehr als der Mindestbedarf  $b_l$  antransportiert wird.

Da der zulässige Bereich des offenen Transportproblems TP( $\geq, \geq$ ) unbeschränkt ist, stellt sich die Frage, wie man die insgesamt zu transportierende Menge nach oben beschränken kann, ohne dabei alle optimalen Transportpläne auszuschließen.

### Satz 2.17

Es gibt stets einen optimalen Transportplan  $x^o$  des offenen Transportproblems TP( $\geq, \geq$ ) mit der Eigenschaft  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^o \leq \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j$ .

Das folgende kleine Beispiel soll u.a. demonstrieren, dass die Einschränkung auf die zu transportierende Mindestmenge  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \max \{ \sum_{i=1}^m a_i, \sum_{j=1}^n b_j \}$  nicht ausreicht.

### Beispiel 2.13

Gegeben sei die Datentabelle eines offenen Transportproblem und ein für  $t \leq 10$  optimaler Transportplan mit dem kleinstmöglichen Zielfunktionswert  $z = 0$ :

$c_{ij}$	1	2	$a_i$	$x_{ij}^0$	1	2	$a_i$
1	0	1	$\geq t$	1	10		$\geq t$
2	1	0	$\geq 10$	2		10	$\geq 10$
$b_j$	$\geq 10$	$\geq t$		$b_j$	$\geq 10$	$\geq t$	

Die insgesamt zu transportierende Menge beträgt 20 Mengeneinheiten. Für  $0 \leq t < 10$  wird damit mehr transportiert, als die Summe aller Mindestkapazitäten  $t + 10$  und auch mehr als der gesamte Mindestbedarf, der ebenfalls  $t + 10$  beträgt.

Für  $t = 0$  werden alle optimalen Transportpläne  $x^o$  durch die Bedingungen  $x_{11}^o = x_{22}^o \geq 10$ ,  $x_{12}^o = x_{21}^o = 0$  beschrieben. Die in Satz 2.17 angegebene obere Schranke ist für dieses Beispiel scharf. Zugleich wird auch deutlich, dass man Restriktionen mit Mindestkapazität beziehungsweise Mindestbedarf gleich Null nicht einfach streichen kann.

Die Idee zur Konstruktion eines dem offenen Transportproblem  $TP(\geq, \geq)$  zugeordneten klassischen Transportproblems kann man dem bereits behandelten Problem  $TP(=, \geq)$  und dem zugehörigen symmetrischen Problem  $TP(\geq, =)$  entnehmen.

Bei jedem Ausgangsort  $A_i$  wird die Mindestkapazität  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , als aktueller Vorrat und bei jedem Bestimmungsort  $B_j$  der Mindestbedarf  $b_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , als Bedarf aufgefasst.

Zusätzlich wird sowohl ein fiktiver Ausgangsort  $A_{m+1}$  mit der Voratsmenge

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j \quad (2.45)$$

als auch ein fiktiver Bedarfsort  $B_{n+1}$  mit dem Bedarf

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i \quad (2.46)$$

eingeführt.

Die zur zusätzlichen Spalte gehörigen Variablen haben die Funktion, diese über den Mindestbedarf hinaus zu transportierenden Mengen zu realisieren. Analog beschreiben die zur zusätzlichen Zeile gehörigen Variable einen die Mindestkapazität überschreitende Transportmenge.

Eine vom Ausgangsort  $A_i$  kommende, dem fiktiven Bedarfsort  $B_{n+1}$  zugeordnete Transportmenge wird wieder einem realen Bedarfsort mit den geringsten Transportkosten zugeordnet. Ganz ähnlich soll eine vom fiktiven Ausgangsort  $A_{m+1}$  kommende, dem Bedarfsort  $B_j$  zugeordnete Transportmenge von einem realen Ausgangsort geliefert werden, und zwar von dem mit der kostengünstigsten Transportverbindung.

Damit wird wie schon beim offenen Transportproblem  $TP(=, \geq)$  jedem der Ausgangsorte  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ein Bestimmungsort  $B_{j_i}$  zugeordnet, für den die Bedingung (2.40) gilt. Ganz analog wird nun zusätzlich jedem Bestimmungsort  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ein Ausgangsort  $A_{i_j}$  mit

$$c_{m+1,j} = c_{i_j,j} = \min_{i=1,\dots,m} c_{ij}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.47)$$

zugeordnet. Sollte die Auswahl der Zeile  $i_j$  nicht eindeutig sein, dann kann unter den Kandidaten willkürlich gewählt werden.

Die Kosten für den fiktiven Transport einer Menge vom fiktiven Ausgangsort  $A_{m+1}$  zum fiktiven Bedarfsort  $B_{n+1}$  werden mit

$$c_{m+1,n+1} = 0 \quad (2.48)$$

festgelegt.

Mit den soeben beschriebenen Daten wird das folgende zum offenen Transportproblem  $TP(\geq, \geq)$  zugeordnete klassische Transportproblem **KTP**( $\geq, \geq$ ) formuliert:

$$\begin{aligned} \bar{z} = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} y_{ij} &\longrightarrow \min \\ \sum_{j=1}^{n+1} y_{ij} = a_i, &\quad i = 1, \dots, m+1 \\ \sum_{i=1}^{m+1} y_{ij} = b_j, &\quad j = 1, \dots, n+1 \\ y_{ij} \geq 0, &\quad i = 1, \dots, m+1, j = 1, \dots, n+1 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Die Gleichgewichtsbedingung ist offensichtlich erfüllt. In diesem zugeordneten klassischen Transportproblem wird demzufolge genau die Menge  $\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j$  transportiert. Das bedeutet nicht, dass dies auch die tatsächliche Transportmenge im offenen Transportproblem  $TP(\geq, \geq)$  ist.

### Satz 2.18

Ist  $y_{ij}^0$ ,  $i = 1, \dots, m+1$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ , ein optimaler Transportplan für das klassische Transportproblem **KTP**( $\geq, \geq$ ), dann ist

$$\left. \begin{aligned} x_{i_j i}^0 &= w_{i_j i}^0 + y_{i,n+1}^0 \\ x_{i_j j}^0 &= w_{i_j j}^0, \quad j = 1, \dots, n, j \neq j_i \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.50)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} w_{i_j j}^0 &= y_{i_j j}^0 + y_{m+1,j}^0 \\ w_{i_j i}^0 &= y_{i_j i}^0, \quad i = 1, \dots, m, i \neq i_j \end{aligned} \right\} \quad j = 1, \dots, n \quad (2.51)$$

ein optimaler Transportplan des offenen Transportproblems  $TP(\geq, \geq)$ .

Die minimalen Gesamtkosten des für das klassische Transportproblem **KTP**( $\geq, \geq$ ) erzeugten optimalen Transportplans  $y^0$  stimmen mit den Gesamtkosten des für das offene Transportproblem  $TP(\geq, \geq)$  zugeordneten optimalen Transportplans  $x^0$  überein, das heißt, es gilt  $z(x^0) = \bar{z}(y^0)$ .

Bei einem Ausgangsort  $A_k$  übersteigt der Abtransport die untere Kapazitätsgrenze  $a_k$ , wenn in einem optimalen Transportplan  $y^0$  von  $\text{KTP}(\geq, \geq)$  eine Spalte  $l$  existiert, für die  $y_{m+1,l}^0 > 0$  und  $i_l = k$  gilt.

Zu einem Bestimmungsort  $B_l$  wird mehr als der Mindestbedarf  $b_l$  angeliefert, wenn in einem optimalen Transportplan  $y^0$  von  $\text{KTP}(\geq, \geq)$  eine Zeile  $k$  existiert, für die  $y_{k,n+1}^0 > 0$  und  $j_k = l$  gilt.

Die insgesamt transportierte Menge kann mit Hilfe der Variablen  $y_{m+1,n+1}$  beschrieben werden. Es gilt der Zusammenhang  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^0 = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - y_{m+1,n+1}^0$ . Wegen der Nichtnegativität von  $y_{m+1,n+1}^0$  wurden damit nur optimale Transportpläne  $x^0$  erzeugt, bei denen nicht mehr als  $\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j$  Mengeneinheiten transportiert werden.

### Bemerkung 2.20

Die Anwendung der Approximationsmethode von Vogel ist für das beschriebene klassische Transportproblem  $\text{KTP}(\geq, \geq)$  wenig hilfreich, da die Differenzen zwischen dem kleinsten und nächstkleinsten Kostenkoeffizienten in allen ursprünglichen Zeilen und Spalten zu Beginn des Verfahrens stets Null sind.

Ein Transportplan nach der Gesamtminimumregel besetzt zuerst das Eckfeld  $(m+1, n+1)$  maximal. Damit wird ein Transportplan erzeugt, bei dem die insgesamt zu transportierende Menge den kleinstmöglichen Wert  $\max\{\sum_{i=1}^m a_i, \sum_{j=1}^n b_j\}$  annimmt. In Beispiel 2.13 wurde gezeigt, dass dies nicht unbedingt ein optimaler Plan sein muss.

Im folgenden Beispiel soll der Prozess der Bestimmung eines optimalen Transportplans für das offene Transportproblem  $\text{TP}(\geq, \geq)$  mit Hilfe des zugeordneten klassischen Transportproblems  $\text{KTP}(\geq, \geq)$  ausführlich demonstriert werden.

### Beispiel 2.14

Gegeben sei die Datentabelle eines offenen Transportproblems  $\text{TP}(\geq, \geq)$ :

$c_{ij}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	8	2	3	$\geq 20$
$A_2$	1	9	8	$\geq 7$
	$\geq$	$\geq$	$\geq$	
$b_j$	14	10	6	

Zur Formulierung des zugehörigen klassischen Transportproblems wird ein fiktiver Erzeuger  $A_3$  mit dem Vorrat  $a_3 = 14 + 10 + 6 = 30$  und ein fiktiver Verbraucher  $B_4$  mit dem Bedarf  $b_4 = 20 + 7 = 27$  eingeführt. Zur Bewertung der Felder der neuen Zeile sind die folgenden Spaltenminima zu bilden und die Zeilennummer zu notieren, in der sie angenommen werden:

$$\begin{aligned} c_{31} &= \min\{8; 1\} = 1, & i_1 &= 2 \\ c_{32} &= \min\{2; 9\} = 2, & i_2 &= 1 \\ c_{33} &= \min\{3; 8\} = 3, & i_3 &= 1 \end{aligned}$$

Für die Bewertung der Felder der neuen Spalte sind folgende Zeilenminima zu bilden und die benötigten Spaltenindizes wie folgt festzulegen:

$$\begin{aligned} c_{14} &= \min\{8; 2; 3\} = 2, & j_1 &= 2 \\ c_{24} &= \min\{1; 9; 8\} = 1, & j_2 &= 1 \end{aligned}$$



Die Datentabelle

$c_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1	8	2	3	2	20
2	1	9	8	1	7
3	1	2	3	0	30
$b_j$	14	10	6	27	

beschreibt das zu lösende klassische Transportproblem  $KTP(\geq, \geq)$ .

Die folgende linke Tabelle enthält den mit Hilfe der Gesamtminimumregel aufgestellten Plan. Er liefert die Gesamtkosten  $\bar{z}(y) = 80$  und ist nicht optimal. Nach einem Austauschschritt erhält man den in der rechten Tabelle dargestellten optimalen Plan mit den Gesamtkosten  $\bar{z}(y^0) = 60$ .

$y_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$	$y_{ij}^0$	1	2	3	4	$a_i$
1	4	10	6		20	1		10	6	4	20
2	7				7	2	7				7
3	3			27	30	3	7			23	30
$b_j$	14	10	6	27		$b_j$	14	10	6	27	

Die Berechnung der Potentiale zeigt die nachfolgende linke Tabelle. Dabei wurde abweichend vom Standard mit  $u_3 = 0$  begonnen. Die rechte Tabelle weist die berechneten Optimalitätsindikatoren aus.

$u_i + v_j$	1	2	3	4	$u_i$	$c'_{ij}$	1	2	3	4
1	3	2	3	2	2	1	5	0	0	0
2	1	0	1	0	0	2	0	9	7	1
3	1	0	1	0	0	3	0	2	2	0
$v_j$	1	0	1	0						

Mittels (2.51) wird zuerst wegen  $i_1 = 2$  die Menge  $y_{31}^0 = 7$  dem Feld  $(2, 1)$  zugeordnet. Man erhält somit  $w_{21}^0 = 7 + 7 = 14$ . Die anderen Felder werden unverändert der Optimaltabelle  $y^0$  entnommen. Damit entsteht die folgende noch unvollständige Zwischenlösung:

$w_{ij}^0$	1	2	3	$a_i$
1		10	6	20
2	14			7
$b_j$	14	10	6	

Danach wird über (2.50) durch  $j_1 = 2$  die Menge  $y_{14}^0 = 4$  dem Feld  $(1, 2)$  zugeordnet. Dies führt zur Zuweisung  $x_{12}^0 = 10 + 4 = 14$ . Die anderen Felder werden unverändert der Zwischentabelle  $w^0$  entnommen. Damit liegt der komplette optimale Transportplan für das zu lösende Ausgangsproblem in der folgenden Tabelle vor:

$x_{ij}^0$	1	2	3	$a_i$
1		14	6	20
2	14			7
$b_j$	14	10	6	

Die minimalen Gesamtkosten betragen  $z = 60$ . Insgesamt werden 34 Mengeneinheiten transportiert. Die unteren Kapazitätsschranken werden um 7 Mengeneinheiten und der Mindestbedarf um 4 Mengeneinheiten überschritten.

Als Anwendungsbeispiel soll noch ein bekanntes Problem der Personalplanung beschrieben werden, wie man es zum Beispiel auch in [Appa73] findet.

### Beispiel 2.15

Der Personaleinsatzplaner eines Bahnhofs steht vor der Aufgabe, für einen bestimmten Zeitraum Arbeiter zum Rangierdienst einzuteilen. Die folgende Übersicht gibt den Mindestbedarf an Personal für die Rangierarbeiten an:

Halbschicht	Personalbedarf
00 Uhr bis 04 Uhr	6
04 Uhr bis 08 Uhr	12
08 Uhr bis 12 Uhr	14
12 Uhr bis 16 Uhr	16
16 Uhr bis 20 Uhr	14
20 Uhr bis 24 Uhr	8

Die Schicht eines Arbeiters dauert jeweils 8 aufeinanderfolgende Stunden. Die erste Schicht beginnt um Mitternacht, die nächste um 4 Uhr morgens, und so weiter. Der Einsatzplaner soll den Schichtplan so aufstellen, dass der Personalbedarf während der Rangierzeiten gedeckt wird, wobei insgesamt möglichst wenig Arbeiter zum Schichtdienst herangezogen werden sollen.

Zur Formulierung des mathematischen Modells werden folgende Bezeichnungen benötigt:

$x_k, k = 1, \dots, 6$  : Anzahl der Arbeitskräfte, die ihre Schicht um  $(4k-4)$  Uhr beginnen

$z$  : Gesamtzahl der einzusetzenden Arbeitskräfte

Das oben beschriebene Problem wird durch die folgende ganzzahlige lineare Optimierungsaufgabe repräsentiert:

$$\begin{aligned}
 z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \min \\
 x_1 & & & & & + x_6 & \geq & 6 \\
 x_1 + x_2 & & & & & & \geq & 12 \\
 & x_2 + x_3 & & & & & \geq & 14 \\
 & & x_3 + x_4 & & & & \geq & 16 \\
 & & & x_4 + x_5 & & & \geq & 14 \\
 & & & & x_5 + x_6 & \geq & 8 \\
 x_k & \geq 0, \quad \text{ganzzahlig}, \quad k = 1, \dots, 6
 \end{aligned}$$

Addiert man die erste, dritte und fünfte Restriktion auf, dann erhält man die Ungleichung  $z \geq 34$ . Aus den verbleibenden Restriktionen ergibt sich  $z \geq 36$ . Damit benötigt man zur Realisierung des Schichtplans mindestens 36 Arbeitskräfte. Gleichzeitig ist klar, dass die Restriktionen hier nicht in Gleichungsform formuliert werden können. Das lineare Gleichungssystem wäre unlösbar.

Die Restriktionsmatrix besitzt erkennbar eine sehr spezielle Struktur. Sie ist total unimodular. Damit stellen die Ganzzahligkeitsbedingungen an die Variable kein Problem dar. Dies kommt jetzt auch gleich zum Ausdruck, wenn dem Problem der Personaleinsatzplanung ein spezielles Transportproblem zugeordnet wird.

Die Restriktionen der formulierten Optimierungsaufgabe lassen sich in Tabellenform anordnen:

$\bar{x}_{ij}$	1	2	3		$a_i$
1	$x_1$	–	$x_6$	$\geq$	6
2	$x_2$	$x_3$	–	$\geq$	14
3	–	$x_4$	$x_5$	$\geq$	14
$b_j$	$\geq$	$\geq$	$\geq$		
	12	16	8		

Es liegt die Gestalt eines offenen Transportproblems  $TP(\geq, \geq)$  vor, wenn man die nicht benötigten Felder als gesperrte Transportverbindungen vereinbart. Deshalb wird die folgende Kostenmatrix verwendet, wobei die Einträge  $M$  eine hinreichend große Zahl beschreiben.

$\bar{c}_{ij}$	1	2	3
1	1	$M$	1
2	1	1	$M$
3	$M$	1	1

Die Datentabelle des zuzuordnenden klassischen Transportproblems  $KTP(\geq, \geq)$  besitzt dann konkret die folgende Gestalt:

$c_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1	1	$M$	1	1	6
2	1	1	$M$	1	14
3	$M$	1	1	1	14
4	1	1	1	0	36
$b_j$	12	16	8	34	

Die der zusätzlichen Zeile 4 und Spalte 4 zuzuordnenden Indizes für die Spalten- beziehungsweise Zeilenminima sind nicht eindeutig. Willkürlich wird hier  $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 1, j_1 = 1, j_2 = 1$  und  $j_3 = 2$  gewählt.

Eine Optimallösung des klassischen Transportproblems  $KTP(\geq, \geq)$  zeigt die nachfolgende linke Tabelle. Die rechte Tabelle enthält die berechneten Optimalitätsindikatoren.

$y_{ij}^0$	1	2	3	4	$a_i$	$c'_{ij}$	1	2	3	4
1	6				6	1	$\boxed{0}$	$M - 1$	$\mathbf{0}$	1
2	6	8			14	2	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$M - 1$	1
3		8	6		14	3	$M - 1$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	1
4			2	34	36	4	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$
$b_j$	12	16	8	34						

Die Menge  $y_{43}^0$  wird wegen  $i_3 = 1$  dem Feld  $(1, 3)$  zugeordnet. Damit erhält man für das Personaleinsatzproblem konkret die folgende Optimallösung:

$$x_1^0 = 6, x_2^0 = 6, x_3^0 = 8, x_4^0 = 6, x_5^0 = 6, x_6^0 = 2 \quad z_{\min} = 36$$

Die Optimallösung des klassischen Transportproblems  $KTP(\geq, \geq)$  ist nicht eindeutig. Mehrere Optimalitätsindikatoren zu freien Feldern sind Null. Die auch mögliche Wahl von  $i_3 = 3$  zeigt zusätzlich die Nichteindeutigkeit der Optimallösung an. Die Menge aller optimalen Personaleinsatzpläne ist bei diesem Problem dadurch beschrieben, dass in der zweiten, vierten und sechsten Halbschicht der Mindestbedarf an Personal nicht überschritten wird.

