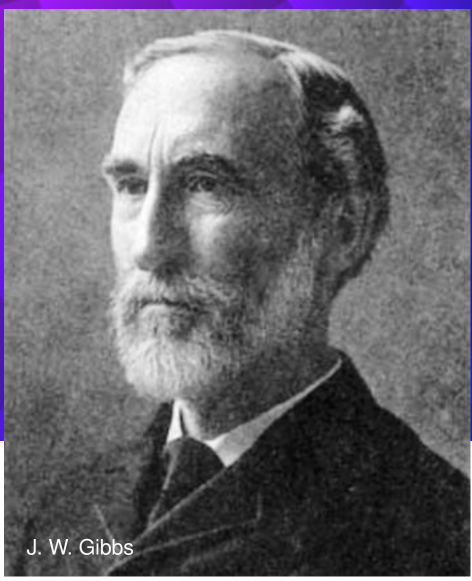


J. W. Gibbs

April

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30										

Das Gibbssche Phänomen

Einer 2π-periodischen, auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion f kann man eine Fourierreihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt,$$

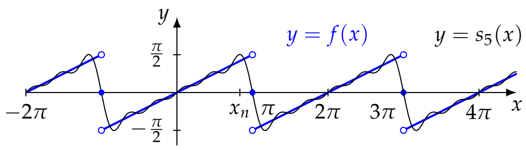
zuordnen. Während die Koeffizienten a_n, b_n bereits unter sehr schwachen Voraussetzungen wie der der Integrierbarkeit von f über $[-\pi, \pi]$ existieren, ist die Frage, wann die Reihe gegen $f(x)$ konvergiert, keine leichte und hat der Analysis des 19. Jahrhunderts wesentliche Impulse verliehen. Betrachten wir die Funktion $f(x) = x/2$ für $-\pi < x < \pi$, so sind die Partialsummen ihrer Fourierreihe gerade

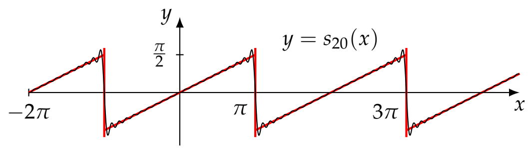
$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

In der Nähe der Sprungstellen von f beobachtet man nun gewisse Überschwingungen der s_n. So gilt, wenn $x_n = \frac{n}{n+1}\pi$ die größte unterhalb π gelegene Maximumstelle von s_n bezeichnet, die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_n) = \mathrm{Si}(\pi) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} \cdot 1.17898\ldots,$$

was also etwa 18% größer als der erwartete Wert $\pi/2$ ist.





In einer Diskussion in der Zeitschrift *Nature* über den von Albert Michelson entwickelten harmonischen Analysator wies Josiah Willard Gibbs 1898/99 auf den Unterschied zwischen dem Graphen der Grenzfunktion und dem Grenzwert der Graphen der Partialsummen s_n hin. Im vorliegenden Fall streben die Summen s_n punktweise gegen die Grenzfunktion f (wobei $f((2n+1)\pi) = 0$ zu ergänzen ist), deren Graph im Bild oben blau gekennzeichnet ist. Dagegen nähern sich die Graphen der s_n an die rot gefärbte Menge an, d.h. jeder rote Punkt ist Grenzwert einer Folge von Punkten, deren n-ter zum Graphen von s_n gehört. Eine erste mathematische Analyse dieses Effektes erfolgte im Jahre 1906 durch Maxime Bôcher, der auch den Namen „Gibbssches Phänomen“ prägte – ohne zu wissen, dass dieser bereits 1848 in einer Arbeit des englischen Mathematikers Henry Wilbraham beschrieben wurde.

Das Bild des Monats ist durch eine komplexe Version des Gibbsschen Phänomens inspiriert, die auf dem Konvergenzverhalten der Taylorreihe von $f(z) = \log((1+z)/(1-z))$ bei $z = 1$ basiert.

Josiah Willard Gibbs (1839 – 1903)

wurde in New Haven (Connecticut) in einer Familie geboren, die schon viele Akademiker und Geistliche hervorgebracht hatte. Er studierte in seiner Heimatstadt Mathematik und Naturwissenschaften und erhielt den ersten in den Ingenieurswissenschaften vergebenen Doktortitel in den USA. In den Jahren von 1866 bis 1869 unternahm er eine Europareise mit seinen Schwestern. In Paris hörte er u.a. Liouville (siehe Dezember), in Berlin Weierstraß und Kronecker und in Heidelberg Kirchhoff, Helmholtz und Bunsen. Danach kehrte er an die Yale University zurück, wo er 1871 zum ersten amerikanischen Professor für mathematische Physik ernannt wurde – die Stelle war bis 1880 unbezahlt, Gibbs war aber dank des väterlichen Erbes finanziell unabhängig.

Erst 1873 erschien seine erste Publikation, die von Maxwell enthusiastisch aufgenommen wurde. Durch die nun folgende Reihe von thermodynamischen Arbeiten, die u.a. die Gibbssche Phasenregel enthalten, wurde er zu einem Begründer der physikalischen Chemie. Zusammen mit Maxwell und Boltzmann ist er zudem Gründervater der statistischen Mechanik. Desweiteren lieferte er Beiträge zur elektromagnetischen Theorie des Lichts. Er führte Begriffe der Vektorrechnung (Skalar- und Kreuzprodukt, Beiträge zur Vektoranalysis) ein, die einfacher handhabbar waren als der bis dahin verbreitete Quaternionenkalkül.

E. Hewitt, R. E. Hewitt: The Gibbs-Wilbraham phenomenon: An episode in Fourier analysis. Archive for History of Exact Sciences. **21**, Nr. 2, 1979, 129–160.