Als letztes Standardmodell wird das noch fehlende offene Transportproblem  $\text{TP}(\leq, \leq)$  behandelt, welches scheinbar auf dem ersten Blick eine geringere praktische Bedeutung besitzt.

**Modell  $\text{TP}(\leq, \leq)$  :**

$$\begin{aligned}
 z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\longrightarrow \min \\
 \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i, \quad i = 1, \dots, m \\
 \sum_{i=1}^m x_{ij} &\leq b_j, \quad j = 1, \dots, n \\
 x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Gegenüber dem offenen Transportproblem  $\text{TP}(\leq, =)$  wurden hier auch noch die Restriktionen für die Verbraucher in dem Sinne abgeschwächt, dass nur eine obere Schranke für den Bedarf vorliegt. Damit vereinfachen sich die Lösbarkeitsbedingungen für dieses Problem wesentlich.

### Satz 2.19

Das offene Transportproblem  $\text{TP}(\leq, \leq)$  ist genau dann lösbar, wenn  $a_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und  $b_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , gilt.

Sinnvollerweise wird auch hier  $a_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und  $b_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , gefordert. Da das offene Transportproblem  $\text{TP}(\leq, \leq)$  keine Gleichungsrestriktionen enthält, lässt sich Satz 2.2 nicht zur Konstruktion einer äquivalenten Kostenmatrix  $\bar{C}$  anwenden. Damit kann ein offenes Transportproblem  $\text{TP}(\leq, \leq)$  mit positiven als auch negativen Kostenkoeffizienten nicht auf ein Transportproblem mit nur nichtnegativen oder nur nichtpositiven Kostenkoeffizienten reduziert werden.

Von praktischem Interesse sind gerade nichtpositive Kostenmatrizen. Gilt  $C \leq 0$ , dann ist  $G = -C$  eine nichtnegative Gewinnmatrix. Das offene Transportproblem  $\text{TP}(\leq, \leq)$  ist dann äquivalent einem Problem mit einer zu maximierenden Zielfunktion, die durch die Gewinnmatrix  $G$  repräsentiert wird.

### Bemerkung 2.21

Gilt  $c_{kl} \geq 0$ , dann gibt es für das offene Transportproblem  $\text{TP}(\leq, \leq)$  stets einen optimalen Transportplan  $x^0$  mit  $x_{kl}^0 = 0$ . Für nichtnegative Kostenmatrizen  $C \geq 0$  stellt demzufolge die triviale Lösung  $x^0 = 0$  eine Optimallösung dar. Es wird also nichts transportiert.

Gilt  $c_{kl} \leq 0$ , dann gibt es für das offene Transportproblem  $\text{TP}(\leq, \leq)$  stets einen optimalen Transportplan  $x^0$  mit  $\sum_{j=1}^n x_{kj}^0 = a_k$  oder  $\sum_{i=1}^m x_{il}^0 = b_l$ . Mit dieser Eigenschaft lässt sich leicht die folgende Idee zur Lösung offener Transportprobleme  $\text{TP}(\leq, \leq)$  mit nichtpositiven Kostenmatrizen  $C \leq 0$  nachvollziehen. Gilt  $\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$ , dann ist jeder optimale Transportplan des offenen Transportproblems  $\text{TP}(\leq, =)$  auch ein optimaler Transportplan für  $\text{TP}(\leq, \leq)$ . Gilt  $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ , dann ist jeder optimale Transportplan des offenen Transportproblems  $\text{TP}(=, \leq)$  auch ein optimaler Transportplan für  $\text{TP}(\leq, \leq)$ .

Das folgende kleine Beispiel zeigt, dass man bei Kostenmatrizen mit sowohl negativen als auch positiven Einträgen im Allgemeinen keine Aussagen über die insgesamt zu transportierende Menge für einen optimalen Transportplan des offenen Transportproblems  $\text{TP}(\leq, \leq)$  treffen kann.

### Beispiel 2.16

Das durch die linke Datentabelle beschriebene offene Transportproblem besitzt die in der rechten Tabelle dargestellte eindeutige Optimallösung.

$c_{ij}$	1	2	$a_i$	$x_{ij}^0$	1	2	$a_i$
1	-1	1	$\leq 8$	1	2		$\leq 8$
2	1	-1	$\leq 2$	2		2	$\leq 2$
$b_j$	$\leq 2$	$\leq 6$		$b_j$	$\leq 2$	$\leq 6$	

Im optimalen Transportplan sind insgesamt nur 4 Mengeneinheiten zu transportieren. Damit wird deutlich weniger transportiert als die Summe der vorrätigen Mengen in den Ausgangsorten und auch weniger als die Summe der oberen Bedarfsschranken in den Bestimmungsorten.

Noch zu klären ist die allgemeine Vorgehensweise für den Fall einer beliebigen Kostenmatrix  $C$  für das offene Transportproblem  $\text{TP}(\leq, \leq)$ .

Wie beim offenen Transportproblem  $\text{TP}(\geq, \geq)$  wird sowohl ein zusätzlicher Vorratsort  $A_{m+1}$  mit dem in (2.45) definierten Vorrat  $a_{m+1}$  als auch ein zusätzlicher Bedarfsort  $B_{n+1}$  mit dem in (2.46) definierten Bedarf  $b_{n+1}$  eingeführt. Die zur zusätzlichen Spalte und zur zusätzlichen Zeile gehörenden Variablen können wie dem bereits behandelten offenen Transportproblem  $\text{TP}(\leq, =)$  als Schlupfvariable aufgefasst werden und erhalten damit die Bewertung

$$\begin{aligned} c_{i,n+1} &= 0, & i &= 1, \dots, m \\ c_{m+1,j} &= 0, & j &= 1, \dots, n \end{aligned} \tag{2.53}$$

Die Kosten  $c_{m+1,n+1}$  für den fiktiven Transport einer Menge von  $A_{m+1}$  nach  $B_{n+1}$  werden ebenfalls, wie bereits in (2.48) festgelegt, mit dem Wert Null bedacht.

Dem offenen Transportproblem  $\text{TP}(\leq, \leq)$  wird das bereits in (2.49) dargestellte klassische Transportproblem zugeordnet. Es wird jetzt mit  $\mathbf{KTP}(\leq, \leq)$  bezeichnet. Die benötigten Daten werden dabei durch die Vorschriften (2.45), (2.46), (2.53) und (2.48) festgelegt.

### Bemerkung 2.22

Hat man einen optimalen Transportplan  $y_{ij}^0$ ,  $i = 1, \dots, m + 1$ ,  $j = 1, \dots, n + 1$ , für das zugeordnete klassische Transportproblem  $\mathbf{KTP}(\leq, \leq)$  erzeugt, dann liegt automatisch mit  $x_{ij}^0 = y_{ij}^0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ein optimaler Transportplan für das offene Transportproblem  $\text{TP}(\leq, \leq)$  vor. Man muss also nur die zusätzliche Zeile und die zusätzliche Spalte im zugeordneten klassischen Transportproblem  $\mathbf{KTP}(\leq, \leq)$  streichen, um einen optimalen Plan für das offene Transportproblem  $\text{TP}(\leq, \leq)$  zu gelangen.

Die insgesamt transportierte Menge wird bei diesem offenen Transportproblem durch die Transportmenge vom fiktiven Ausgangsort  $A_{m+1}$  zum fiktiven Bestimmungsort  $B_{n+1}$  beschrieben. Damit gilt die Gleichung  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^0 = y_{m+1,n+1}^0$ .

### 2.3.2 Modell mit gemischten Restriktionen

Nach den ausführlichen Darstellungen zu den Standardmodellen im letzten Abschnitt ist der Lösungsweg für ein offenes Transportproblem mit gemischten Restriktionen sowohl für Anbieter als auch für Verbraucher bereits vorgezeichnet.

Zur Vereinfachung der Beschreibung des darzustellenden offenen Transportproblems werden die Indexmengen  $I = \{1, \dots, m\}$  und  $J = \{1, \dots, n\}$  eingeführt. Desweiteren seien  $I_1, I_2$  und  $I_3$  paarweise disjunkte Indexmengen mit  $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I$  und  $J_1, J_2$  und  $J_3$  paarweise disjunkte Indexmengen mit  $J_1 \cup J_2 \cup J_3 = J$ . Die einzelnen Indexmengen repräsentieren dann die für Anbieter und Verbraucher zu formulierenden Gleichungen beziehungsweise die beiden möglichen Relationen für Ungleichungen. Bei den bereits behandelten Standardmodellen waren jeweils zwei von drei hier eingeführten Indexmengen leer. Für ein ganz allgemein zu formulierendes offenes Transportproblem können alle Indexmengen nicht leer sein.

**Modell OTP** (Offenes Transportproblem mit gemischten Restriktionen):

$$\begin{aligned}
 z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} &\longrightarrow \min \\
 \sum_{j \in J} x_{ij} &\leq a_i, & i \in I_1 \\
 \sum_{j \in J} x_{ij} &= a_i, & i \in I_2 \\
 \sum_{j \in J} x_{ij} &\geq a_i, & i \in I_3 \\
 \sum_{i \in I} x_{ij} &\leq b_j, & j \in J_1 \\
 \sum_{i \in I} x_{ij} &= b_j, & j \in J_2 \\
 \sum_{i \in I} x_{ij} &\geq b_j, & j \in J_3 \\
 x_{ij} &\geq 0, & (i, j) \in I \times J
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Für die Lösbarkeit des offenen Transportproblems OTP sind die Bedingungen

$$a_i \geq 0, \quad i \in I_1 \cup I_2 \tag{2.55}$$

$$b_j \geq 0, \quad j \in J_1 \cup J_2 \tag{2.56}$$

wegen den Nichtnegativitätsbedingungen an die einzelnen zu transportierenden Mengen offensichtlich notwendig. Dies kam bereits in den Sätzen über die Lösbarkeit der Standardprobleme zum Ausdruck, bei denen die Restriktionen in Gleichungsform oder durch obere Schranken formuliert wurden. Ebenso muss wie in Satz 2.16

$$c_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in I_3 \times J_3 \tag{2.57}$$

gefordert werden, um ein unbeschränktes Fallen der Zielfunktion auszuschließen.

Diese Bedingungen reichen aber noch nicht aus, damit man für jedes offene Transportproblem der Gestalt OTP zulässige Lösungen bestimmen kann. In Abhängigkeit davon, ob es Anbieter beziehungsweise Abnehmer gibt, für die gewisse Mindestkapazitäten beziehungsweise Mindestbedarfsmengen vorgeschrieben sind, müssen noch die vier folgenden Alternativen betrachtet werden, um die Lösbarkeit für OTP zu sichern:

$$I_3 \neq \emptyset \wedge J_3 \neq \emptyset \quad (2.58)$$

$$I_3 = \emptyset \wedge J_3 \neq \emptyset \wedge \sum_{i \in I_1 \cup I_2} a_i \geq \sum_{j \in J_2} b_j + \sum_{j \in J_3} \max\{0, b_j\} \quad (2.59)$$

$$I_3 \neq \emptyset \wedge J_3 = \emptyset \wedge \sum_{i \in I_2} a_i + \sum_{i \in I_3} \max\{0, a_i\} \leq \sum_{j \in J_1 \cup J_2} b_j \quad (2.60)$$

$$I_3 = \emptyset \wedge J_3 = \emptyset \wedge \sum_{i \in I_1 \cup I_2} a_i \geq \sum_{j \in J_2} b_j \wedge \sum_{i \in I_2} a_i \leq \sum_{j \in J_1 \cup J_2} b_j \quad (2.61)$$

Der folgende Satz formuliert die allgemeinen Lösbarkeitsbedingungen für das offene Transportproblem OTP, die man auch in [Bri74] nachlesen kann.

**Satz 2.20**

Das offene Transportproblem **OTP** ist genau dann lösbar, wenn die Bedingungen (2.55), (2.56), (2.57) und genau eine der Alternativen (2.58), (2.59), (2.60) oder (2.61) gelten.

Für die weiteren Ausführungen genügt es, einige der in dieser Lösbarkeitsbedingung allgemein formulierten Bedingungen zu verschärfen, um nur die praktisch relevanten Probleme zu erfassen. Deshalb wird für weitere Betrachtungen zusätzlich

$$a_i > 0, i \in I_1 \cup I_2, \quad a_i \geq 0, i \in I_3, \quad b_j > 0, i \in J_1 \cup J_2, \quad b_j \geq 0, j \in J_3,$$

vorausgesetzt.

Zur Bestimmung eines optimalen Transportplans des offenen Transportproblems OTP genügt auch für den allgemeinen Fall ein klassisches Transportproblem mit nur einer zusätzlichen Zeile und einer zusätzlichen Spalte. Dieser in [Is82] beschriebene Weg soll hier der in [Bri74] dargestellten Methode vorgezogen werden, die zwei zusätzliche Zeilen und Spalten benötigt.

Das zu formulierende klassische Transportproblem besitzt die gleiche Struktur wie das in (2.49) erstmals dargestellte Problem. Es wird hier noch einmal extra aufgeführt und soll mit **KTP-O** bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} \bar{z} = & \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} y_{ij} \longrightarrow \min \\ & \sum_{j=1}^{n+1} y_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m+1 \\ & \sum_{i=1}^{m+1} y_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n+1 \\ & y_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m+1, j = 1, \dots, n+1 \end{aligned}$$

Die Vorräte  $a_i$ ,  $i \in I = \{1, \dots, m\}$ , Bedarfsmengen  $b_j$ ,  $j \in J = \{1, \dots, n\}$ , und Kostenkoeffizienten  $c_{ij}$ ,  $(i, j) \in N$ ,  $N = I \times J$ , sind vorgegeben und damit bekannt.

Analog Satz 2.17 gibt es auch für OTP stets einen optimalen Transportplan  $x^o$  mit der Eigenschaft  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^o \leq \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j$ . Nur solche Transportpläne werden mit dem formulierten Modell KTP-O erfasst, wenn die noch fehlende Vorratsmenge wie in (2.45) durch  $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j$  und die noch fehlende Bedarfsmenge wie in (2.46) durch  $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i$  festgelegt werden.

Für  $J_3 \neq \emptyset$  werden die Kosten für die zusätzliche Spalte wie folgt definiert:

$$c_{i,n+1} = \begin{cases} \min\{0, \min_{j \in J_3} c_{ij}\}, & i \in I_1 \\ \min_{j \in J_3} c_{ij}, & i \in I_2 \cup I_3 \end{cases} \quad (2.62)$$

Generell wird für  $i \in I_2 \cup I_3$  dem Ausgangsort  $A_i$  ein Index  $j_i$  und damit ein Bestimmungsort  $B_{j_i}$  zugeordnet, für den

$$c_{i,j_i} = \min_{j=1, \dots, n} c_{ij}$$

gilt. Für  $i \in I_1$  wird dieser Index nur für  $c_{i,n+1} < 0$  auf diese Weise bestimmt. Gilt  $c_{i,n+1} = 0$ , dann wird  $j_i = 0$  vereinbart.

Für  $J_3 = \emptyset$  wird

$$c_{i,n+1} = \begin{cases} 0, & i \in I_1 \\ M, & i \in I_2 \cup I_3 \end{cases} \quad (2.63)$$

gesetzt, wobei  $M$  eine hinreichend große Zahl ist. Die mit  $M$  bewerteten Felder signalisieren die Sperrung der zugehörigen fiktiven Transportverbindungen. Für  $i \in I$  wird generell  $j_i = 0$  vereinbart.

Für  $I_3 \neq \emptyset$  werden die Kosten für die zusätzliche Zeile durch

$$c_{m+1,j} = \begin{cases} \min\{0, \min_{i \in I_3} c_{ij}\}, & j \in J_1 \\ \min_{i \in I_3} c_{ij}, & j \in J_2 \cup J_3 \end{cases} \quad (2.64)$$

festgelegt. Generell wird für  $j \in J_2 \cup J_3$  dem Bestimmungsort  $B_j$  ein Index  $i_j$  und damit ein Ausgangsort  $A_{i_j}$  zugeordnet, für den

$$c_{i_j,j} = \min_{j=1, \dots, n} c_{ij}$$

gilt. So wird auch im Falle  $c_{m+1,j} < 0$  für  $j \in J_1$  verfahren. Nur für  $j \in J_1$  mit  $c_{m+1,j} = 0$  wird  $i_j = 0$  gesetzt.

Für  $I_3 = \emptyset$  wird

$$c_{m+1,j} = \begin{cases} 0, & j \in J_1 \\ M, & j \in J_2 \cup J_3 \end{cases} \quad (2.65)$$

festgelegt, wobei  $M$  eine hinreichend große Zahl ist und  $i_j = 0$  für  $j \in J$  vereinbart.

Letzendlich wird der noch fehlende Kostenkoeffizient  $c_{m+1,n+1}$  wie in (2.48) Null gesetzt.

Mit dem nun vollständigen Datensatz kann stets ein optimaler Transportplan für das zugeordnete klassische Transportproblem KTP-O bestimmt werden.



**Bemerkung 2.23**

Im Fall  $I_3 = \emptyset$  gilt für jeden optimalen Transportplan  $y^0$  des offenen Transportproblems KTP-O stets  $y_{m+1,j}^0 = 0$ ,  $j \in J_2 \cup J_3$ . Für  $J_3 = \emptyset$  gilt analog  $y_{i,n+1}^0 = 0$ ,  $i \in I_2 \cup I_3$ . Damit ist in jedem optimalen Transportplan von KTP-O kein Feld in der zusätzlichen Zeile und in der zusätzlichen Spalte besetzt, dass zu einer Sperrung gehört.

Der folgende Satz, dessen Beweis in [Is82] nachgelesen werden kann, gibt an, wie man einen optimalen Transportplan für das offene Transportproblem OTP mit Hilfe des klassischen Transportproblems KTP-O gewinnen kann.

**Satz 2.21**

Ist  $y_{ij}^0$ ,  $i = 1, \dots, m+1$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ , ein optimaler Transportplan für das klassische Transportproblem KTP-O, dann ist

$$\left. \begin{aligned} x_{ij_i}^0 &= w_{ij_i}^0 + y_{i,n+1}^0, & \text{falls } j_i > 0 \\ x_{ij}^0 &= w_{ij}^0, & j = 1, \dots, n, j \neq j_i \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.66)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} w_{i_j j}^0 &= y_{i_j j}^0 + y_{m+1,j}^0, & \text{falls } i_j > 0 \\ w_{ij}^0 &= y_{ij}^0, & i = 1, \dots, m, i \neq i_j \end{aligned} \right\} \quad j = 1, \dots, n \quad (2.67)$$

ein optimaler Transportplan des offenen Transportproblems OTP.

Es sei  $y^0$  ein konkreter optimaler Transportplan des zugeordneten klassischen Transportproblems KTP-O. In einem Ausgangsort  $A_k$ ,  $k \in I_1$ , wird weniger als die maximal verfügbare Menge  $a_k$  abtransportiert, wenn  $y_{k,n+1}^0 > 0$  und  $j_k = 0$  gilt. Bei einem Ausgangsort  $A_k$ ,  $k \in I_3$ , übersteigt die abtransportierte Menge die untere Kapazitätsgrenze  $a_k$ , wenn es eine Spalte  $l \in J$  gibt, für die  $y_{m+1,l}^0 > 0$  und  $i_l = k$  gilt. In einem Bestimmungsort  $B_l$ ,  $l \in J_1$ , wird weniger als der maximale Bedarf  $b_l$  angeliefert, falls  $y_{m+1,l}^0 > 0$  und  $i_l = 0$  gilt. In einem Bestimmungsort  $B_l$ ,  $l \in J_3$ , wird mehr als der Mindestbedarf  $b_l$  angeliefert, wenn es eine Zeile  $k \in I$  gibt, für die  $y_{k,n+1}^0 > 0$  und  $j_k = l$  gilt.

Der Vorgang des Lösen eines offenen Transportproblems mit gemischten Restriktionen soll an einem kleinen Beispiel verdeutlicht werden.

**Beispiel 2.17**

Die folgende Datentabelle beschreibt ein offenes Transportproblem mit gemischten Restriktionen:

$c_{ij}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	4	5	1	-1	$\leq 5$
$A_2$	5	2	9	3	$= 9$
$A_3$	-5	1	-2	3	$= 6$
	$\leq$	$=$	$\geq$	$\geq$	
$b_j$	5	6	10	2	

Es gilt  $I_1 = \{1\}$ ,  $I_2 = \{2; 3\}$ ,  $I_3 = \emptyset$  und  $J_1 = \{1\}$ ,  $J_2 = \{2\}$ ,  $J_3 = \{3; 4\}$ . Die zugehörige Lösbarkeitsbedingung (2.59) ist wegen  $5 + 9 + 6 = 20 \geq 18 = 6 + 10 + 2$  erfüllt.

Das Transportproblem wird um eine Zeile und eine Spalte erweitert. Die neue Vorratsmenge erhält den Wert  $a_4 = 5+6+10+2 = 23$ , die neue Bedarfsmenge den Wert  $b_5 = 5+9+6 = 20$ . Für die Bewertung der Felder der neuen Spalte werden die entsprechenden Minima gebildet und die zugehörigen Spaltenindizes festgelegt:

$$\begin{aligned} c_{15} &= \min\{0; \min\{1; -1\}\} = -1, & j_1 &= 4 \\ c_{25} &= \min\{9; 3\} = 3, & j_2 &= 4 \\ c_{35} &= \min\{-2; 3\} = -2, & j_3 &= 3 \end{aligned}$$

Wegen  $c_{15} < 0$  wird in jedem optimalen Transportplan der gesamte Vorrat im Ausgangsort  $A_1$  abtransportiert. Da  $I_3 = \emptyset$  gilt, werden die Felder in der zusätzlichen Zeile mit  $c_{41} = 0$ ,  $c_{42} = c_{43} = c_{44} = M$  bewertet und formal  $i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = 0$  gesetzt. Im Bedarfsort  $B_1$  kann demzufolge in einem optimalen Transportplan die obere Bedarfsschranke unterschritten werden.

Die Datentabelle

$c_{ij}$	1	2	3	4	5	$a_i$
1	4	5	1	-1	-1	5
2	5	2	9	3	3	9
3	-5	1	-2	3	-2	6
4	0	$M$	$M$	$M$	0	23
$b_j$	5	6	10	2	20	

beschreibt das zu lösende klassische Transportproblem KTP-O. Die folgende linke Tabelle enthält die eindeutige Optimallösung  $y^0$  von KTP-O. Die rechte Tabelle weist die zugehörigen Optimalitätsindikatoren aus.

$y_{ij}^0$	1	2	3	4	5	$a_i$
1			5			5
2		6		2	1	9
3	1		5			6
4	4				19	23
$b_j$	5	6	10	2	20	

$c_{ij}'$	1	2	3	4	5
1	6	8	0	1	1
2	2	0	3	0	0
3	0	7	0	8	3
4	0	$M+1$	$M-3$	$M$	0

Der Transport der Menge  $y_{25}^0 = 1$  erfolgt wegen  $j_2 = 4$  von  $A_2$  nach  $B_4$ . Damit gilt  $x_{24}^0 = 2 + 1 = 3$ . Wegen  $i_1 = 0$  gibt  $y_{41}^0 = 4$  die Fehlmenge zur oberen Bedarfsschranke im Bestimmungsort  $B_1$  an.

Für das Ausgangsproblem ergibt sich damit der optimale Transportplan

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$			5	
$A_2$		6		3
$A_3$	1		5	

mit minimalem Zielfunktionswert  $z = 11$ . Es ist der einzige optimale Transportplan, da auch die Zuordnung der Zeilen- und Spaltenindizes eindeutig war.

Die Behandlung von zweiseitig beschränkten offenen Transportproblemen kann auf ein Problem mit nach oben beschränkten Variablen zurückgeführt werden und wird deshalb erst am Ende des nächsten Abschnitts behandelt.

## 2.4 Kapazitierte Transportprobleme

### 2.4.1 Das kapazitierte klassische Transportproblem

Jedes Transportproblem ist auf einen endlichen Zeitabschnitt bezogen. Damit ist die Durchlassfähigkeit der Transportverbindungen nach oben beschränkt. Diese nichtnegativen oberen Schranken seien im Folgenden durch die Größen  $s_{ij}$ ,  $(i, j) \in N$ , bezeichnet.

Das klassische Transportproblem wird nun dahingehend erweitert, dass die zu bestimmenden Transportmengen die genannten Kapazitätsschranken einzuhalten haben.

**Modell K-KTP** (kapazitiertes klassisches Transportproblem):

$$\begin{aligned}
 z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\longrightarrow \min \\
 \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & \quad i = 1, \dots, m \\
 \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & \quad j = 1, \dots, n \\
 0 \leq x_{ij} \leq s_{ij}, & \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Das für das klassische Transportproblem beschriebene Lösungsverfahren soll auch in diesem Abschnitt als Grundlage dienen, um die notwendigen Anpassungen, das heißt die Berücksichtigung der nach oben beschränkten Variablen, vorzunehmen. Zur Begründung des zu erweiternden Lösungsverfahrens ist es nützlich, die zum kapazitierten klassischen Transportproblem gehörige Dualaufgabe anzugeben. Sie besitzt die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
 Z_D = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n s_{ij} w_{ij} &\longrightarrow \max \\
 u_i + v_j - w_{ij} \leq c_{ij}, & \quad (i, j) \in N \\
 w_{ij} \geq 0, & \quad (i, j) \in N
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Die zu den Vorrats- und Bedarfsorten gehörenden Dualvariablen  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , sind nicht vorzeichenbeschränkt. Die Dualvariablen  $w_{ij}$ ,  $(i, j) \in N$ , sind den Restriktionen zu den Durchlasskapazitäten  $s_{ij}$  zugeordnet.

Für die Lösbarkeit des kapazitierten klassischen Transportproblems sind offensichtlich die Erfüllung der Lösbarkeitsbedingungen für das klassische Transportproblem (2.5) und (2.6) notwendig. An die Kostenmatrix  $C$  ist wegen der Beschränktheit des zulässigen Bereichs keine Forderung zu stellen. Zusätzlich muss aber grundsätzlich

$$s_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in N \tag{2.70}$$

gefordert werden.

Für ein kapazitiertes klassisches Transportproblem liegt durch eine Restriktion  $x_{kl} \leq s_{kl}$  wegen  $x_{kl} \leq \min\{a_k, b_l\}$  nur dann eine echte Einschränkung vor, wenn für die Durchlassfähigkeit der Transportverbindung vom Ausgangsort  $A_k$  zum Bestimmungsort  $B_l$  die

Ungleichung  $s_{kl} < \min\{a_k, b_l\}$  gilt. Ist für eine Transportverbindung von  $A_k$  nach  $B_l$  keine obere Schranke explizit vorgegeben, dann kann stets eine überflüssige Restriktion der Gestalt  $x_{kl} \leq s_{kl}$  mit einem Wert  $s_{kl} \geq \min\{a_k, b_l\}$  hinzugefügt werden.

Der Spezialfall  $s_{kl} = 0$  entspricht der Sperrung der Transportverbindung vom Ausgangsort  $A_k$  zum Bestimmungsort  $B_l$ . Im Abschnitt 2.1.5 wurde gezeigt, dass dieser Fall algorithmisch sehr einfach behandelt werden kann, indem die Restriktion nicht berücksichtigt wird, aber dafür die Kosten für den Transport einer Mengeneinheit von  $A_k$  nach  $B_l$  hinreichend groß gewählt werden. Damit kann die Schranke  $s_{kl} = 0$  durch eine überflüssige Schranke  $s_{kl} \geq \min\{a_k, b_l\}$  ersetzt werden. Die Anwendung dieses Operators ermöglicht es, sich auf Probleme mit  $s_{ij} > 0$ ,  $(i, j) \in N$ , zurückzuziehen.

Für die Herleitung weiterer Lösbarkeitsbedingungen werden die vorgegebenen oberen Schranken  $s_{ij} \geq 0$ ,  $(i, j) \in N$ , durch die oberen Schranken  $\bar{s}_{ij} = \min\{a_i, b_j, s_{ij}\}$ ,  $(i, j) \in N$ , aktualisiert. Um den Abtransport der Vorräte in den Ausgangsorten beziehungsweise den Antransport der Bedarfsmengen in den Bestimmungsorten zu garantieren, darf die Summe der aktuellen oberen Schranken der beteiligten Transportverbindungen diese Vorrats- und Bedarfsmengen nicht unterschreiten. Deshalb müssen für die lösbaren kapazitierten klassischen Transportprobleme die folgenden Ungleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \bar{s}_{ij} &\geq a_i, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m \bar{s}_{ij} &\geq b_j, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.71)$$

Allerdings reichen alle bisher angeführten, recht einfach überprüfbar notwendigen Lösbarkeitskriterien nicht aus, um die Existenz von Transportplänen für das kapazitierte klassische Transportproblem zu sichern. Der folgende Satz beschreibt einen Komplex notwendiger als auch hinreichender Lösbarkeitsbedingungen für das kapazitierte klassische Transportproblem (siehe [EmKoKr85]).

### Satz 2.22

Das kapazitierte klassische Transportproblem **K-KTP** ist genau dann lösbar, wenn die Bedingungen (2.5), (2.6), (2.70) gelten und die Ungleichungen

$$\sum_{i=1}^m \min\{a_i, \sum_{j \in J} s_{ij}\} \geq \sum_{j \in J} b_j, \quad \text{für alle } J \subset \{1, \dots, n\} \quad (2.72)$$

erfüllt sind.

Die Ungleichungen (2.72) können alternativ durch die Ungleichungen

$$\sum_{j=1}^n \max\{0, b_j - \sum_{i \in I} s_{ij}\} \leq \sum_{i \in \bar{I}} a_i, \quad \text{für alle } I \subset \{1, \dots, m\} \quad (2.73)$$

ersetzt werden, wobei  $\bar{I} = \{1, \dots, m\} \setminus I$  ist.

Die Zahl der zu prüfenden Ungleichungen wächst aber in Abhängigkeit von  $n$  exponentiell, womit eine Anwendung dieses Lösbarkeitskriteriums für großdimensionierte kapazitierte klassische Transportprobleme wenig praktikabel erscheint.

**Beispiel 2.18**

Gegeben sei ein Transportproblem mit den Vorratsmengen  $a_1 = 72$ ,  $a_2 = 64$ ,  $a_3 = 16$  und den Bedarfsmengen  $b_1 = 64$ ,  $b_2 = 56$ ,  $b_3 = 24$ ,  $b_4 = 8$ . Die Durchlassfähigkeit aller Transportverbindungen sei durch  $s = 25$  nach oben beschränkt.

Die folgende Tabelle listet neben den Vorrats- und Bedarfsmengen die aktualisierten oberen Schranken auf:

$\bar{s}_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1	25	25	24	8	72
2	25	25	24	8	64
3	16	16	16	8	16
$b_j$	64	56	24	8	

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass die notwendigen Bedingungen (2.5), (2.6), (2.70) und (2.71) erfüllt sind. Um den Abtransport der Vorratsmengen und den Antransport der Bedarfsmengen zu garantieren, folgt wegen den Nichtnegativitätsbedingungen und den aktuellen oberen Schranken die Gültigkeit der Ungleichung  $x_{31} \geq 14$  aus Spalte 1, die Gültigkeit von  $x_{32} \geq 6$  aus Spalte 2 und  $x_{31} + x_{32} \leq 16$  aus Zeile 3. Diese drei Bedingungen sind unvereinbar. Dies drückt sich im Satz 2.22 dadurch aus, dass die dort formulierten Ungleichungen (2.72) für  $J = \{1; 2\}$  beziehungsweise die Ungleichungen (2.73) für  $I = \{1; 2\}$  nicht erfüllt sind.

Für das noch zu beschreibende erweiterte Lösungsverfahren wird der Unlösbarkeitstest beziehungsweise die Konstruktion eines ersten Transportplans durch eine zu lösende Ersetzungsaufgabe analog der Phase 1 der Simplexmethode für gewöhnliche lineare Optimierungsaufgaben realisiert werden.

**Bemerkung 2.24**

Die Berücksichtigung von zusätzlichen nichtnegativen unteren Schranken  $u_{ij}$ ,  $(i, j) \in N$ , der Form  $x_{ij} \geq u_{ij}$ ,  $(i, j) \in N$ , für das kapazitierte klassische Transportproblem K-KTP ist unproblematisch. Sind die notwendigen Lösbarkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n u_{ij} &\leq a_i, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m u_{ij} &\leq b_j, \quad j = 1, \dots, n \\ u_{ij} &\leq s_{ij}, \quad (i, j) \in N \end{aligned}$$

erfüllt, dann lassen sich die unteren Schranken durch die Transformationen

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{ij} &= x_{ij} - u_{ij}, \quad (i, j) \in N \\ \tilde{a}_i &= a_i - \sum_{j=1}^n u_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \\ \tilde{b}_j &= b_j - \sum_{i=1}^m u_{ij}, \quad j = 1, \dots, n \\ \tilde{s}_{ij} &= s_{ij} - u_{ij}, \quad (i, j) \in N \end{aligned}$$

beseitigen.

Es besteht theoretisch die Möglichkeit, das kapazitierte klassische Transportproblem in ein klassisches Transportproblem mit Sperrungen zu überführen. Dabei muss vorausgesetzt werden, dass zumindest die angegebenen notwendigen Lösbarkeitsbedingungen erfüllt sind. Nach Einführung von Schlupfvariablen  $y_{ij}$  zu den Restriktionen  $x_{ij} \leq s_{ij}$ ,  $(i, j) \in N$ , kann die Aufgabe (2.68) wie folgt äquivalent umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\longrightarrow \min \\
 x_{ij} + y_{ij} = \bar{s}_{ij}, &\quad (i, j) \in N \\
 \sum_{i=1}^m y_{ij} = b_j, &\quad j = 1, \dots, n \\
 \sum_{j=1}^n y_{ij} = \bar{a}_i, &\quad i = 1, \dots, m \\
 x_{ij} \geq 0, &\quad (i, j) \in N \\
 y_{ij} \geq 0, &\quad (i, j) \in N
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Dabei wird  $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^n \bar{s}_{ij} - a_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , als Abkürzung verwendet.

Die Aufgabe (2.74) lässt sich in ein klassisches Transportproblem mit gesperrten Transportverbindungen integrieren, welches durch die folgende Datentabelle beschrieben wird:

Kosten									Vorrat
	$c_{11}$	$M$	$\dots$	$M$	$0$	$M$	$\dots$	$M$	$\bar{s}_{11}$
	$M$	$c_{12}$	$\dots$	$M$	$0$	$M$	$\dots$	$M$	$\bar{s}_{12}$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$M$	$M$	$\dots$	$c_{1n}$	$0$	$M$	$\dots$	$M$	$\bar{s}_{1n}$
	$c_{21}$	$M$	$\dots$	$M$	$M$	$0$	$\dots$	$M$	$\bar{s}_{21}$
	$M$	$c_{22}$	$\dots$	$M$	$M$	$0$	$\dots$	$M$	$\bar{s}_{22}$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$M$	$M$	$\dots$	$c_{2n}$	$M$	$0$	$\dots$	$M$	$\bar{s}_{2n}$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$c_{m1}$	$M$	$\dots$	$M$	$M$	$M$	$\dots$	$0$	$\bar{s}_{m1}$
	$M$	$c_{m2}$	$\dots$	$M$	$M$	$M$	$\dots$	$0$	$\bar{s}_{m2}$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$M$	$M$	$\dots$	$c_{mn}$	$M$	$M$	$\dots$	$0$	$\bar{s}_{mn}$
Bedarf	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_n$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\dots$	$\bar{a}_m$	

Zum Feld mit den Einträgen  $c_{ij}$  gehört die Variablen  $x_{ij}$ . Der in der gleichen Zeile stehende Kosteneintrag Null ist der Variablen  $y_{ij}$  zugeordnet. Alle mit der hinreichend großen Zahl  $M$  bewerteten Felder gehören zu künstlich hinzugefügten Variablen, die den Wert Null erhalten müssen, um einen Transportplan für das kapazitierte klassische Transportproblem zu erhalten.

Der Nachteil dieser Vorgehensweise liegt darin, dass die Dimension des zugeordneten klassischen Transportproblems mit Sperrungen durch  $mn(n+m)$  Felder beschrieben wird und damit die Ausgangsdimension von  $mn$  Felder wesentlich überschreitet.

### 2.4.2 Erweiterung des primalen Lösungsverfahrens

In diesem Abschnitt wird eine Erweiterung des im Abschnitt 2.1.4 beschriebenen Lösungsverfahrens für das klassische Transportproblem vorgenommen. Im Ergebnis der nachfolgenden Analysen werden nur geringfügige Änderungen im vorliegenden Algorithmus vorzunehmen sein.

Die Daten sollen wieder den Voraussetzungen  $a_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $b_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , und  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$  genügen. Weiterhin wird  $s_{ij} > 0$ ,  $(i, j) \in N$ , angenommen, das heißt eventuelle Sperrungen von einzelnen Transportverbindungen werden wie bereits besprochen durch hinreichend hohe Kosten realisiert.

Das kapazitierte klassische Transportproblem beschreibt eine spezielle lineare Optimierungsaufgabe mit nach oben beschränkten Variablen. Die oberen Schranken für die Variablen können im Simplex-Algorithmus direkt integriert werden. Man spricht dann von der sogenannten *Upper-Bound-Technik* für lineare Optimierungsaufgaben (siehe u.a. [DaTha97]). In jeder zulässigen Basislösung des kapazitierten klassischen Transportproblems gibt es maximal  $m+n-1$  Variable mit der Eigenschaft  $0 < x_{ij} < s_{ij}$ . Dies rechtfertigt die folgende Erweiterung des Basisbegriffs für Aufgaben mit nach oben beschränkten Variablen, ohne die zusätzlichen Restriktionen in der Restriktionsmatrix explizit zu berücksichtigen.

#### Definition 2.6

Ein Transportplan des kapazitierten klassischen Transportproblems K-KTP heißt *zulässige Basislösung*, wenn die Aktivitätsvektoren  $a_{ij}$  der Koeffizientenmatrix  $A$  aus (2.15) zu den Komponenten  $x_{ij}$  mit  $0 < x_{ij} < s_{ij}$  linear unabhängig sind.

Zur Beschreibung einer Basis bezüglich der in (2.15) dargestellten Koeffizientenmatrix  $A$  benötigt man  $m+n-1$  linear unabhängige Aktivitätsvektoren aus  $A$ . Eine zulässige Basislösung ist degeneriert, wenn die Anzahl der Variablen  $x_{ij}$  mit  $0 < x_{ij} < s_{ij}$  kleiner als  $m+n-1$  ist. In diesem Fall lässt sich aber das vorliegende System linear unabhängiger Aktivitätsvektoren  $a_{ij}$  stets zu einer Basis, bestehend aus  $m+n-1$  linear unabhängigen Aktivitätsvektoren  $a_{ij}$  aus  $A$  erweitern. Für eine degenerierte zulässige Basislösung gibt es demzufolge Basisvariablen, die den Wert an der unteren beziehungsweise an der oberen Schranke annehmen.

Die Beschreibung einer zulässigen Basislösung nur durch die Menge  $B$  reicht im Gegensatz zum klassischen Transportproblem hier nicht mehr aus. Eine zulässige Basislösung  $x$  des kapazitierten klassischen Transportproblems ist charakterisiert durch eine Menge von besetzten Feldern  $B$  und durch die folgenden zwei Mengen für die freien Felder:

$$\begin{aligned} N_0 &= \{ (i, j) \in N \setminus B \mid x_{ij} = 0 \} \\ N_1 &= \{ (i, j) \in N \setminus B \mid x_{ij} = s_{ij} \} \end{aligned}$$

Die Menge  $B$  stellt die Basis dar. Sie enthält genau  $m+n-1$  Felder  $(i, j)$ , deren zugehörige Aktivitätsvektoren  $a_{ij}$  der Koeffizientenmatrix  $A$  aus (2.15) linear unabhängig sind. Darunter befinden sich alle Felder  $(i, j)$  mit der Eigenschaft  $0 < x_{ij} < s_{ij}$ . Die Menge  $N_0$  erfasst alle Nichtbasisvariablen an der unteren Schranke und die Menge  $N_1$  alle Nichtbasisvariablen an der oberen Schranke. Eine Nichtbasisvariable an der oberen Schranke wird auch *gesättigte* Variable genannt. Um die eindeutige Differenzierung  $N_0 \cap N_1 = \emptyset$  vornehmen zu können, wurde die Voraussetzung  $s_{ij} > 0$ ,  $(i, j) \in N$ , am Anfang dieses Abschnittes postuliert.

**Beispiel 2.19**

Gegeben ist ein kapazitiertes klassisches Transportproblem, dessen Vorrats- und Bedarfsgrößen und die Durchlasskapazitäten durch die linke Tabelle gegeben sind. Die rechte Tabelle gibt einen Transportplan wieder.

$s_{ij}$	1	2	3	$a_i$
1	6	8	7	12
$A_2$	5	6	9	11
$A_3$	8	9	8	17
$b_j$	12	16	12	

$x_{ij}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	<b>5</b>	<b>7</b>	0
$A_2$	5	0	<b>6</b>
$A_3$	<b>2</b>	9	<b>6</b>

Genau  $m + n - 1 = 5$  Variable nehmen Werte zwischen der oberen und unteren Schranke an. Die zugehörige Menge  $B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$  ist zyklensfrei und stellt damit eine Basis dar. Die Felder  $N_0 = \{(1, 3), (2, 2)\}$  gehören zu den Nichtbasisvariablen an der unteren Schranke und die Felder  $N_1 = \{(2, 1), (3, 2)\}$  zu den Nichtbasisvariablen an der oberen Schranke.

Ein Optimalitätskriterium für das kapazitierte klassische Transportproblem (2.68) kann mit Hilfe der zugehörigen Dualaufgabe (2.69) formuliert werden. Es sei  $x_{ij}^0$ ,  $(i, j) \in N$ , ein optimaler Transportplan. Aus dem Satz vom komplementären Schlupf folgt die Existenz einer dualen Optimallösung  $u_i^0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $v_j^0$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $w_{ij}^0$ ,  $(i, j) \in N$ , die den folgenden Bedingungen genügt:

- Es sei  $0 < x_{ij}^0 < s_{ij}$ . Wegen  $x_{ij}^0 > 0$  muss die zugehörige duale Ungleichung als Gleichung erfüllt werden. Wegen  $x_{ij}^0 < s_{ij}$  muss noch die zugehörige Dualvariable Null sein. Damit gilt  $w_{ij}^0 = 0$ . Letztendlich erhält man  $u_i^0 + v_j^0 = c_{ij}$ .
- Es sei  $x_{ij}^0 = 0$ . Dann gilt  $0 = x_{ij}^0 < s_{ij}$ , womit  $w_{ij}^0 = 0$  ist. Damit folgt daraus die Ungleichung  $u_i^0 + v_j^0 \leq c_{ij}$ .
- Es sei  $x_{ij}^0 = s_{ij}$ . Damit gilt  $x_{ij}^0 > 0$  und die zugehörige duale Ungleichung muss als Gleichung erfüllt werden. Diese Gleichung  $u_i + v_j - w_{ij} = c_{ij}$  kann wegen  $w_{ij} \geq 0$  durch die Ungleichung  $u_i + v_j \geq c_{ij}$  ersetzt werden.

Damit kann man wie beim klassischen Transportproblem auch hier die Berechnung der Potentiale mit Hilfe der Formel (2.17) realisieren:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \quad (i, j) \in B$$

Nun ist nur noch die Erfüllung der entsprechenden Ungleichungen für die freien Variablen zu überprüfen. Dazu werden wie in (2.18) die Optimalitätsindikatoren nach der Vorschrift

$$c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j, \quad (i, j) \in N_0 \cup N_1,$$

berechnet.

**Satz 2.23**

Es sei  $x$  eine zulässige Basislösung des kapazitierten klassischen Transportproblems K-KTP mit der Basis  $B$  und den freien Feldern  $N_0 \cup N_1$ . Gelten für die nach (2.17) und (2.18) berechneten Optimalitätsindikatoren die Beziehungen

$$\begin{aligned} c'_{ij} &\geq 0, \quad (i, j) \in N_0, \\ c'_{ij} &\leq 0, \quad (i, j) \in N_1, \end{aligned} \tag{2.75}$$

dann ist  $x$  ein optimaler Transportplan.



Damit hat man gegenüber dem klassischen Transportproblem praktisch keinen nennenswerten Mehraufwand zur Überprüfung der Optimalität einer zulässigen Basislösung für das kapazitierte klassische Transportproblem.

Von den Schritten 1-3 des Optimierungsverfahrens zum klassischen Transportproblem aus Abschnitt 2.1.4 muss nur im Schritt 3 die erweiterte Bedingung (2.75) geprüft werden.

Das Optimalitätskriterium sei für eine zulässige Basislösung  $x$ , charakterisiert durch die zu den freien Feldern gehörenden Mengen  $N_0$  und  $N_1$ , nicht erfüllt. Dann gibt es wenigstens ein Feld  $(k, l) \in N_0 \cup N_1$  mit  $c'_{kl} < 0$ , falls  $(k, l) \in N_0$ , beziehungsweise  $c'_{kl} > 0$ , falls  $(k, l) \in N_1$ . Der Schritt 4 des Optimierungsverfahrens aus Abschnitt 2.1.4 kann wie folgt angepasst werden:

Bestimme ein Feld  $(k, l) \in N_0 \cup N_1$  mit

$$|c'_{kl}| = \max \left\{ \max_{(i,j) \in N_0} (-c'_{ij}), \max_{(i,j) \in N_1} c'_{ij} \right\} \quad (2.76)$$

Im Falle  $N_0 = \emptyset$  beziehungsweise  $N_1 = \emptyset$  sind die entsprechenden Maxima formal unendlich klein zu setzen. Hier erfolgt die Auswahl eines freien Feldes  $(k, l)$  nach der Regel, welche die lokal beste Zielfunktionswertverbesserung beschreibt.

Mit dem festgelegten freien Feld  $(k, l)$  kann der eindeutig bestimmte Austauschzyklus, bestehend aus dem freien Feld und sonst nur besetzten Feldern aus  $B$  mit Hilfe von Schritt 5 des Optimierungsverfahrens aus Abschnitt 2.1.4 bestimmt werden. Die dabei erzeugte Menge  $B^+$  enthält das Feld  $(k, l)$  und jedes weitere zweite Feld des Zyklus und die Menge  $B^-$  alle nicht zu  $B^+$  gehörigen Felder des Zyklus. Da nun zu unterscheiden ist, ob  $(k, l)$  ein freies Feld ist, dass zu einer Nichtbasisvariablen an der unteren *oder* an der oberen Schranke gehört und die Durchlasskapazitäten der zum Austauschzyklus gehörigen Variablen bei deren Abänderung zu beachten sind, müssen die Schritte 6 und 7 des Optimierungsverfahrens generell modifiziert werden.

**Fall 1:** Es sei  $(k, l) \in N_0$ , das heißt  $x_{kl} = 0$ .

Um die Zulässigkeit der neuen Basislösung zu garantieren, ist die Änderungsgröße  $d$  wie folgt zu bestimmen:

$$d = \min \left\{ \min_{(i,j) \in B^-} x_{ij}, \min_{(i,j) \in B^+} (s_{ij} - x_{ij}) \right\}$$

Die Änderung der Variablenwerte erfolgt wie bisher:

$$\begin{aligned} x_{ij} &:= x_{ij} + d, & (i, j) \in B^+ \\ x_{ij} &:= x_{ij} - d, & (i, j) \in B^- \\ z &:= z + c'_{kl} d \end{aligned}$$

Im Fall  $d = x_{pq}$ ,  $(p, q) \in B^-$ , wird  $x_{pq}$  neue Nichtbasisvariable an der unteren Schranke:

$$B := (B \setminus \{(p, q)\}) \cup \{(k, l)\}, \quad N_0 := (N_0 \setminus \{(k, l)\}) \cup \{(p, q)\}$$

Im Fall  $d = s_{pq} - x_{pq}$ ,  $(p, q) \in B^+$ , wird  $x_{pq}$  neue Nichtbasisvariable an der oberen Schranke:

$$B := (B \setminus \{(p, q)\}) \cup \{(k, l)\}, \quad N_0 := N_0 \setminus \{(k, l)\}, \quad N_1 := N_1 \cup \{(p, q)\}$$

Zu beachten ist, dass auch der Fall  $(k, l) = (p, q)$  eintreten kann. Dann wird  $x_{pq}$  keine neue Basisvariable, sondern eine gesättigte Variable. Die Basismenge  $B$  ändert sich nicht.

**Fall 2:** Es sei  $(k, l) \in N_1$ , das heißt  $x_{kl} = s_{kl}$ .

Da  $x_{kl}$  eine gesättigte Nichtbasisvariable ist, muss von ihr und damit auch von allen anderen Variablen aus der Menge  $B^+$  die zu bestimmende Änderungsgröße  $d$  abgezogen werden. In der Menge  $B^-$  ist die Größe  $d$  dann zu addieren.

Um die Zulässigkeit der neuen Basislösung zu garantieren, ist die Zahl  $d$  wie folgt zu bestimmen:

$$d = \min\left\{ \min_{(i,j) \in B^-} (s_{ij} - x_{ij}), \min_{(i,j) \in B^+} x_{ij} \right\}$$

Entgegengesetzt zu Fall 1 ändern sich die Variablenwerte und die Gesamtkosten wie folgt:

$$\begin{aligned} x_{ij} &:= x_{ij} - d, & (i, j) \in B^+ \\ x_{ij} &:= x_{ij} + d, & (i, j) \in B^- \\ z &:= z - c'_{kl} d \end{aligned}$$

Im Fall  $d = s_{pq} - x_{pq}$ ,  $(p, q) \in B^-$ , wird  $x_{pq}$  neue Nichtbasisvariable an der oberen Schranke:

$$B := (B \setminus \{(p, q)\}) \cup \{(k, l)\}, \quad N_1 := (N_1 \setminus \{(k, l)\}) \cup \{(p, q)\}$$

Im Fall  $d = x_{pq}$ ,  $(p, q) \in B^+$ , wird  $x_{pq}$  neue Nichtbasisvariable an der unteren Schranke:

$$B := (B \setminus \{(p, q)\}) \cup \{(k, l)\}, \quad N_0 := N_0 \cup \{(p, q)\}, \quad N_1 := N_1 \setminus \{(k, l)\}$$

Auch im Fall 2 kann  $(k, l) = (p, q)$  sein.  $x_{pq}$  als bisher gesättigte Variable nimmt den Wert Null an und wird Nichtbasisvariable an der unteren Schranke. Die Basismenge  $B$  ändert sich nicht.

Da stets nur genau einer der oben beschriebenen vier Möglichkeiten eines Basiswechsels eintritt, stellt die Modifikation der Schritte 6 und 7 des Optimierungsverfahrens aus Abschnitt 2.1.4 nur einen höheren Beschreibungsaufwand, aber keinen wesentlich höheren Rechenaufwand dar.

Letztendlich ist nur noch zu klären, wie man eine erste zulässige Basislösung erzeugen kann, um mit dem modifizierten Lösungsverfahren starten zu können.

An Hand von Beispiel 2.18 wurde bereits demonstriert, dass ein kapazitiertes klassisches Transportproblem nicht unbedingt lösbar sein muss. Die Überprüfung der im Satz 2.22 formulierten Lösbarkeitsbedingungen war zu aufwendig.

Deshalb soll dem kapazitierten klassischen Transportproblem eine Ersatzaufgabe zugeordnet werden, die nach ihrer Lösung entweder die Unlösbarkeit anzeigt oder aber einen optimalen Transportplan für das ursprüngliche Modell liefert. Die zu beschreibende Methode stellt nichts weiter dar, als die Analogie zur sogenannten *BIG-M-Methode* zur Lösung von linearen Optimierungsaufgaben (siehe [BeiMen87]) dar.

In jeder Gleichungsrestriktion des kapazitierten klassischen Transportproblem wird eine künstliche Variable eingefügt. Die zu den Ausgangsorten  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , gehörigen Variablen seien mit  $x_{i,n+1}$  und die zu den Bestimmungsorten  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , gehörigen Variablen mit  $x_{m+1,j}$  bezeichnet. Die Kosten der künstlichen Variablen werden durch  $c_{i,n+1} = M$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und  $c_{m+1,j} = M$ ,  $j = 1, \dots, n$ , festgelegt, wobei  $M$  eine hinreichend große Zahl darstellt. Damit werden die künstlichen Variablen im Optimierungsprozess wie gesperrte Variablen behandelt.

Das Transportproblem wird damit um eine Zeile und eine Spalte, also um einen fiktiven Ausgangsort  $A_{m+1}$  und einen fiktiven Bestimmungsort  $B_{n+1}$  erweitert. Dem zusätzlich anfallenden Feld  $(m+1, n+1)$  wird die Variable  $x_{m+1, n+1}$  zugeordnet. Ihr kommt eine besondere Bedeutung zu. Sie wird deshalb auch nicht als künstliche Variable bezeichnet. Die zugehörigen Kosten werden mit  $c_{m+1, n+1} = 0$  bewertet.

Dem fiktiven Ausgangsort  $A_{m+1}$  wird die Vorratsmenge  $a_{m+1} = G$  und dem fiktiven Bestimmungsort  $B_{n+1}$  der Bedarf  $b_{n+1} = G$  zugeordnet. Dabei sei  $G = \sum_{i=1}^m a_i$  eine Abkürzung für die insgesamt zu transportierende Menge.

Die Menge  $\bar{N} = \{(i, j) \mid i = 1, \dots, m+1, j = 1, \dots, n+1\}$  beschreibt die Menge aller Transportverbindungen im erweiterten Transportproblem. Für die neu hinzugekommenen Felder sind noch überflüssige Durchlasskapazitäten zu definieren. Dies geschieht zum Beispiel durch die Wahl  $s_{ij} \geq G$ ,  $(i, j) \in \bar{N} \setminus N$ .

Mit den beschriebenen Daten wird nun dem kapazitierten klassischen Transportproblem das folgende Ersatzproblem **K-KTP\*** zugeordnet:

$$\begin{aligned}
 z^*(x) = & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + M \left( \sum_{i=1}^m x_{i, n+1} + \sum_{j=1}^n x_{m+1, j} \right) \longrightarrow \min \\
 & \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^{n+1} x_{m+1, j} = G \\
 & \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n \\
 & \sum_{i=1}^{m+1} x_{i, n+1} = G \\
 & 0 \leq x_{ij} \leq s_{ij}, \quad (i, j) \in \bar{N}
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Alle Vorrats- und Bedarfsmengen dieser Ersatzaufgabe sind positiv und auch die Gleichgewichtsbedingung ist offensichtlich erfüllt. Außerdem gilt

$$x_{m+1, n+1} = G - \sum_{i=1}^m x_{i, n+1} = G - \sum_{i=1}^m (a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij},$$

womit die zusätzliche Variable  $x_{m+1, n+1}$  die zu transportierende Menge im ursprünglichen kapazitierten klassischen Transportproblem beschreibt.

Da die künstlichen Variablen keine einschränkenden oberen Schranken besitzen, stellt

$$\begin{aligned}
 x_{i, n+1} &= a_i, \quad i = 1, \dots, m, \\
 x_{m+1, j} &= b_j, \quad j = 1, \dots, n, \\
 x_{m+1, n+1} &= 0, \\
 x_{ij} &= 0, \quad (i, j) \in N,
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

eine zulässige Basislösung  $x$  mit den Mengen  $B = \bar{N} \setminus N$ ,  $\bar{N}_0 = N$  und  $\bar{N}_1 = \emptyset$  dar. Die Gesamtkosten betragen allerdings  $z^* = 2MG$ . Damit liegt ein maximaler Transportplan für K-KTP\* vor.

An dieser Stelle soll das im Abschnitt 2.1.3 beschriebene Eröffnungsverfahren für die vorliegende Ersatzaufgabe angepasst werden, um das modifizierte Lösungsverfahren nicht mit der denkbar schlechtesten Basislösung zu beginnen.

Generell ist bei dem Eröffnungsverfahren für die Ersatzaufgabe des kapazitierten klassischen Transportproblems für ein ausgewähltes Feld  $(k, l)$  neben den aktuellen Vorrats- und Bedarfsmengen noch die Durchlasskapazität zu berücksichtigen. Damit ist die Wertzuweisung im Schritt 2 durch

$$x_{kl} = \min\{a_k, b_l, s_{kl}\} \quad (2.79)$$

zu aktualisieren. Das Feld  $(k, l)$  gehört genau dann zur Basismenge, wenn durch die Wertzuweisung der aktuelle Vorrat  $a_k$  oder der aktuelle Bedarf  $b_l$  (oder beides) ausgeschöpft wird. Wird der Wert von  $x_{kl}$  lediglich durch die Schranke  $s_{kl}$  bestimmt, dann gehört das Feld  $(k, l)$  zur Menge der gesättigten Variablen und damit zu  $\bar{N}_1$ . Im Transporttableau sollten die Einträge zu den Feldern  $\bar{N}_1$  extra gekennzeichnet werden, um sie von den Einträgen der Basisfelder  $B$  unterscheiden zu können. Felder, in denen nach Abschluss des Eröffnungsverfahrens nichts eingetragen ist, gehören dann zur Menge  $\bar{N}_0$ .

Für das Ersatzproblem K-KTP\* ist die Anwendung der Spaltenminimumregel oder der modifizierten Spaltenminimumregel sinnvoll. Dabei werden generell zuerst die ersten  $n$  Spalten abgearbeitet. Da die Variablen  $x_{m+1,j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , weder durch die überflüssigen oberen Schranken  $s_{m+1,j}$  noch durch den zur Zeile  $m+1$  gehörigen Vorrat  $G$  eingeschränkt sind, können durch sie allein die Spaltenbedingungen erfüllt werden. In der letzten Spalte  $n+1$  ist dann nur noch in allen nichtgestrichenen Zeilen  $i$  den Variablen  $x_{i,n+1}$  der verbliebene aktuelle Vorrat  $a_i$  zuzuordnen. Diese letzten Eintragungen gehören dann auch zur Basismenge  $B$ .

Da der zulässige Bereich der Ersatzaufgabe (2.77) nicht leer, beschränkt und abgeschlossen ist, existiert für jede lineare Kostenfunktion stets ein optimaler Transportplan  $x^0$ . Ein solcher Transportplan kann mit dem beschriebenen erweiterten Optimierungsverfahren bestimmt werden.

### Satz 2.24

Es sei  $x^0$  ein optimaler Transportplan der Ersatzaufgabe K-KTP\*. Gilt  $x_{m+1,n+1}^0 < G$ , dann besitzt das kapazitierte klassische Transportproblem keine zulässigen Lösungen.

Im Fall  $x_{m+1,n+1}^0 = G$  gilt  $x_{i,n+1}^0 = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und  $x_{m+1,j}^0 = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Alle künstlichen Variablen besitzen den Wert Null. Die Variablen  $x_{ij}^0$ ,  $(i, j) \in N$ , erfüllen damit die Restriktionen des Ausgangsproblems K-KTP.

### Bemerkung 2.25

Es sei  $E = \{(i, j) \in N \mid s_{ij} = 0\}$ . Durch die Manipulation  $c_{ij} = M$  und  $s_{ij} \geq \min\{a_i, b_j\}$  für alle  $(i, j) \in E$  konnten die unteren Schranken Null durch positive obere Schranken ersetzt und die Sperrungen durch hinreichend hohe Kosten repräsentiert werden.

Gilt für einen optimalen Transportplan  $x^0$  von K-KTP\* die Beziehung  $x_{m+1,n+1}^0 = G$  und zusätzlich  $x_{ij}^0 = 0$ ,  $(i, j) \in E$ , dann ist  $x_{ij}^0$ ,  $(i, j) \in N$ , ein optimaler Transportplan für das kapazitierte klassische Transportproblem.

Hat man während des Lösungsverfahrens einen Transportplan  $\bar{x}$  für die Ersatzaufgabe mit  $\bar{x}_{m+1,n+1} = G$  gefunden, dann kann man sich den weiteren Lösungsablauf dadurch vereinfachen, in dem man die Zeile  $m + 1$  und die Spalte  $n + 1$  in den künftigen Transporttableaus nicht mehr mitführt. An dem folgenden recht kleinen Beispiel soll der gesamte algorithmische Ablauf demonstriert werden.

**Beispiel 2.20**

Von zwei Gruben  $G_1$  und  $G_2$  ist das tägliche Aufkommen an Rohbraunkohle (in Ganzzügen) bekannt. Die Rohbraunkohle wird mit der Werksbahn zu drei Kraftwerken  $K_j$  mit dem täglichen Bedarf  $b_j$  (in Ganzzügen) transportiert. Die Netze der Werksbahn beschränken den täglichen Transport von Ganzzügen. Die folgende linke Tabelle gibt die oberen Schranken  $s_{ij}$  sowie Aufkommen und Bedarf für einen Tag an. Die rechte Tabelle beschreibt die Entfernungsmatrix. Es wird angenommen, dass die Transportkosten für einen Ganzzug proportional zur zurückgelegten Strecke ist.

Schranken	Kraftwerk			Aufkommen
	1	2	3	
Grube 1	6	8	5	10
Grube 2	8	5	8	17
Bedarf	9	11	7	

Entfernungen	Kraftwerk		
	1	2	3
Grube 1	17	16	15
Grube 2	18	13	17

Es ist ein Transportplan zu bestimmen, der unter Einhaltung der gegebenen Beschränkungen die insgesamt anfallenden Transportaufwendungen zwischen Gruben und Kraftwerken minimiert.

Die Ersatzaufgabe wird durch die nachfolgende erweiterte Tabelle beschrieben. Dabei wurden die oberen Schranken rechts oberhalb von den Kostenkoeffizienten plaziert. Die Variablen in den zusätzlichen Reihen erhalten die (willkürlich gewählte) überflüssige obere Schranke  $s = 30$ . Die Schranke  $s_{23} = 8$  ist übrigens auch stets inaktiv. Für die Wahl der hinreichend großen Zahl  $M$  genügt  $M > 27 \cdot 18 = 486$ . In der konkreten Rechnung wird  $M = 500$  verwendet.

$c_{ij}^{s_{ij}}$	1	2	3	4	$a_i$
1	$17^6$	$16^8$	$15^5$	$500^{30}$	10
2	$18^8$	$13^5$	$17^8$	$500^{30}$	17
3	$500^{30}$	$500^{30}$	$500^{30}$	$0^{30}$	27
$b_j$	9	11	7	27	

Die Anwendung der oben beschriebenen Spaltenminimumregel liefert die Wertzuweisungen in der folgenden Reihenfolge:

- $x_{11} = 6$  als Nichtbasivariable an der oberen Schranke
- $x_{21} = 3$  als Basisvariable (Spalte 1 gestrichen)
- $x_{22} = 5$  als Nichtbasivariable an der oberen Schranke
- $x_{12} = 4$  als Basisvariable (Zeile 1 gestrichen)
- $x_{32} = 2$  als Basisvariable (Spalte 2 gestrichen)
- $x_{23} = 7$  als Basisvariable (Spalte 3 gestrichen)
- $x_{24} = 2$  und  $x_{34} = 25$  als Basisvariable in der zusätzlichen Spalte

Die nächste Tabelle zeigt den erzeugten Transportplan mit  $z^* = 404 + 4 \cdot 500 = 2404$ . Die Nichtbasisvariablen an der oberen Schranke wurden mit einem Stern markiert. Die Felder für die Nichtbasisvariablen mit dem Wert Null an der unteren Schranke bleiben frei.

$x_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1	6*	4			10
2	3	5*	7	2	17
3		2		25	27
$b_j$	9	11	7	27	

Der vorliegende Transportplan der Ersatzaufgabe wird nun auf Optimalität getestet. In der folgenden linken Tabelle wurden die Potentiale aus dem Gleichungssystem (2.17) berechnet und anschließend die Summe der Potentiale in den noch freien Feldern eingetragen. Die Berechnung der Optimalitätsindikatoren nach (2.18) zeigt die nachfolgende rechte Tabelle.

$u_i + v_j$	1	2	3	4	$u_i$	$c'_{ij}$	1	2	3	4
1	-966	16	-967	-484	0	1	983*	0	982	984
2	18	1000	17	500	984	2	0	-987*	0	0
3	-482	500	-483	0	484	3	982	0	983	0
$v_j$	-966	16	-967	-484						

Die Optimalitätsindikatoren aller Nichtbasisvariablen an der unteren Schranke sind nichtnegativ und erfüllen damit die Optimalitätsbedingung. Aber nicht alle Optimalitätsindikatoren der Nichtbasisvariablen an der oberen Schranke sind nichtpositiv. Der Optimalitätsindikator  $c'_{11} = 983 > 0$  erfüllt nicht die Optimalitätsbedingung. Deshalb wird genau dieses Feld  $(1, 1) \in N_1$  mittels (2.76) ausgewählt.

Ausgehend vom Feld  $(1, 1)$  wird die Änderungsgröße  $d$  entlang des Austauschzyklus alternierend subtrahiert und addiert:

$x_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1	$6^* - d$	$4 + d$			10
2	$3 + d$	$5^*$	7	$2 - d$	17
3		$2 - d$		$25 + d$	27
$b_j$	9	11	7	27	

Für die Änderungsgröße erhält man  $d = \min\{\min\{4; 5; 5\}, \min\{6; 2; 2\}\} = 2$ . Dieser Wert wird für die Felder  $(2, 4)$  und  $(3, 2)$  angenommen. Hier wird willkürlich das Feld  $(2, 4)$  ausgewählt, womit  $x_{24}$  neue Nichtbasisvariable an der unteren Schranke wird. Die transformierte zulässige Basislösung ist in der folgenden Tabelle zu finden:

$x_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1	4	6			10
2	5	5*	7		17
3		0		27	27
$b_j$	9	11	7	27	

Der aktuelle Zielfunktionswert beträgt  $z^* = 2404 - 983 \cdot 2 = 438$ .

Alle künstlichen Variablen besitzen den Wert Null und die zusätzliche Variable  $x_{34}$  hat ihren größtmöglichen Wert angenommen. Damit liegt ein Transportplan für das ursprüngliche

kapazitierte klassische Transportproblem vor. Streicht man jetzt die zusätzliche Zeile und Spalte, dann liegt für das Ausgangsproblem auch eine zulässige Basislösung vor, weil mit dem Streichen der beiden Reihen auch genau zwei Basisvariablen eliminiert werden.

$x_{ij}$	1	2	3	$a_i$
1	4	6		10
2	5	5*	7	17
$b_j$	9	11	7	

Die Gesamtkosten ändern sich dabei nicht, das heißt es gilt  $z = 438$ .

Die Berechnung der Potentiale und der Optimalitätsindikatoren für den vorliegenden Transportplan kann in den nächsten beiden Tabellen nachvollzogen werden.

$u_i + v_j$	1	2	3	$u_i$	$c'_{ij}$	1	2	3
1	<u>17</u>	<u>16</u>	16	0	1	<u>0</u>	<u>0</u>	-1
2	<u>18</u>	17	<u>17</u>	1	2	<u>0</u>	-4*	<u>0</u>
$v_j$	17	16	16					

Das freie Feld (1,3) gehört zu einer Nichtbasisvariablen an der unteren Schranke. Ihr Optimalitätsindikator ist negativ. Damit ist die Optimalitätsbedingung nicht erfüllt. Die nachfolgende linke Tabelle zeigt den zugehörigen Austauschzyklus. Für die abzuändernde Transportmenge erhält man den Wert  $d = \min\{\min\{4; 7\}, \min\{5; 3\}\} = 3$ . Dieser Wert wird für das Feld (2,1) angenommen. Damit wird  $x_{21}$  neue Nichtbasisvariable an der oberen Schranke. Die nachfolgende linke Tabelle zeigt den neu entstandenen Transportplan.

$x_{ij}$	1	2	3	$a_i$	$x_{ij}$	1	2	3	$a_i$
1	$4 - d$	6	$d$	10	1	1	6	3	10
2	$5 + d$	5*	$7 - d$	17	2	8*	5*	4	17
$b_j$	9	11	7		$b_j$	9	11	7	

Die Gesamtkosten betragen  $z = 438 + 3 \cdot (-1) = 435$ .

Die Optimalität des vorliegenden Transportplans erkennt man nach der Berechnung der zugehörigen Optimalitätsindikatoren, deren Berechnung an Hand der nächsten beiden Tabellen kontrolliert werden kann.

$u_i + v_j$	1	2	3	$u_i$	$c'_{ij}$	1	2	3
1	<u>17</u>	<u>16</u>	<u>15</u>	0	1	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>
2	19	18	<u>17</u>	2	2	-1*	-5*	<u>0</u>
$v_j$	17	16	15					

Alle Optimalitätsindikatoren zu Nichtbasisvariablen an der oberen Schranke sind negativ. Nichtbasisvariablen an der unteren Schranke existieren nicht. Damit ist der zuletzt erzeugte Transportplan auch der einzige optimale Transportplan.

Damit werden in diesem Beispiel alle Transportverbindungen genutzt. Die Grenzen des Transportnetzes werden durch die Transporte von Grube 2 zu den ersten beiden Kraftwerken erreicht.

### 2.4.3 Zweiseitig beschränkte Transportprobleme

Im Abschnitt 2.3 wurden offene Transportprobleme behandelt, bei denen zu den Ausgangsorten beziehungsweise zu den Bestimmungsorten (wie auch beim klassischen Transportproblem) nur ein Typ von Gleichungs- oder Ungleichungsrestriktionen zugelassen wurde.

Das zweiseitig beschränkte Transportproblem zeichnet sich dadurch aus, dass für jeden Ausgangsort ein Mindest- und ein Maximalaufkommen und für jeden Bestimmungsort ein Mindest- und ein Maximalbedarf vorgegeben sind. Außerdem soll die insgesamt zu transportierende Menge nach unten und nach oben beschränkt sein. Die Lieferbeziehungen sind im Rahmen dieser Vorgaben so zu gestalten, dass der gesamte Transportaufwand minimal wird. Damit liegt eine Erweiterung der bislang betrachteten Klassen von offenen Transportprobleme vor.

Für die mathematische Modellierung werden die folgenden neuen Bezeichnungen benötigt:

$a_i^u$ ,  $i = 1, \dots, m$ , Mindestaufkommen im Ausgangsort  $A_i$

$a_i^0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , Maximalaufkommen im Ausgangsort  $A_i$

$b_j^u$ ,  $j = 1, \dots, n$ , Mindestbedarf im Bestimmungsort  $B_j$

$b_j^0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , Maximalbedarf im Bestimmungsort  $B_j$

$G^u$ , untere Schranke für die insgesamt zu transportierende Menge

$G^0$ , obere Schranke für die insgesamt zu transportierende Menge

Das folgende Modell beschreibt ein zweiseitig beschränktes offenes Transportproblem ohne Kapazitätsbeschränkungen für die einzelnen Transportverbindungen.

**Modell ZTP** (zweiseitig beschränktes Transportproblem):

$$\begin{aligned}
 z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min \\
 G^u &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq G^0, \\
 a_i^u &\leq \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i^0, & i = 1, \dots, m \\
 b_j^u &\leq \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j^0, & j = 1, \dots, n \\
 x_{ij} &\geq 0, & i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Dieses Modell kann bei Bedarf auch noch durch zusätzliche Schranken für die Durchlassfähigkeit der einzelnen Transportverbindungen ergänzt werden.

Es ist offensichtlich, dass folgende Bedingungen für die Lösbarkeit notwendig sind:

$$\begin{aligned}
 a_i^u &\leq a_i^0, & i = 1, \dots, m \\
 b_j^u &\leq b_j^0, & j = 1, \dots, n \\
 G^u &\leq G^0
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Sinnvollerweise sollten untere Schranken nichtnegativ und obere Schranken positiv sein.



Für das zweiseitig beschränkte Transportproblem lassen sich weitere recht einfache Lösbarkeitsbedingungen ableiten, die zu einer hinreichenden Bedingung integriert werden können.

**Satz 2.25**

Das zweiseitig beschränkte Transportproblem ZTP ist genau dann lösbar, wenn (2.81) gilt und die Ungleichung

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^m a_i^u, \sum_{j=1}^n b_j^u, G^u \right\} \leq \min \left\{ \sum_{i=1}^m a_i^0, \sum_{j=1}^n b_j^0, G^0 \right\} \quad (2.82)$$

erfüllt ist.

Dem zweiseitig beschränkten Transportproblem ZTP soll nun ein spezielles kapazitiertes klassisches Transportproblem zugeordnet werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass die formulierten notwendigen und hinreichenden Lösbarkeitsbedingungen erfüllt sind.

Jede zweiseitig beschränkte Ungleichung lässt sich durch Einführung einer nach oben beschränkten nichtnegativen Schlupfvariable in eine Gleichung überführen. Die obere Schranke ergibt sich dabei als Differenz der zu der Ungleichung gehörigen oberen und unteren Schranke.

Zur Darstellung der zu den Ausgangsorten gehörigen Schlupfvariablen  $x_{i,n+1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und der zu den Bestimmungsorten gehörigen Schlupfvariablen  $x_{m+1,j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , wird wieder ein Transporttableau mit je einer zusätzliche Zeile und Spalte benötigt. Die dabei anfallende Variable  $x_{m+1,n+1}$  fungiert als Schlupfvariable für die Beschränkungen zur gesamten Transportmenge. Die zusätzliche Vorrats- und Bedarfsmenge wird so gewählt, dass  $x_{m+1,n+1}$  die insgesamt transportierte Menge repräsentiert und die Gleichgewichtsbedingung im erweiterten Problem erfüllt ist. Alle eingeführten Schlupfvariablen werden entsprechend ihrem Charakter mit Null bewertet. Das so entstehende Transportproblem sei mit **KZTP** bezeichnet und hat die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min \\ &\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m \\ &\sum_{j=1}^{n+1} x_{m+1,j} = \sum_{j=1}^n b_j^0 - G^u \\ &\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n \\ &\sum_{i=1}^{m+1} x_{i,n+1} = \sum_{i=1}^m a_i^0 - G^u \\ &x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m+1, \quad j = 1, \dots, n+1 \\ &x_{i,n+1} \leq a_i^0 - a_i^u, \quad i = 1, \dots, m \\ &x_{m+1,j} \leq b_j^0 - b_j^u, \quad j = 1, \dots, n \\ &x_{m+1,n+1} \leq G^0 - G^u \end{aligned} \quad (2.83)$$

Im Problem KZTP gilt

$$x_{m+1,n+1} = \sum_{i=1}^m a_i^0 - G^u - \sum_{i=1}^m x_{i,n+1} = \sum_{i=1}^m a_i^0 - G^u - \sum_{i=1}^m (a_i^0 - \sum_{j=1}^n x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} - G^u.$$

Die insgesamt zu transportierende Menge für einen Transportplan des zweiseitig beschränkten Transportproblems wird demzufolge durch den Ausdruck  $x_{m+1,n+1} + G^u$  beschrieben. Wenn die Variable  $x_{m+1,n+1}$  die in (2.83) geforderten untere und obere Schranke einhält, dann liegt die insgesamt zu transportierende Menge auch im vorgeschriebenen Intervall  $[G^u, G^0]$ .

Ein optimaler Transportplan für das Transportproblem KZTP induziert demzufolge stets einen optimalen Transportplan für das zweiseitig beschränkte Transportproblem ZTP. Wenn die im Satz 2.25 beschriebenen Lösbarkeitsbedingungen erfüllt sind, dann lässt sich für KZTP auch stets ein optimaler Transportplan finden. Damit ist nur noch zu klären, wie man auf einfache Weise eine erste zulässige Basislösung für KZTP finden kann.

### Bemerkung 2.26

Wenn die im Satz 2.25 beschriebenen Lösbarkeitsbedingungen erfüllt sind, dann lässt sich für KZTP eine zulässige Basislösung finden, ohne die im letzten Abschnitt formulierte Ersatzaufgabe (2.77) heranziehen zu müssen.

Um einen Transportplan mit kleinstmöglicher Transportmenge zu erzeugen, wird als erstes die Zahl  $G^* = \max \{ \sum_{i=1}^m a_i^u, \sum_{j=1}^n b_j^u, G^u \}$  berechnet und der Wert  $x_{m+1,n+1} = G^* - G^u$  zugewiesen.

Gilt  $G^* = \sum_{i=1}^m a_i^u$ , dann werden die Variablen  $x_{i,n+1} = a_i^o - a_i^u$ ,  $i = 1, \dots, m$ , Nichtbasisvariable an der oberen Schranke und  $x_{m+1,n+1}$  ist Basisvariable. Die Spalte  $n + 1$  wird gestrichen. Der aktuelle Vorrat  $a_{m+1}$  wird auf  $\sum_{j=1}^n b_j^0 - \sum_{i=1}^m a_i^u$  reduziert. Anschließend werden die Variablen  $x_{m+1,j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , der Zeile  $m + 1$  sukzessive unter Beachtung von (2.79) besetzt, bis der aktuelle Vorrat in dieser Zeile aufgebraucht ist.

Gilt  $G^* = \sum_{j=1}^n b_j^u$ , dann werden die Variablen  $x_{m+1,j} = b_j^o - b_j^u$ ,  $j = 1, \dots, n$  Nichtbasisvariable an der oberen Schranke und  $x_{m+1,n+1}$  ist Basisvariable. Die Zeile  $n + 1$  wird gestrichen. Der aktuelle Bedarf  $b_{n+1}$  wird auf  $\sum_{i=1}^m a_i^0 - \sum_{j=1}^n b_j^u$  reduziert. Anschließend werden die Variablen  $x_{i,n+1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , der Spalte  $n + 1$  sukzessive unter Beachtung von (2.79) besetzt, bis der aktuelle Bedarf in dieser Spalte aufgebraucht ist.

Im Falle  $G^* > \sum_{i=1}^m a_i^u$  und  $G^* > \sum_{j=1}^n b_j^u$  gilt  $G^* = G^u$ . Dann ist  $x_{m+1,n+1} = 0$  eine Nichtbasisvariable an der unteren Schranke. Wie in den bereits vorher beschriebenen Fällen werden hier sowohl die Variablen in der zusätzlichen Zeile als auch die Variablen in der zusätzliche Spalte sukzessive besetzt.

In jedem der drei möglichen Fälle verbleibt nun nur noch das Besetzen der ursprünglichen Felder  $(i, j) \in N$ . Da die reduzierten Vorrats- und Bedarfsmengen die Gleichgewichtsbedingung erfüllen und keine Beschränkungen der Durchlassfähigkeit für diese Transportverbindungen vorliegen, kann man mit einer beliebigen Regel zur Konstruktion einer zulässigen Basislösung für das klassische Transportproblem fortfahren.

Die Lösung eines zweiseitig beschränkten Transportproblems, insbesondere die Bestimmung einer ersten zulässigen Basislösung, soll nun an Hand eines Beispiels demonstriert werden.

**Beispiel 2.21**

Gegeben ist die folgende Datentabelle eines zweiseitig beschränkten Transportproblems, bei dem die insgesamt zu transportierende Menge den Wert  $G^u = 20$  nicht unterschreiten und den Wert  $G^0 = 23$  nicht überschreiten soll:

$c_{ij}$	1	2	3	$a_i^u$	$a_i^0$
1	5	4	7	5	9
2	7	3	7	7	9
3	7	2	1	3	7
$b_j^u$	4	6	5		
$b_j^0$	8	12	6		

Die in (2.82) formulierte Bedingung ist wegen  $\max\{15; 15; 20\} \leq \min\{25; 26; 23\}$  erfüllt. Das erweiterte Transportproblem mit den zusätzlichen, nach oben beschränkten Variablen ist in der folgenden Tabelle beschrieben:

$c_{ij}^{s_{ij}}$	1	2	3	4	$a_i$
1	5	4	7	$0^4$	9
2	7	3	7	$0^2$	9
3	7	2	1	$0^4$	7
4	$0^4$	$0^6$	$0^1$	$0^3$	6
$b_j$	8	12	6	5	

Jetzt wird eine zulässige Basislösung mit der kleinstmöglichen Transportmenge  $G^* = 20$  konstruiert. Weil  $G^* = \max\{15; 15; 20\}$  eindeutig durch die untere Schranke  $G^u$  angenommen wird, ist  $x_{44} = 0$  als Nichtbasisvariable an der unteren Schranke zu wählen.

Die Variablen der vierten Spalte werden wie folgt sukzessive besetzt:

$$\begin{aligned} x_{14} &= 4 \text{ wird Nichtbasivvariable an der oberen Schranke} \\ x_{24} &= 1 \text{ wird Basisvariable (Spalte 4 ist zu streichen)} \end{aligned}$$

Analog wird mit den Variablen in der vierten Zeile verfahren:

$$\begin{aligned} x_{41} &= 4 \text{ wird Nichtbasivvariable an der oberen Schranke} \\ x_{42} &= 2 \text{ wird Basisvariable (Zeile 4 ist zu streichen)} \end{aligned}$$

Unter Beachtung der zum Teil reduzierten Vorrats- und Bedarfsmengen  $a_1 = 9 - 4 = 5$ ,  $a_2 = 9 - 1 = 8$ ,  $a_3 = 7$ ,  $b_1 = 8 - 4 = 4$ ,  $b_2 = 12 - 2 = 10$ ,  $b_3 = 6$  werden hier willkürlich mit Hilfe der Nordwesteckenregel noch die folgenden Werte für Basisvariablen ermittelt:  $x_{11} = 4$ ,  $x_{12} = 1$ ,  $x_{22} = 8$ ,  $x_{32} = 1$ ,  $x_{33} = 6$ .

In der folgenden Tabelle sind alle Basisvariablen und die mit einem Stern gekennzeichneten Nichtbasisvariablen an der oberen Schranke eingetragen:

$x_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1	4	1		$4^*$	9
2		8		1	9
3		1	6		7
4	$4^*$	2			6
$b_j$	8	12	6	5	

Die Gesamtkosten des aufgestellten Transportplans betragen  $z = 56$ .

Der Transportplan wird auf Optimalität getestet. In der folgenden linken Tabelle wurden die Potentiale berechnet und die Summe der Potentiale in den noch freien Feldern eingetragen. Die errechneten Optimalitätsindikatoren befinden sich in der rechten Tabelle.

$u_i + v_j$	1	2	3	4	$u_i$	$c'_{ij}$	1	2	3	4
1	5	4	3	1	0	1	0	0	4	-1*
2	4	3	2	0	-1	2	3	0	5	0
3	3	2	1	-1	-2	3	4	0	0	1
4	1	0	-1	-3	-4	4	-1*	0	1	3
$v_j$	5	4	3	1						

Die Optimalitätsindikatoren aller Nichtbasisvariablen an der unteren Schranke sind positiv und die zu den Nichtbasisvariablen an der oberen Schranke negativ. Damit ist der um die zusätzliche Zeile und Spalte reduzierte Transportplan

$x_{ij}$	1	2	3	$a_i^u$	$a_i^0$
1	4	1		5	9
2		8		7	9
3		1	6	3	7
$b_j^u$	4	6	5		
$b_j^0$	8	12	6		

der einzig optimale Transportplan mit einer Transportmenge  $G = 20$  und den minimalen Gesamtkosten  $z = 56$ .

Jedes im Abschnitt 2.3 behandelte offene Transportproblem kann als zweiseitig beschränktes Transportproblem formuliert werden. Bei Gleichungsrestriktionen hat man identische untere und obere Schranken. Fehlende untere Schranken werden Null gesetzt. Fehlende obere Schranken werden durch hinreichend große Zahlen repräsentiert. Diese lassen sich auch für das Modell des offenen Transportproblems  $TP(\geq, \geq)$  finden, wenn man die Aussage von Satz 2.17 berücksichtigt.

### Beispiel 2.22

Gesucht sei ein optimaler Transportplan für das offene Transportproblem  $TP(\leq, \leq)$  unter der zusätzlichen Restriktion  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = K$ .

Die für das zweiseitig beschränkte Transportproblem einzuführenden Schlupfvariablen besitzen bis auf  $x_{m+1,n+1}$  wegen der fehlenden unteren Schranken überflüssige obere Schranken. Die zusätzliche Bedingung verursacht wegen  $G_u = G_0 = K$  für die Variable  $x_{m+1,n+1}$  die obere Schranke Null. Diese Sperrung kann aber über entsprechend hohe Kosten realisiert werden. Damit liegt in diesem Fall sogar ein klassisches Transportproblem vor.

Mit  $A = \sum_{i=1}^m a_i$  und  $B = \sum_{j=1}^n b_j$  besitzt die zugehörige Datentabelle die folgende Gestalt:

$c_{ij}$	1	...	$n$	$n+1$	$a_i$
1	$c_{11}$	...	$c_{1n}$	0	$a_1$
.	..	...	..	..	..
.	..	...	..	..	..
$n$	$c_{n1}$	...	$c_{nn}$	0	$a_m$
$n+1$	0	...	0	$M$	$B - K$
$b_j$	$b_1$	...	$b_n$	$A - K$	

## 2.5 Umladeprobleme

In vielen Transportproblemen treten neben Vorrats- und Bedarfsorten noch Zwischenlager auf, die entweder zwangsläufig genutzt werden müssen, da keine Direktverbindungen existieren, oder deren Benutzung kostengünstiger ist als die Direktverbindung. Eine Erweiterung erhält man, wenn für die Zwischenlager entweder Produktion, also ein Aufkommen, oder Verbrauch, also ein Bedarf angenommen wird.

Als Beispiel sei ein Wasserversorgungsnetz genannt, bei dem verschiedene Wasserwerke das Netz mit Wasser speisen und verschiedene Abnehmer damit zu beliefern haben. Außerdem sind noch Pumpstationen für den technischen Ablauf notwendig. Diese Pumpstationen sind reine Verteilungsstationen. Aber auch Wasserwerke und Verbraucher können in konkreten Wasserversorgungsnetzen der Weiterleitung von Fremdwasser dienen und damit eine Verteilungsfunktion erfüllen.

In diesem Abschnitt wird zuerst ein allgemeines unkapazitiertes Umlademodell beschrieben. Anschließend wird noch auf ein spezielles Transportmodell mit einer strengeren Umladestruktur und zusätzlichen Kapazitätsbeschränkungen näher eingegangen.

Für das zu betrachtende allgemeine Umladeproblem wird die Menge aller einzubeziehenden Orte mit  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  bezeichnet. Diese Menge wird in drei disjunkte Teilmengen zerlegt. Mit  $V_A$  werden alle Anbieter erfasst. Bei ihnen fließt ein Warenstrom in das Transportnetz. Die Orte, in denen lediglich eine Aufteilung und Weiterleitung des eingehenden Warenstromes erfolgt, werden als Umladeorte in der Menge  $V_U$  festgehalten. Die Menge  $V_B$  umfasst alle Verbraucher. Sie entnehmen dem Transportnetz einen Warenstrom. In Angebots- und Bedarfsorten kann grundsätzlich auch umgeladen werden.

Für die Vorratsmengen  $a_i$ ,  $i \in V$ , und die Bedarfsmengen  $b_i$ ,  $i \in V$ , gilt

$$\begin{aligned} a_i &> 0, & b_i &= 0, & i &\in V_A, \\ a_i &= 0, & b_i &= 0, & i &\in V_U, \\ a_i &= 0, & b_i &> 0, & i &\in V_B. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Weiterhin wird  $\sum_{i \in V_A} a_i = \sum_{j \in V_B} b_j$  vorausgesetzt, das heißt Gesamtvorrat und Gesamtbedarf stimmen überein.

Es sei

$$E \subseteq V \times V, \quad (i, i) \notin E, \quad i \in V$$

die Menge aller zugelassenen Transportverbindungen des Umladeproblems. Für jeden Ort  $i \in V$  wird die Menge aller von  $V_i$  ausgehenden Transportverbindungen und die in  $V_i$  hineinführenden Transportverbindungen durch die beiden Mengen

$$\mathcal{N}(i) = \{j \in V \mid (i, j) \in E\} \quad \mathcal{V}(i) = \{h \in V \mid (h, i) \in E\}$$

erfasst.

Die Größen  $c_{ij}$ ,  $(i, j) \in E$ , bezeichnen die spezifischen Transportkosten für den Transport einer Mengeneinheit von  $V_i$  nach  $V_j$ . Für die Lösbarkeit eines Umladeproblems kann es notwendig sein, die Nichtnegativität gewisser Kostenkoeffizienten vorauszusetzen. Deshalb wird in diesem Abschnitt generell

$$c_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in E \tag{2.85}$$

angenommen.

Die für das Umladeproblem zu bestimmenden Transportmengen seien durch die Variablen  $x_{ij}$ ,  $(i, j) \in E$ , bezeichnet.

Für jeden Ort  $i \in V$  gelten Gleichgewichtsbedingungen in dem Sinne, dass ankommende und bereitgestellte Transportmenge mit der weggehenden und verbrauchten Transportmenge übereinstimmt. Dies entspricht der Erfüllung der Gleichungen

$$\sum_{h \in \mathcal{V}(i)} x_{hi} + a_i = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} x_{ij} + b_i, \quad i \in V. \quad (2.86)$$

Mit den eingeführten Bezeichnungen und den beschriebenen Randbedingungen lässt sich das *unkapazitierte Umladeproblem* wie folgt formulieren:

**Modell UP** (unkapazitiertes Umladeproblem):

$$\begin{aligned} z &= \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min \\ &- \sum_{h \in \mathcal{V}(i)} x_{hi} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} x_{ij} = a_i - b_i, \quad i = 1, \dots, n \\ &x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in E \end{aligned} \quad (2.87)$$

Beim *kapazitierten Umladeproblem* werden zusätzlich noch Schranken für die zu bestimmenden Transportmengen  $x_{ij}$ ,  $(i, j) \in E$ , berücksichtigt.

Im Folgenden wird das unkapazitierte Umladeproblem in ein klassisches Transportproblem mit gesperrten Transportverbindungen überführt. Dazu wird jeder Ort  $i \in V$  zugleich als Vorratsort und als Bedarfsort aufgefasst. Grundlage der Vorgehensweise ist, dass es im Falle der Existenz von zulässigen Lösungen stets ein optimaler Transportplan mit

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} x_{ij} &\leq a_i + L, \quad i \in V, \\ \sum_{h \in \mathcal{V}(i)} x_{hi} &\leq b_i + L, \quad i \in V, \end{aligned} \quad (2.88)$$

gibt, wobei  $L = \sum_{i \in V_A} a_i$  gilt.

Um die Gleichungen in (2.87) aufzuspalten, benötigt man für (2.88) gemeinsame Schlupfvariable. Sie werden für jedes  $i \in V$  mit  $x_{ii}$  bezeichnet und führen zu den äquivalenten Bedingungen

$$\begin{aligned} x_{ii} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} x_{ij} &= a_i + L, \quad i \in V, \\ x_{ii} + \sum_{h \in \mathcal{V}(i)} x_{hi} &= b_i + L, \quad i \in V, \end{aligned}$$

wenn man noch  $x_{ii} \geq 0$ ,  $i \in V$ , fordert. Die zugehörigen Kostenkoeffizienten für die Schlupfvariablen  $x_{ii}$  sind mit  $c_{ii} = 0$ ,  $i \in V$ , festzulegen.

Nach Umindizierung erhält man ein zu (2.87) äquivalentes Transportproblem **KTPUP** der folgenden Gestalt:

$$\begin{aligned}
 z &= \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} + 0 \cdot \sum_{i \in V} x_{ii} \longrightarrow \min \\
 x_{ii} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} x_{ij} &= a_i + L, \quad i \in V \\
 x_{jj} + \sum_{i \in \mathcal{V}(j)} x_{ij} &= b_j + L, \quad j \in V \\
 x_{ij} &\geq 0, \quad (i,j) \in E, \quad x_{ii} \geq 0, \quad i \in V
 \end{aligned} \tag{2.89}$$

Führt man noch für alle nicht zugelassenen Transportverbindungen die fehlenden Variablen in das Transportproblem KTPUP ein und realisiert die Sperrung dieser Transportverbindungen durch hinreichend hohe Kosten  $M$ , dann beschreibt diese Erweiterung zu (2.89) ein klassisches Transportproblem mit gesperrten Transportverbindungen.

### Bemerkung 2.27

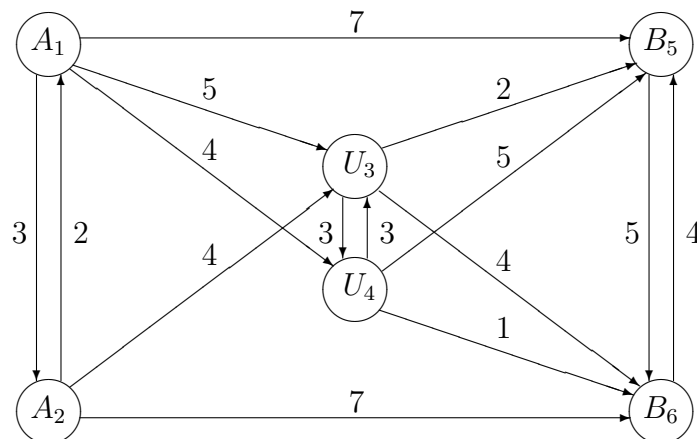
Für das zu (2.89) gehörige klassische Transportproblem mit gesperrten Transportverbindungen existiert stets eine optimale Basislösung, in der sämtliche Variable  $x_{ii}, i \in V$ , Basisvariable sind.

Die Struktur eines dem allgemeinen unkapazitierten Umladeproblem zugeordneten klassischen Transportproblems mit Sperrungen lässt sich am einfachsten an Hand eines konkreten Beispiels verdeutlichen und erklären.

### Beispiel 2.23

Gegeben sei ein Transportnetz mit den Anbietern  $A_1$  und  $A_2$ , den ausschließlichen Umladeorten  $U_3$  und  $U_4$ , sowie den Verbrauchern  $B_5$  und  $B_6$ . Die Vorratsmengen seien mit  $a_1 = 9$  und  $a_2 = 11$  festgelegt. Für die Bedarfsmengen gelte  $b_5 = 6$  und  $b_6 = 14$ .

Die folgende Abbildung zeigt die zulässigen Transportverbindungen für das Transportnetz mit den zugehörigen spezifischen Kosten.



Insgesamt muss die Menge  $L = 20$  von den Anbietern  $A_1$  und  $A_2$  gegebenenfalls über die Umladeorte  $U_3$  und  $U_4$  zu den Verbrauchern  $B_5$  und  $B_6$  transportiert werden. Formal gilt  $a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$  und  $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$ .

Die folgende Datentabelle charakterisiert das konkrete zugeordnete klassische Transportproblem mit Sperrungen.

$c_{ij}$	$A_1$	$A_2$	$U_3$	$U_4$	$B_5$	$B_6$	$a_i + L$
$A_1$	0	3	5	4	7	$M$	29
$A_2$	2	0	4	$M$	$M$	7	31
$U_3$	$M$	$M$	0	3	2	4	20
$U_4$	$M$	$M$	3	0	5	1	20
$B_5$	$M$	$M$	$M$	$M$	0	5	20
$B_6$	$M$	$M$	$M$	$M$	4	0	20
$b_j + L$	20	20	20	20	26	34	

Die Felder in der Diagonale gehören zu den Schlupfvariablen  $x_{ii}$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Die im Transportnetz nicht vorhandenen Transportverbindungen entsprechen in der Datentabelle den mit  $M$  bewerteten Feldern. Für das vorliegende Beispiel ist auch eine spezielle Struktur erkennbar: Transporte von Verbrauchern zu Anbietern oder Umladeorten sind ebenso nicht möglich wie Transporte von den Umladeorten zu den Anbietern.

Die nachfolgende Tabelle beschreibt die Menge aller Optimallösungen, wobei die Änderungsgröße  $d$  im Intervall  $[0; 5]$  variieren kann. Alle Lösungen sind zulässig, da kein gesperrtes Feld besetzt ist. Die minimalen Gesamtkosten betragen in jedem Falle  $z = 116$ .

$x_{ij}^0(d)$	1	2	3	4	5	6	$a_i + L$
1	$15 + d$			$14 - d$			29
2	$5 - d$	20	6			$d$	31
3			14		6		20
4				$6 + d$		$14 - d$	20
5					20		20
6						20	20
$b_j + L$	20	20	20	20	26	34	

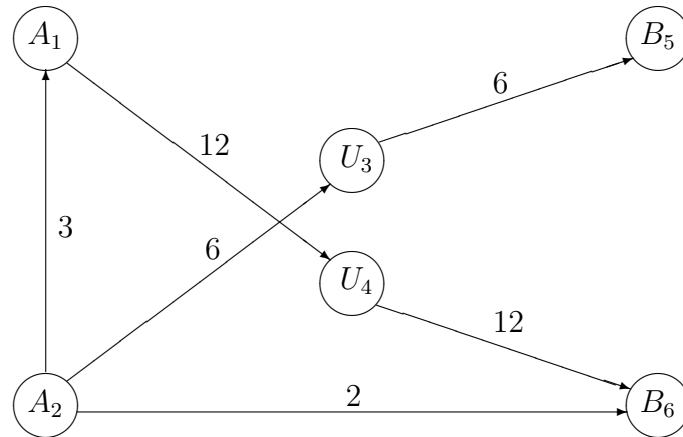
Deutlich erkennbar ist, dass in jeder Optimallösung alle zur Diagonale gehörigen Felder besetzt sind.

Zur Kontrolle befinden sich in der folgenden Tabelle die berechneten Potentiale in Kombination mit den Optimalitätsindikatoren für die zur obigen Tabelle gehörigen Basislösung mit  $d = 0$ . Dabei wurde die ausreichend große Zahl  $M = 100$  verwendet.

$c'_{ij}$	1	2	3	4	5	6	$u_i$
1	0	5	3	4	3	95	0
2	2	0	4	94	94	0	2
3	102	104	0	1	2	1	-2
4	104	106	5	0	5	1	-4
5	104	106	102	100	0	4	-4
6	105	107	103	101	5	0	-5
$v_j$	0	-2	2	4	4	5	



Man erhält aus der erzeugten Tabelle der Optimallösungen einen gesuchten Transportplan für das vorgegebene Transportnetz, wenn man die zur Diagonale gehörigen Werte der Schlupfvariable ignoriert und den Wert  $d \in [0; 5]$  fest wählt. In der folgenden Abbildung ist ein optimaler Transportplan für  $d = 2$  dargestellt:



Die ausgewählte Lösung zeigt, dass in einem optimalen Transportplan Transporte zwischen den Anbietern nicht ausgeschlossen sind und auch der direkte Transport von Anbieter zu Verbraucher möglich ist.

Im betrachteten Beispiel lag bereits eine spezielle Struktur hinsichtlich der Menge der zugelassenen Transportverbindungen vor. In vielen praktischen Anwendungen finden zudem auch keine Transporte zwischen Anbietern oder zwischen Verbrauchern statt. Deshalb wird jetzt die spezielle Umladestruktur

$$E \subseteq (V_A \times (V_U \cup V_B)) \cup (V_U \times V_B)$$

betrachtet. Ein Transport von einem Anbieter zu einem Verbraucher erfolgt entweder auf direktem Wege oder über genau einen Umladeort. Transporte zwischen den Umladeorten finden jetzt ebenfalls nicht statt.

Auf Grund der Einschränkungen für die Menge der zulässigen Transportverbindungen kann das in (2.89) beschriebene Modell KTPUP um die zu  $V_B$  gehörigen Zeilenrestriktionen und um die zu  $V_A$  gehörigen Spaltenrestriktionen reduziert werden wenn man die korrespondierenden Schlupfvariablen zwangsweise mit  $x_{ii} = L$ ,  $i \in V_A \cup V_B$ , besetzt. Die Vorratsmengen für  $i \in V_A$  als auch die Bedarfsmengen für  $j \in V_B$  müssen dann um den Wert  $L$  nach unten korrigiert werden.

Für Umladeorte  $k \in V_U$  stellt die Größe  $L = \sum_{i \in V_A} a_i$  eine überflüssige obere Schranke für die über diesen Ort zu transportierende Gesamtmenge dar. Das Modell kann nun dahingehend erweitert werden, dass man die Durchlasskapazität in den Umladeorten  $k \in V_U$  mit  $g_k$  beschränkt und damit

$$\sum_{i \in \mathcal{V}(k)} x_{ik} \leq g_k, \quad k \in V_U,$$

fordert.

Im Folgenden wird das allgemeine *zweistufige Transportproblem* mit der Möglichkeit von Direkttransporten für  $E = (V_A \times (V_U \cup V_B)) \cup (V_U \times V_B)$  alternativ modelliert.

Es sei  $V_A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ,  $V_U = \{U_1, U_2, \dots, U_l\}$  und  $V_B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ . Für die einzelnen Transportstufen werden die folgenden Variablen eingeführt:

- $x_{1ik}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, l$ : Transportmenge von  $A_i$  nach  $U_k$  (1. Transportstufe)
- $x_{2kj}$ ,  $k = 1, \dots, l$ ,  $j = 1, \dots, n$ : Transportmenge von  $U_k$  nach  $B_j$  (2. Transportstufe)
- $x_{0ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ : Transportmenge von  $A_i$  nach  $B_j$  (Direkttransport)

In analoger Notation werden die zu diesen Variablen gehörenden spezifischen Kosten bezeichnet und durch die Kostenmatrizen  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_0$  erfasst.

Damit erhält man die folgende Variante eines Umladeproblems mit spezieller Struktur:

**Modell UP-2** (allgemeines zweistufiges Transportproblem):

$$\begin{aligned}
 z = & \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l c_{1ik} x_{1ik} + \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^n c_{2kj} x_{2kj} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{0ij} x_{0ij} \longrightarrow \min \\
 & \sum_{k=1}^l x_{1ik} + \sum_{j=1}^n x_{0ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^m x_{1ik} = \sum_{j=1}^n x_{2kj}, \quad k = 1, \dots, l \\
 & \sum_{i=1}^m x_{1ik} \leq g_k, \quad k = 1, \dots, l \\
 & \sum_{k=1}^l x_{2kj} + \sum_{i=1}^m x_{0ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n \\
 & x_{1ik} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, l \\
 & x_{2kj} \geq 0, \quad k = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, n \\
 & x_{0ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.90}$$

Das zugeordnete klassische Transportproblem mit Sperrungen zur Lösung des Problems UP-2, dass man analog (2.89) aufstellen kann, soll an dieser Stelle nur durch die zugehörige Datentabelle charakterisiert werden. Die mit Kostenkoeffizient Null bewerteten Schlupfvariablen gehören zu den Kapazitätsrestriktionen der Umladeorte.

Kosten	$U_1$	$U_2$	...	$U_l$	$B_1$	$B_2$	...	$B_n$	Vorrat
$A_1$	$c_{111}$	$c_{112}$	...	$c_{11l}$	$c_{011}$	$c_{012}$	...	$c_{01n}$	$a_1$
$A_2$	$c_{121}$	$c_{122}$	...	$c_{12l}$	$c_{021}$	$c_{022}$	...	$c_{02n}$	$a_2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$A_m$	$c_{1m1}$	$c_{1m2}$	...	$c_{1ml}$	$c_{0m1}$	$c_{0m2}$	...	$c_{0mn}$	$a_m$
$U_1$	0	$M$	...	$M$	$c_{211}$	$c_{212}$	...	$c_{21n}$	$g_1$
$U_2$	$M$	0	...	$M$	$c_{221}$	$c_{222}$	...	$c_{22n}$	$g_2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$U_l$	$M$	$M$	...	0	$c_{2l1}$	$c_{2l2}$	...	$c_{2ln}$	$g_l$
Bedarf	$g_1$	$g_2$	...	$g_l$	$b_1$	$b_2$	...	$b_n$	

Aus dem Problem UP-2 erhält man das klassische zweistufige Transportproblem, wenn man noch zusätzlich die Direkttransporte verbietet. Für die Menge der zulässigen Transportverbindungen gilt dann  $E = (V_A \times V_U) \cup (V_U \times V_B)$ . Im Modell (2.90) wären alle zum Direkttransport gehörigen Variablen zu streichen. In der letzten Datentabelle muss formal nur  $c_{0ij} = M$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , gesetzt werden, um mit einer hinreichend großen Zahl  $M$  die Sperrungen zu realisieren.

Das klassische zweistufige Transportproblem lässt sich dahingehend verallgemeinern, dass ein Transport in mehreren Stufen auch jeweils zwischen ausgewählten Umladeorten notwendig sein kann und ein Überspringen von derartigen Transportstufen unmöglich ist. Als Beispiel sei hier der 4-stufige Transport von untertage gefördertem Erzvorkommen über durchlassbeschränkte Schächte zu Aufbereitungsanlagen und anschließender Belieferung der nachfragenden Hüttenindustrie.

Zum Abschluss wird noch ein Beispiel für ein zweistufiges Transportproblem mit der Möglichkeit von Direkttransporten präsentiert. Es handelt sich dabei um eine Modifikation eines Beispiels aus [Din92].

### Beispiel 2.24

Der Obstimporteur Trutz Graf Zedernholz verfügt über 48 Schiffscontainer Bananen in den Seehäfen Rotterdam (16 Container), Bremen (8 Container) und Hamburg (24 Container). Er beliefert Großmärkte in Saarbrücken (16 Container), München (19 Container) und Dresden (13 Container). Der Transport der Container erfolgt per Sattelschlepper (ein Container pro Sattelschlepper).

Graf Zedernholz arbeitet mit drei Speditionsfirmen zusammen. In Ergänzung zur übermächtigen EUROTRANS, die von den Seehäfen direkt zu den Großmärkten liefert, nimmt er die nur regional tätigen Spediteure FRIESEINTRUCK und BAYERNEXPRESS über Zwischenlager in Frankfurt (am Main) und Kassel in Anspruch. Während in Frankfurt beliebig viele Container zwischengelagert werden können, ist die Lagerkapazität in Kassel auf 6 Container beschränkt. Umlagerungen zwischen Frankfurt und Kassel sind wegen der kurzen Entfernung unwirtschaftlich und damit ausgeschlossen. Zudem verweigert die Firma EUROTRANS dem Obstimporteur Fahrten von und nach Frankfurt beziehungsweise Kassel, um die regional operierenden Konkurrenzunternehmen zu schwächen.

Die von den drei Spediteuren befahrenen Routen sowie die jeweils entstehenden Transportkosten hat Graf Zedernholz in drei Tabellen zusammengefasst. Die Angaben belaufen sich in € pro Container und Strecke. Ein Kostensatz  $\infty$  bedeutet, dass die entsprechende Route nicht angeboten wird.

	Sa	Mü	Dr
Ro	700	1000	1100
Br	$\infty$	1200	900
Ha	800	1000	700

	Fr	Ka
Ro	400	600
Br	$\infty$	600
Ha	600	500

	Sa	Mü	Dr
Fr	300	400	400
Ka	500	500	$\infty$

Auf Grund der bestehenden Konkurrenzsituation war es Graf Zedernholz möglich, die Kosten für das Umladen und die kurze Zwischenlagerung in Frankfurt und Kassel auf die Unternehmen FRIESEINTRUCK und BAYERNEXPRESS abzuwälzen.

Graf Zedernholz möchte die Transporte so organisieren, dass die insgesamt anfallenden Transportkosten minimal ausfallen. Auch würde es ihm gefallen, wenn dabei der Umsatz von EUROTRANS möglichst klein gehalten werden kann.

Da in Frankfurt die Zahl der umzuschlagenden Container nicht beschränkt ist, wird die Gesamtzahl  $L = 48$  der zu transportierenden Container als obere Schranke verwendet. Die folgende Datentabelle beschreibt das zu lösende klassische Transportproblem, wobei der hinreichend große Kostensatz  $M$  die gesperrten Felder anzeigt.

Kosten	Fr	Ka	Sa	Mü	Dr	Vorrat
Ro	400	600	700	1000	1100	16
Br	M	600	M	1200	900	8
Ha	600	500	800	1000	700	24
Fr	0	M	300	400	400	48
Ka	M	0	500	500	M	6
Bedarf	48	6	16	19	13	

Für derartig strukturierte Probleme ist es durchaus sinnvoll, sich Gedanken zur Erzeugung einer guten Startlösung zu machen. Mit Hilfe des Lösungsverfahrens aus Abschnitt 2.1.4 erhält man u.a. die in der linken Tabelle dargestellte optimale Basislösung. Die zugehörigen Optimalitätsindikatoren befinden sich in der rechten Tabelle. Dabei wurde konkret mit  $M = 5000$  gerechnet.

Plan 1	Fr	Ka	Sa	Mü	Dr		Fr	Ka	Sa	Mü	Dr	
Ro	13		3			16	0	300	0	200	500	
Br		6			2	8	4300	0	4000	100	0	
Ha			13		11	24	100	100	0	100	0	
Fr	35			13		48	0	5100	0	0	200	
Ka				6		6	4900	0	100	0	4700	
	48	6	16	19	13							

Die Gesamtkosten belaufen sich auf 39.000 €, wobei für die Speditionsfirma EUROTRANS 22.000 € anfallen. Da zwei Optimalitätsindikatoren zu freien Variablen den Wert Null besitzen, gibt es noch andere optimale Transportpläne. Wählt man die zur Transportverbindung von Frankfurt nach Saarbrücken gehörige freie Variable für den Basiswechsel aus, dann entsteht der folgende optimale Transportplan:

Plan 2	Fr	Ka	Sa	Mü	Dr	
Ro	16					16
Br		6			2	8
Ha			13		11	24
Fr	32		3	13		48
Ka				6		6
	48	6	16	19	13	

Bei unveränderten Gesamtkosten in Höhe von 39.000 € sind jetzt für EUROTRANS nur 19.900 € abzuführen. Bei diesem zweiten optimalen Transportplan werden Container aus Hamburg und die in Dresden ankommende Container nicht umgeladen. München erhält dagegen alle Container aus den Zwischenlagern. Container aus Rotterdam werden nicht direkt an die Großkunden geliefert.

Das Problem wäre nicht lösbar, wenn man keine Direkttransporte zulassen würde, da die Route von Bremen nach Frankfurt nicht vorgesehen ist und die 8 Container aus Bremen wegen der Kapazitätsbeschränkung in Kassel nicht umgeladen werden können.

## 2.6 Bottleneck Transportprobleme

Bei den bisher betrachteten Transportproblemen wurde grundsätzlich die Summe der Einzelkosten gebildet und optimiert. Es sind aber auch andere Optimierungskriterien denkbar. Ein Versandhaus kann sich das Ziel stellen, schnellstmöglichst den Bedarf seiner Kunden zu befriedigen. Die Transporte zwischen Lagern und Kunden stellen hier Teilprozesse dar. Alle Kunden möglichst schnell zu beliefern heißt, die maximale Transportzeit auf den einzelnen Transportverbindungen zu minimieren. Ähnliche Problemstellungen treten beim Transport verderblicher Güter auf. Bei der Planung der Einsatzbereitschaft von Rettungsdiensten und bei vielen Aufgaben im Bereich der Landesverteidigung kommt es darauf an, die maximale Einzelfahrzeit oder die maximal zurückzulegende Wegstrecke zu minimieren. Die kleinstmögliche maximale Zeit stellt für derartige Transportprobleme den Engpass dar und wird als *Bottleneck-Zeit* bezeichnet.

Mit  $t_{ij} > 0$ ,  $(i, j) \in N$ , soll künftig die Fahrzeit für einen Transport vom Ausgangsort  $A_i$  zum Bestimmungsort  $B_j$  bezeichnet werden. Durch die Funktionen

$$f_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} = 0 \\ t_{ij}, & x_{ij} > 0 \end{cases}, \quad (i, j) \in N \quad (2.91)$$

wird beschrieben, dass die Fahrzeit bei einem tatsächlich stattfindenden Transport auf der betreffenden Transportverbindung unabhängig von der transportierten Menge ist. Die mathematische Formulierung des klassischen Bottleneck Transportproblems lautet wie folgt:

**Modell BTP** (klassisches Bottleneck Transportproblem):

$$\begin{aligned} BT(x) = \max_{(i,j) \in N} f_{ij}(x_{ij}) &\longrightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, & \quad (i, j) \in N \end{aligned} \quad (2.92)$$

Ersetzt man die aus dem klassischen Transportproblem stammenden Restriktionen durch das Zuordnungspolyeder, dann spricht man vom Engpass-Zuordnungsproblem.

### Bemerkung 2.28

Die Zielfunktion  $BT(x)$  ist nichtlinear. Es handelt sich dabei um eine spezielle konkave Funktion.  $BT(x)$  kann nur endlich viele verschiedene Funktionswerte annehmen und ist damit beschränkt. Die Lösbarkeit des klassischen Bottleneck Transportproblems hängt auch hier nur von der Erfüllung der in (2.5) und (2.6) formulierten Bedingungen an die Vorrats- und Bedarfsmengen ab. Generell seien aber alle Angebots- und Vorratsmengen positiv. Da der zulässige Bereich von BTP bei Erfüllung der Lösbarkeitsbedingungen nichtleer, kovex und kompakt ist, nimmt die konkave Funktion ihr globales Minimum in mindestens einen Eckpunkt an (siehe u.a. [Had69]). Damit genügt es, beim klassischen Bottleneck Transportproblem nur zulässige Basislösungen zu betrachten, um einen optimalen Transportplan zu bestimmen.

Die Bottleneck-Zeit der Aufgabe (2.92) sei mit  $BT_{\min}$  bezeichnet. Die Zielsetzung des klassischen Bottleneck-Transportproblems kann dahingehend erweitert werden, die untere Aufwandung der Bottleneck-Zeit  $BT_{\min}$  zu transportierende Menge zu minimieren. Es soll also möglichst viel über Verbindungen mit  $t_{ij} < BT_{\min}$  transportiert werden.

Mit  $\bar{N} = \{(i, j) \in N \mid t_{ij} = BT_{\min}\}$  kann die zusätzliche Zielstellung wie folgt erfasst werden:

$$\begin{aligned} z_s = \sum_{(i,j) \in \bar{N}} x_{ij} &\longrightarrow \min \\ BT(x) &= BT_{\min} \end{aligned} \quad (2.93)$$

Bei den verschiedenen Lösungsverfahren für klassische Bottleneck Transportprobleme spielen untere und obere Schranken eine zum Teil bedeutende Rolle.

Eine untere Schranke  $BT_u$  für die Bottleneck-Zeit erhält man dadurch, dass man für jeden Ausgangsort  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und für jeden Bestimmungsort  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , getrennt erforderliche Mindestzeiten  $BT_{A_i}$  und  $BT_{B_j}$  bestimmt.

Für einen Ausgangsort  $A_i$  werden deshalb die für die einzelnen Bestimmungsorte benötigten Zeiten der Größe nach sortiert:  $t_{ij_1} \leq t_{ij_2} \leq \dots \leq t_{ij_n}$ . Dann wird der Index  $j_l$  mit

$$\sum_{q=1}^{l-1} b_{j_q} < a_i \leq \sum_{q=1}^l b_{j_q}$$

bestimmt. Die Mindestfahrzeit aus Sicht des Anbieters  $A_i$  beträgt damit  $BT_{A_i} = t_{ij_l}$ .

Analog geht man für einen Bestimmungsort  $B_j$  vor. Nach dem Sortieren der Spalte  $j$  der Matrix der Fahrzeiten erhält man  $t_{i_1j} \leq t_{i_2j} \leq \dots \leq t_{i_mj}$ . Der Index  $i_k$  wird durch die Bedingung

$$\sum_{p=1}^{k-1} a_{i_p} < b_j \leq \sum_{p=1}^k a_{i_p}$$

bestimmt und man erhält  $BT_{B_j} = t_{i_kj}$ .

Unter allen ermittelten Mindestfahrzeiten muss zur Bestimmung einer unteren Schranke für die Bottleneck-Zeit nur noch der größte Wert ausgewählt werden:

$$BT_u = \max\left\{ \max_{i=1, \dots, m} BT_{A_i}, \max_{j=1, \dots, n} BT_{B_j} \right\} \quad (2.94)$$

Eine im Allgemeinen schlechtere untere Schranke wird durch die Vorschrift

$$\overline{BT}_u = \max\left\{ \max_{i=1, \dots, m} \min_{j=1, \dots, n} t_{ij}, \max_{j=1, \dots, n} \min_{i=1, \dots, m} t_{ij} \right\} \quad (2.95)$$

erzeugt. Hier wird unabhängig von der Höhe der Vorrats- beziehungsweise Bedarfsmengen nur der entsprechende Transportweg mit der kürzesten Fahrzeit berücksichtigt. Für den Spezialfall des Engpass-Zuordnungsproblems gilt allerdings  $\overline{BT}_u = BT_u$ .

Zur Bestimmung einer willkürlichen oberen Schranke  $BT_o$  genügt die Bestimmung eines ersten Transportplans. Ein solcher kann mit jedem im Abschnitt 2.1.3 beschriebenen speziellen Eröffnungsverfahren erzeugt werden.

Eine im Allgemeinen recht gute obere Schranke erhält man, wenn für das korrespondierende klassische Transportproblem mit der Zielfunktion  $z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij}$  ein optimaler Transportplan  $\tilde{x}$  bestimmt und  $BT_o = BT(\tilde{x})$  gesetzt wird.

Zur Erzeugung eines ersten Transportplans soll an dieser Stelle noch eine spezielle zwei-stufige Auswahlregel für die zu besetzenden Felder im Rahmen eines Eröffnungsverfahrens vorgeschlagen werden. Ausgangspunkt ist dabei die Ermittlung einer vernünftigen unteren Schranke  $BT_u$  für die Bottleneck-Zeit.

In der ersten Stufe werden nur Felder aus der Menge  $N^* = \{(i, j) \in N \mid t_{ij} \leq BT_u\}$  besetzt. In jedem Schritt wird konkret eine Zeile oder Spalte mit der kleinsten Anzahl von Feldern aus  $N^*$  bestimmt. In dieser Zeile (beziehungsweise Spalte) wird dann ein Feld  $(i, j) \in N^*$  ausgewählt, in dessen Spalte (beziehungsweise Zeile) sich die geringste Anzahl von Feldern aus  $N^*$  befindet. Mit dem ausgewählten Feld wird dann ein Reduktionsschritt im Eröffnungsverfahren ausgeführt.

Kann allein mit Feldern aus  $N^*$  ein Transportplan erzeugt werden, so ist dieser bereits optimal und es gilt  $BT_{\min} = BT_u$ . Anderenfalls werden in der zweiten Stufe alle noch nicht abgearbeiteten Zeilen und Spalten des Transporttableaus (zum Beispiel) der Gesamtminimumregel unterworfen.

Die Idee für ein primales Lösungsverfahren zur Bestimmung eines optimalen Transportplans für das klassische Bottleneck Transportproblem lässt sich relativ einfach beschreiben. Beginnend mit einem ersten zulässigen Transportplan wird eine obere Schranke  $BT_o$  für die Bottleneck-Zeit bestimmt. Danach wird untersucht, ob es einen Transportplan  $x$  mit  $BT(x) < BT_o$  geben kann. Ist dies der Fall, wird die obere Schranke  $BT_o$  aktualisiert und das Verfahren wiederholt. Anderenfalls ist der zuletzt betrachtete Transportplan optimal.

In [GarRao71] wird die Frage, ob ein Transportplan  $x$  mit  $BT(x) < BT_o$  existiert, mit Hilfe eines speziellen zugeordneten klassischen Transportproblems mit Sperrungen entschieden. Dazu wird die folgende Kostenmatrix  $H$  konstruiert:

$$h_{ij} = \begin{cases} 0, & t_{ij} < BT_o, \\ 1, & t_{ij} = BT_o, \\ M, & t_{ij} > BT_o, \end{cases} \quad (i, j) \in N \quad (2.96)$$

Durch eine hinreichend große Zahl  $M$  werden die Sperrungen für die Felder mit einer die obere Schranke übersteigenden Fahrzeit realisiert.

Mit KTP-H sei das klassische Transportproblem mit der zu minimierenden Zielfunktion

$$z_H(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n h_{ij} x_{ij}$$

bezeichnet, dass die gleichen Restriktionen wie das klassische Bottleneck Transportproblem besitzt.

### Bemerkung 2.29

Es sei  $BT_o$  eine obere Schranke für die Bottleneck-Zeit  $BT_{\min}$ . Dann gilt für jeden optimalen Transportplan  $x^*$  von KTP-H stets  $x_{ij}^* = 0$  für alle  $(i, j) \in N$  mit  $h_{ij} = M$ .

Im Falle  $z_{H, \min} = 0$  gilt für jeden optimalen Transportplan  $x^*$  von KTP-H die Ungleichung  $BT(x^*) < BT_o$ . Damit induziert jeder dieser Transportpläne eine bessere obere Schranke.

Für  $z_{H, \min} > 0$  ist dagegen klar, dass die Bottleneck-Zeit den Wert der oberen Schranke  $BT_o$  nicht unterschreiten kann. Damit gilt für jeden erzeugten optimalen Transportplan  $x^*$  von KTP-H die Beziehung  $BT(x^*) = BT_{\min}$ . Im Sinne der zusätzlichen Zielstellung (2.93) erzeugt KTP-H nur diejenigen optimalen Transportpläne von BTP, welche die unter Aufwand der Bottleneck-Zeit  $BT_{\min}$  zu transportierende Menge minimieren.

Der algorithmische Ablauf für das skizzierte Lösungsverfahren kann formal durch die folgenden Schritte erfasst werden:

### Lösungsverfahren für BTP

1. Erzeuge einen ersten Transportplan  $x^0$  mit einem Eröffnungsverfahren.  
Setze  $BT_o = BT(x^0)$  und  $k=1$ .
2. Bilde die Kostenmatrix  $H$  und bestimme einen optimalen Transportplan  $x^k$  für das klassische Transportproblem KTP-H.
3. Abbruch: Gilt  $z_H(x^k) > 0$ , dann ist  $x^k$  optimal für BTP mit  $BT_{\min} = BT_o$ .
4. Setze  $BT_o = BT(x^k)$ .  
Setze  $k := k + 1$  und gehe zu Schritt 2.

Der Aufwand der zu lösenden endlichen Folge von klassischen Transportproblemen lässt sich beträchtlich reduzieren. Für das nachfolgende klassische Transportproblem kann stets mit dem optimalen Transportplan der Vorgängeraufgabe gestartet werden. Die Optimalität von  $x^k$  ist sofort klar, wenn  $z_H(x^k) = 0$  gilt. Damit kann man in diesem Fall auf die Berechnung der Optimalitätsindikatoren verzichten.

Klassische Bottleneck Transportprobleme besitzen meist mehrere optimale Transportpläne. Hat man die Bottleneck-Zeit  $BT_{\min}$  bestimmt, dann ist jeder Transportplan  $x$  optimal, für den  $x_{ij} = 0$  für  $t_{ij} > BT_{\min}$  gilt. Damit kann man hinsichtlich weiterer Zielkriterien aus der Menge aller optimalen Transportpläne solche mit speziellen Eigenschaften herausfiltern, wie dies zum Beispiel mit dem nachrangigen Ziel (2.93) beschrieben wurde.

Das vorgestellte Lösungskonzept lässt sich problemlos auf kapazitierte Bottleneck Transportprobleme und prinzipiell auch auf offene Bottleneck Transportprobleme übertragen. Die Minimierung der längsten Lieferkette von einem Anbieter zu einem Verbraucher für Bottleneck Umladeprobleme ist dagegen nicht so einfach.

### Beispiel 2.25

In einem Katastrophenfall werden in einer Stadt an den Plätzen  $P_1$  und  $P_2$  je drei Lastkraftwagen und an den Plätzen  $P_3$  und  $P_4$  je vier beziehungsweise fünf Lastkraftwagen benötigt. In den Garagen  $G_1$ ,  $G_2$  und  $G_3$  stehen zu diesem Zweck vier, fünf beziehungsweise sechs Lastkraftwagen zur Verfügung. Die Fahrzeiten in Minuten von jeder Garage zu jedem Platz sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$G_1$	12	11	17	20
$G_2$	19	16	12	13
$G_3$	18	17	14	12

Die einzelnen Fahrzeuge sollen den Plätzen so zugeordnet werden, dass in kürzester Zeit die Einsatzbereitschaft hergestellt ist.



Es liegt ein klassisches Bottleneck Transportproblem vor, bei dem insgesamt 15 Lastkraftwagen auf Routen mit möglichst geringer Einzelfahrzeit verkehren sollen. Die folgende Datentabelle gibt formal einen Überblick über Angebot, Bedarf und Fahrzeiten:

$t_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1	12	11	17	20	4
2	19	16	12	13	5
3	18	17	14	12	6
$b_j$	3	3	4	5	

Die Berücksichtigung der notwendigen Ganzzahligkeitsbeschränkung für die Variablen stellt kein Problem dar, da für ganzzahlige Angebots- und Bedarfsmengen auch jede Basislösung ganzzahlig ist.

Mit der etwas aufwendigeren Vorgehensweise über (2.94) erhält man für die Bottleneck-Zeit die untere Schranke  $BT_u = \max\{\max\{12; 13; 14\}, \max\{12; 11; 12; 12\}\} = 14$ . Zieht man dagegen nur die Zeilen- und Spaltenminima der Matrix der Fahrzeiten in Betracht, dann resultiert daraus die schwächere Schranke  $\overline{BT}_u = 12$ .

Basierend auf der unteren Schranke  $BT_u = 14$  wird jetzt ein erster Einsatzplan konstruiert, bei dem möglichst viele Felder mit  $t_{ij} \leq 14$  besetzt werden. Die Menge der dafür in Frage kommenden Felder wird durch  $N^* = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$  beschrieben. Da in Spalte 1 und Spalte 2 nur ein Feld aus  $N^*$  stammt, wird zuerst  $x_{11} = 3$  und anschließend  $x_{12} = 1$  gesetzt. Spalte 1 und Zeile 1 sind damit abgearbeitet. In der noch offenen Spalte 2 sind alle Felder aus  $N^*$  bereits besetzt. Die Auswahl für das nächste Feld ist nicht eindeutig. Die Folge der Anweisungen  $x_{23} = 4$ ,  $x_{24} = 1$  und  $x_{34} = 4$  beruht auf der willkürlichen Wahl des Feldes  $(2, 3)$ . Es verbleibt als letztes noch das Feld  $(3, 2) \notin N^*$ , welches zwangsweise zur Wertzuweisung  $x_{32} = 2$  führt. Der erzeugte Einsatzplan  $x^0$  ist in der folgenden Tabelle zu finden:

$x_{ij}^0$	1	2	3	4	$a_i$
1	3	1			4
2			4	1	5
3		2		4	6
$b_j$	3	3	4	5	

Einer oberen Schranke für die Bottleneck-Zeit entspricht die längste Fahrzeit in diesem Einsatzplan. Man erhält  $BT_o = BT(x^0) = t_{32} = 17$ .

Um den vorliegenden Einsatzplan gegebenenfalls verbessern zu können, wird die Kostenmatrix  $H$  aufgestellt. Die Datentabelle des nun zu lösenden klassischen Transportproblems zeigt die nachfolgende linke Tabelle.

$h_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$	$x_{ij}^1$	1	2	3	4	$a_i$
1	0	0	1	$M$	4	1	3	1			4
2	$M$	0	0	0	5	2		2	3		5
3	$M$	1	0	0	6	3			1	5	6
$b_j$	3	3	4	5		$b_j$	3	3	4	5	

Der oben rechts gezeigte Einsatzplan  $x^1$  ist für das aktuelle klassische Transportproblem optimal, da der kleinstmögliche Zielfunktionswert  $z_H = 0$  angenommen wird. Für die maximale Fahrzeit gilt  $BT(x^1) = 16$ .

Mit der korrigierten oberen Schranke  $BT_o = 16$  wird die Kostenmatrix  $H$  aktualisiert und das neu zu lösende klassische Transportproblem durch die folgende Datentabelle formuliert:

$h_{ij}$	1	2	3	4	$a_i$
1	0	0	$M$	$M$	4
2	$M$	1	0	0	5
3	$M$	$M$	0	0	6
$b_j$	3	3	4	5	

Der bereits vorliegende Einsatzplan  $x^1$  ist auch für das neu aufgestellte klassische Transportproblem optimal. In den nächsten beiden Tabellen kann die Berechnung der Optimalitätsindikatoren  $h'_{ij} = h_{ij} - (u_i + v_j)$ ,  $(i, j) \in N$ , nachvollzogen werden.

$u_i + v_j$	1	2	3	4	$u_i$	$h'_{ij}$	1	2	3	4
1	0	0	-1	-1	0	1	0	0	$M + 1$	$M + 1$
2	1	1	0	0	1	2	$M - 1$	0	0	0
3	1	1	0	0	1	3	$M - 1$	$M - 1$	0	0
$v_j$	0	0	-1	-1						

Es gilt  $z_{H,\min} = 2 > 0$ . Damit ist für das vorliegende klassische Bottleneck Transportproblem ein optimaler Einsatzplan mit der Bottleneck-Zeit  $BT_{\min} = 16$  gefunden. Allerdings gibt es weitere optimale Einsatzpläne, die in der folgenden Übersicht berücksichtigt sind:

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$G_1$	3	1		
$G_2$		2	3-d	d
$G_3$			1+d	5-d

Wegen der Nichtnegativitäts- und Ganzzahligkeitsforderungen an die Variablen muss die Einschränkung  $d \in \{0; 1; 2; 3\}$  vorgenommen werden. Für jeden optimalen Einsatzplan stellt die Fahrzeit für die beiden Fahrzeuge, die von Garage 2 zum Einsatzort 2 fahren müssen, den Engpass dar.

Zum Abschluss wird noch eine Klasse von Matrizen definiert, die bezüglich des klassischen Bottleneck Transportproblems eine angenehme Eigenschaft besitzen.

**Definition 2.7**

Eine reelle Matrix  $T$  heißt *Bottleneck Monge-Matrix*, wenn ihre Einträge den Bedingungen  $\max\{t_{ij}, t_{rs}\} \leq \max\{t_{is}, t_{rj}\}$ , für alle  $(i, r, j, s)$  mit  $1 \leq i < r \leq m, 1 \leq j < s \leq n$  genügen.

Analog zu den Monge-Matrizen beim klassischen Transportproblem kann hier eine ähnliche Aussage formuliert werden (siehe [BuKliRu96]).

**Satz 2.26**

Ist die zum klassischen Bottleneck Transportproblem gehörige Matrix der Fahrzeiten  $T$  eine *Bottleneck Monge-Matrix*, dann liefert die Nordwesteckenregel stets einen optimalen Transportplan.

# Literaturverzeichnis

- [Appa73] G.M. Appa: The transportation problem and its variants,  
Operational Research Quarterly, Vol. 24, page 79-99, 1973
- [BeiMen87] E.-P. Beisel und M. Mendel: Optimierungsmethoden des Operations Research,  
Band 1,  
Friedr. Vieweg & Sohn, 1987
- [BeDe94] W. Berens und W. Delfmann: Quantitative Planung  
Schäffer-Poeschel Verlag, 1994
- [BoGr93] I.M. Bomze und W. Grossmann: Optimierung - Theorie und Algorithmen,  
BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim Leipzig Wien Zürich, 1993
- [Bri74] M.E.B. Brigden: A variant of the transportation problem in which the constraints  
are of mixed type,  
Operational Research Quarterly, 1974, Vol.25 , page 437-445
- [BuKliRu96] R.E. Burkard, B. Klinz and R. Rudolf: Perspectives of Monge Properties in  
Optimization,  
Discrete Applied Mathematics 70, 1996, 95-161
- [DaTha97] G.B. Dantzing and M.N. Thapa: Linear Programming: Introduction,  
Springer Series in Operations Research, 1997, 83-89
- [Din92] W. Dinkelbach: Operations Research: Kurzlehr- und Übungsbuch,  
Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992
- [Do95] W. Domschke: Logistik: Transport,  
Oldenbourg Verlag GmbH, München Wien, 1995
- [Do97] W. Domschke: Logistik: Rundreisen und Touren,  
Oldenbourg Verlag GmbH, München Wien, 1997
- [EmKoKr85] V.A.Emeličev, M.M. Kovalev und M.K. Kravcov: Polyeder Graphen Opti-  
mierung,  
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1985
- [GarRao71] R.S. Garfinkel and M.R. Rao: The Bottleneck Transportation Problem,  
Naval Research Logistic Quarterly, 1971, Vol.18 , page 465-472

- [Had69] G. Hadley: Nichtlineare und dynamische Programmierung,  
Verlag Die Wirtschaft, Berlin, 1969, 120-125
- [HiLie90] F.S. Hillier and G.J. Liebermann: Operations Research,  
Oldenbourg Verlag GmbH, München Wien, 1990
- [Hof63] A.J. Hoffman: On simple linear programming problems,  
Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Convexity, Vol. VII, Klee, V. (ed.), AMS,  
317–327, 1963.
- [Is82] H. Isermann: Solving the transportation problem with mixed constraints,  
Zeitschrift für Operations Research, Ser. A, Vol. 26, page 251-257, 1982
- [Kuhn55] H.W. Kuhn: The Hungarian method for the assignment and transportation problems,  
Naval Research Logistics Quarterly 2, 1955, 83-97
- [Mau82] K.-D. Maudrich: Beitrag zur operativen Planung in der Polygraphie,  
Wissenschaftliche Zeitschrift TH Leipzig, 16/82, Heft 4, 249-253
- [Mon1781] G. Monge: Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais,  
Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Année M. DCCLXXXI, avec les Mémoires  
de Mathématique et de Physique, pour la même Année, Tirés des Registres de cette  
Académie, Paris, 1781, pp. 666-704
- [Scho76] M. Schoch: Das Erweiterungsprinzip und seine Anwendung zur Entwicklung von  
Algorithmen für die Lösung kombinatorischer Optimierungsaufgaben,  
Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1976